Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования
Ульяновский государственный педагогический университет
имени И.Н.Ульянова

Н.А. Кошелев, А.В. Николаев, С.В. Червон

Основы f(R) теории гравитации

Учебное пособие

Ульяновск
2015

УДК 531
ББК 22.313
К 76

Печатается по решению редакционно-издательского совета
ФГБОУ ВПО «УлГПУ им. И.Н. Ульянова»

Рецензенты:
доктор физико-математических наук, профессор кафедры теоретической физики Ульновского государственного университета С.С. Моливер
кандидат физико-математических наук, доцент кафедры физики и технических дисциплин Ульяновского государственного педагогического университета имени И.Н.Ульянова К.К.Алтунин

К 76 Кошелев Н.А., Николаев А.В., Червон С.В. Основы f(R) теории гравитации / Кошелев Н.А., Николаев А.В., Червон С.В. - Ульяновск, ФГБОУ ВПО «УлГПУ им. И.Н. Ульянова», 2015 — 38 с.

ISBN 978-5-86045-830-7

В данном пособии содержится подробное изложение применения Лагранжева формализма к общему виду действия для получение полевых уравнений f(R) теории гравитации. Во второй главе приведены сведения об основах линейной теории возмущений в ОТО, часто используемые калибровки и техника счёта. В третей главе описаны линейные неоднородности в f(R) гравитации. Пособие содержит большое количество упражнений, снабжённых решениями и указаниями для самостоятельных вычислений.
Пособие предназначено для студентов старших курсов, магистрантов и аспирантов, проводящих исследования в области теории гравитации и космологии. Мы рассчитываем, что пособие также будет полезно для преподавателей, готовящих студентов для работы по этому направлению.

УДК 531
ББК 22.313

Издание опубликовано при финансовой поддержке государственного задания в рамках проекта Министерства образования и науки РФ № 2014/391 по проекту № 1670

ISBN 978-5-86045-830-7
9 785860 458307

Оглавление

Глава 1.

Введение в $f(R)$ теорию гравитации

1.1. Вариационный принцип в классической механике

Рассмотрим принцип наименьшего действия на простейшем примере нерелятивистской механики Ньютона. Действие для частицы массы m имеет вид:

$$S = \int_a^b L dt = \int_a^b \left(\frac{m(\dot{x}^i)^2}{2} - U(x^i) \right) dt,$$

где x^i - траектория частицы, служащая динамической переменной, $\dot{x}^i$ - ее скорость, а интеграл берется в конечных пределах - закрепленных концах, на которых значения x^i(a) и $x^i(b)$ остаются постоянными. Конкретный вид лагранжиана (его кинетической части) диктуется симметриями пространства Галилея - однородность (нет явной зависимости от координат) и изотропность (нет выделенного направления), а также однородностью времени (нет явной зависимости). Поэтому и лагранжиан, и действие - скаляры. Очевидно и выполнение требования "простоты". Отметим, что действие имеет размерность "энергия $\cdot$ время". Вариация δS равна:

$$\delta S = \int_a^b \delta L dt = \int_a^b \left(m\dot{x}^i \delta \dot{x}^i - \frac{\partial U}{\partial x^i} \delta x^i \right) dt.$$

Интегрируя первое слагаемое по частям, получаем

$$\delta S = m x^i \delta x^i |_a^b - \int_a^b \left(m \frac{d}{dt}(\dot{x}^i) + \frac{\partial U}{\partial x^i} \right) \delta x^i dt.$$

Поскольку $\delta x^i(a) = \delta x^i(b) = 0$, то, приравнивая вариацию нулю, $\delta S = 0$, и учитывая произвольность траектории $x^i(t)$, приходим ко второму закону Ньютона

$$m \frac{d}{dt}(\dot{x}^i) = -\frac{\partial U}{\partial x^i} = F^i.$$

1.2. Варьирование действия и выделение 4-дивергенции

Вывод уравнений Эйнштейна из вариационного принципа, представленный в учебнике [7] (§95), содержит красивый переход к локально-геодезической системе координат с последующим переходом от частной производной в ней к ковариантному обобщению на любую систему отсчета. Учитывая возникший интерес к обобщениям эйнштейновской теории гравитации, рассмотрим использование граничного члена в интеграле действия при выводе полевых уравнений с применением вариационного принципа.

Полное действие для гравитационного поля, порожденного материальным источником, записывается следующим образом

$$S = (S_{EH}) + S_M \tag{1.1}$$

, где S_{EH} - действие Эйнштейна – Гильберта. Стандартное действие Эйнштейна – Гильберта записывается следующим образом

$$S_{EH} = \int d^4x \sqrt{-g} R \tag{1.2}$$

, где R – скалярная кривизна пространства-времени. Этот интеграл действия обобщают следующим образом: скалярную кривизну R заменяют на некоторую функцию от нее $f(R)$. Таким образом $f(R)$ гравитация представляет собой обобщение ОТО, в котором модификации подвергается метрическая часть действия. В результате обобщенное действие Эйнштейна – Гильберта принимает вид

$$S'_{EH} = \int d^4x\sqrt{-g}f(R) \tag{1.3}$$

.

Теперь, для того чтобы получить обобщённые уравнения Эйнштейна, мы должны подставить действие S'_{EH} (1.3) в (1.1) вместо S_{EH} и выполнить варьирование по гравитационному полю.

Замечание: существуют 3 способа варьирования: 1) по метрике $g_{\mu\nu}$; 2) по связности (вариация Палатини); 3) по метрике и связности. Мы начинаем с рассмотрения варьирование действия (1.1) по метрике.

Для того что бы облегчить дальнейший вывод решим несколько упражнений, с целью получить вспомогательные уравнения. Договоримся, что индексы пробегают следующие значения: греческие $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$, латинские $i, j = 1, 2, 3$.

Упражнение 1. Выразите вариацию $\delta g_{\mu\nu}$ через $\delta g^{\mu\nu}$.

□

Кажется совсем простой ответ: использовать метрический тензор для поднятия и опускания индексов. Однако, вспоминая, что $g_{\mu\nu}g^{\gamma\nu} = \delta^\gamma_\mu$ и $\delta^\mu_\mu = 4$, а значит $g_{\mu\nu}g^{\mu\nu} = 4$, рассмотрим следующую вариацию

$$\delta(g_{\mu\nu}g^{\mu\nu}) = (\delta g_{\mu\nu})g^{\mu\nu} + g_{\mu\nu}(\delta g^{\mu\nu}) = 0.$$

Теперь в первом слагаемом немые индексы μ, ν заменяем на γ, λ; во втором слагаемом используем очевидное соотношение $g_{\mu\nu} = g_{\gamma\mu}g_{\lambda\nu}g^{\gamma\lambda}$, после чего выносим $g^{\gamma\lambda}$ за скобку

$$0 = g^{\gamma\lambda}\delta g_{\gamma\lambda} + g_{\gamma\mu}g_{\lambda\nu}g^{\gamma\lambda}\delta g^{\mu\nu} = g^{\gamma\lambda}(\delta g_{\gamma\lambda} + g_{pi}g_{\lambda\nu}\delta g^{\mu\nu}).$$

Отсюда в результате получаем

$$\delta g_{\gamma\lambda} = -g_{\gamma\mu}g_{\lambda\nu}\delta g^{\mu\nu}. \tag{1.4}$$

Как видим, результат получился отличный от ожидаемого: изменился знак при операции "опускания индекса"для $\delta g^{\mu\nu}$. ■

Упражнение 2. Найдите вариацию $\delta\sqrt{-g}$.

□

Понятно, что данная вариация определяется таким образом

$$\delta\sqrt{-g} = -\frac{1}{2\sqrt{-g}}\delta g.$$

Далее, чтобы найти дифференциал от g как определителя $g_{\mu\nu}$ нужно взять дифференциал от каждого из $g_{\mu\nu}$ и умножить на соответствующий минор ($M^{\mu\nu}dg_{\mu\nu}$). Так как обратная матрица вычисляется по формуле $g^{\mu\nu} = M^{\mu\nu}/g$, то можем записать

$$dg = gg^{\mu\nu}dg_{\mu\nu}$$

Чтобы перейти к $\delta g^{\mu\nu}$ воспользуемся соотношением $d(g_{\mu\nu}g^{\mu\nu}) = g^{\mu\nu}dg_{\mu\nu} + g_{\mu\nu}dg^{\mu\nu} = 0$, откуда следует

$$dg = -g g_{\mu\nu} dg^{\mu\nu}.$$

Таким образом искомая вариация запишется в виде

$$\delta\sqrt{-g} = -\frac{1}{2}\sqrt{-g}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}.$$

■

Упражнение 3. Докажите, что $\delta R_{\mu\nu} = \nabla_\xi \delta\Gamma^\xi_{\mu\nu} - \nabla_k \delta\Gamma^l_{il}$. Обратите внимание, на то, что хотя $\Gamma^\xi_{\mu\nu}$ не является тензором, величины $\delta\Gamma^\xi_{\mu\nu}$ - составляют тензор.

□

Тензор Риччи вычисляется по форме:

$$R_{\mu\nu} = \frac{\partial\Gamma^\xi_{\mu\nu}}{\partial x^\xi} - \frac{\partial\Gamma^\xi_{\mu\xi}}{\partial x^\nu} + \Gamma^\xi_{\mu\nu}\Gamma^\lambda_{\xi\lambda} - \Gamma^\lambda_{\mu\xi}\Gamma^\xi_{\nu\lambda}.$$

Находим вариацию

$$\delta R_{\mu\nu} = \frac{\partial\delta\Gamma^\xi_{\mu\nu}}{\partial x^\xi} - \frac{\partial\delta\Gamma^\xi_{\mu\xi}}{\partial x^\nu} + \delta\Gamma^\xi_{\mu\nu}\Gamma^\lambda_{\xi\lambda} + \Gamma^\xi_{\mu\nu}\delta\Gamma^\lambda_{\xi\lambda} - \delta\Gamma^\lambda_{\mu\xi}\Gamma^\xi_{\nu\lambda} - \Gamma^\lambda_{\mu\xi}\delta\Gamma^\xi_{\nu\lambda}.$$

Теперь отдельно запишем $\nabla_\xi\delta\Gamma^\xi_{\mu\nu}$ как ковариантную производную от смешанного тензора третьего ранга, и $\nabla_\nu\delta\Gamma^\xi_{\mu\xi}$ – как производную от ковектора

$$\nabla_\xi\delta\Gamma^\xi_{\mu\nu} = \frac{\partial\delta\Gamma^\xi_{\mu\nu}}{\partial x^\xi} - \Gamma^\tau_{\mu\xi}\delta\Gamma^\xi_{\tau\nu} - \Gamma^\tau_{\lambda\rho}\delta\Gamma^\xi_{\tau\xi} + \Gamma^\xi_{\tau\xi}\delta\Gamma^\tau_{\mu\nu},$$

$$\nabla_\nu\delta\Gamma^\xi_{\mu\xi} = \frac{\partial\delta\Gamma^\xi_{\mu\xi}}{\partial x^\nu} - \Gamma^\tau_{\mu\nu}\delta\Gamma^\xi_{\mu\xi}.$$

Подставляем и сопоставляем выражения, тем самым убеждаемся в справедливости уравнения

$$\delta R_{\mu\nu} = \nabla_\xi\delta\Gamma^\xi_{\mu\nu} - \nabla_\nu\delta\Gamma^\xi_{\mu\xi}.$$

■

Упражнение 4. Найдите вариации $\delta\Gamma^\xi_{\mu\nu}$ и $\delta\Gamma^\xi_{\mu\xi}$.

□

Как мы знаем по определению символы Кристоффеля (иногда используется термин "кристоффели") второго рода записываются следующим образом:

$$\Gamma^\xi_{\mu\nu} = \frac{1}{2}g^{\xi\tau}\left(g_{\mu\tau,\nu} + g_{\nu\tau,\mu} - g_{\mu\nu,\tau}\right).$$

Варьируя получаем

$$\delta\Gamma^\xi_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\delta g^{\xi\tau}\left(g_{\mu\tau,\nu} + g_{\nu\tau,\mu} - g_{\mu\nu,\tau}\right) + \frac{1}{2}g^{\xi\tau}\left(\delta g_{\mu\tau,\nu} + \delta g_{\nu\tau,\mu} - \delta g_{\mu\nu,\tau}\right). \tag{1.5}$$

Частные производные $\delta g_{\mu\tau,\nu}$ мы можем найти, используя запись ковариантной производной

$$\nabla_\nu \delta g_{\mu\tau} = \delta g_{\mu\tau,\nu} - \Gamma^\xi_{\mu\nu}\delta g_{\xi\tau} - \Gamma^\xi_{\tau\nu}\delta g_{\xi\mu}$$

Подставляя результат в (1.5) получаем

$$\begin{aligned}\delta\Gamma^\xi_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\delta(g^{\xi\tau})\left(g_{\mu\tau,\nu} + g_{\nu\tau,\mu} - g_{\mu\nu,\tau}\right) + \\ + \frac{1}{2}(g^{\xi\tau}\left(\nabla_\nu\delta g_{\mu\tau} + \Gamma^\gamma_{\mu\nu}\delta g_{\gamma\tau} + \Gamma^\gamma_{\tau\nu}\delta g_{\mu\gamma} + \nabla_\mu\delta g_{\tau\nu} + \right.\\ \left. + \Gamma^\gamma_{\tau\mu}\delta g_{\gamma\nu} + \Gamma^\gamma_{\nu\mu}\delta g_{\tau\gamma} - \nabla_\tau\delta g_{\mu\nu} - \Gamma^\gamma_{\mu\tau}\delta g_{\gamma\nu} - \Gamma^\gamma_{\nu\tau}\delta g_{\mu\gamma}\right).\end{aligned}$$

Учитывая симметрию относительно ковариантных индексов символов Кристоффеля и приводя подобные слагаемые в скобках, редуцируем второе слагаемое к виду

$$\frac{1}{2}g^{\xi\tau}(\nabla_\nu\delta g_{\mu\tau} + \nabla_\mu\delta g_{\tau\nu} - \nabla_\tau\delta g_{\mu\nu}) + g^{\xi\tau}\Gamma^\gamma_{\mu\nu}\delta g_{\gamma\tau}.$$

Преобразуем последнее слагаемое воспользовавшись (1.4)

$$g^{\xi\tau}\Gamma^\gamma_{\mu\nu}\delta g_{\gamma\tau} = -g^{\xi\tau}\Gamma^\gamma_{\mu\nu}g_{\lambda\gamma}g_{\eta\tau}\delta g^{\lambda\eta} = -g_{\lambda\gamma}\Gamma^\gamma_{\mu\nu}\delta g^{\lambda\xi}.$$

Теперь представим первое слагаемое в виде

$$\frac{1}{2}\delta g^{\xi\tau}\delta^\gamma_\tau\left(g_{\mu\gamma,\nu} + g_{\nu\gamma,\mu} - g_{\mu\nu,\gamma}\right).$$

Далее символ Кронекера δ^γ_τ представим как $g^{\gamma\eta}g_{\tau\eta}$ что в результате приводит к слагаемому

$$\delta g^{\xi\tau}g_{\tau\eta}\Gamma^\eta_{\mu\nu}.$$

Таким образом, возвращаясь к $\delta\Gamma^\xi_{\mu\nu}$ получаем

$$\delta g^{\xi\tau}g_{\tau\eta}\Gamma^\eta_{\mu\nu} - g_{\lambda\gamma}\Gamma^\gamma_{\mu\nu}\delta g^{\lambda\xi} + \frac{1}{2}g^{\xi\tau}(\nabla_\nu\delta g_{\mu\tau} + \nabla_\mu\delta g_{\tau\nu} - \nabla_\tau\delta g_{\mu\nu}) = \frac{1}{2}g^{\xi\tau}(\nabla_\nu\delta g_{\mu\tau} + \nabla_\mu\delta g_{\tau\nu} - \nabla_\tau\delta g_{\mu\nu}).$$

Чтобы получить искомую вариацию через $\delta g^{\mu\nu}$ снова воспользуемся (1.4)

$$\begin{aligned}\delta\Gamma^\xi_{\mu\nu} &= \frac{1}{2}g^{\xi\tau}(\nabla_\nu\delta g_{\mu\tau} + \nabla_\mu\delta g_{\tau\nu} - \nabla_\tau\delta g_{\mu\nu}) = \\ &= \frac{1}{2}g^{\xi\tau}(\nabla_\nu(-g_{\mu\lambda}g_{\tau\eta}\delta g^{\lambda\eta}) + \nabla_\mu(-g_{\tau\lambda}g_{\nu\eta}\delta g^{\lambda\eta}) - \nabla_\tau(-g_{\mu\lambda}g_{\nu\eta}\delta g^{\lambda\eta}) = \\ &= -\frac{1}{2}\left(g_{\mu\lambda}\nabla_\nu\delta g^{\lambda\xi} + g_{\nu\eta}\nabla_\mu\delta g^{\eta\xi} - g_{\mu\lambda}g_{\eta\nu}\nabla^\xi\delta g^{\lambda\eta}\right).\end{aligned}$$

Выполнив операцию свертки по индексам ξ и ν получаем выражение для $\delta\Gamma^\xi_{\mu\xi}$. В итоге имеем

$$\delta\Gamma^\xi_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}\left(g_{\mu\lambda}\nabla_\nu\delta g^{\lambda\xi} + g_{\nu\eta}\nabla_\mu\delta g^{\eta\xi} - g_{\mu\lambda}g_{\eta\nu}\nabla^\xi\delta g^{\lambda\eta}\right), \tag{1.6}$$

$$\delta\Gamma^\xi_{\mu\xi} = -\frac{1}{2}g_{\xi\eta}\nabla_\mu\delta g^{\eta\xi}. \tag{1.7}$$

■

Упражнение 5. Воспользовавшись результатами упражнений 3 и 4 запишите вариацию $g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu}$.

$\square$
Используя результат упражнения 3 можно записать

$$g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} = g^{\mu\nu}\left(\nabla_\xi \delta\Gamma^\xi_{\mu\nu} - \nabla_\nu \delta\Gamma^\xi_{\mu\xi}\right)$$

Далее внесём $g^{\mu\nu}$ в скобки, пользуясь тем, что $\nabla_\xi g^{\mu\nu} = 0$, внесём $g^{\mu\nu}$ и под знак ковариантного дифференцирования. Чтобы не путаться в индексах немой индекс ξ в последнем слагаемом изменим на λ

$$\nabla_\xi\left(g^{\mu\nu}\delta\Gamma^\xi_{\mu\nu}\right) - \nabla_\nu\left(g^{\mu\nu}\delta\Gamma^\lambda_{\mu\lambda}\right)$$

Так как во втором слагаемом индекс ν -немой, можем заменить его на ξ и вынести за скобку оператор ковариантного дифференцирования

$$\nabla_\xi\left(g^{\mu\nu}\delta\Gamma^\xi_{\mu\nu} - g^{\mu\xi}\delta\Gamma^\lambda_{\mu\lambda}\right)$$

Теперь воспользуемся результатом упражнения 4. Первое слагаемое перепишем согласно (1.6), а второе – используя (1.7). Получаем

$$\nabla_\xi\left[-g^{\mu\nu}\frac{1}{2}\left(g_{\mu\lambda}\nabla_\nu\delta g^{\lambda\xi} + g_{\nu\eta}\nabla_\mu\delta g^{\eta\xi} - g_{\mu\lambda}g_{\eta\nu}\nabla^\xi\delta g^{\lambda\eta}\right) + g^{\mu\xi}\frac{1}{2}g_{\lambda\eta}\nabla_\mu\delta g^{\lambda\eta}\right]$$

Далее раскрываем внутренние скобки и приводим подобные слагаемые (а именно $-\frac{1}{2}g_{\mu\lambda}\nabla_\nu\delta g^{\lambda\xi} = -\frac{1}{2}\nabla_\nu\delta g^{\lambda\rho}$ и $-\frac{1}{2}g^{\mu\nu}g_{\nu\eta}\nabla_\mu\delta g^{\eta\xi} = -\frac{1}{2}\nabla_\mu\delta g^{\mu\xi}$; вторая пара $\frac{1}{2}g^{\mu\nu}g_{\mu\lambda}g_{\eta\nu}\nabla^\xi\delta g^{\lambda\eta} = \frac{1}{2}g_{\eta\lambda}\nabla^\xi\delta g^{\lambda\eta}$ и $\frac{1}{2}g^{\mu\xi}g_{\lambda\eta}\nabla_\mu\delta g^{\lambda\eta} = \frac{1}{2}g_{\lambda\eta}\nabla^\xi\delta g^{\lambda\eta}$)

$$\nabla_\xi\left[g_{\lambda\eta}\nabla^\xi\delta g^{\lambda\eta} - \nabla_\mu\delta g^{\mu\xi}\right]$$

в итоге имеем

$$g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} = g_{\lambda\eta}\square\delta g^{\lambda\eta} - \nabla_\mu\nabla_\xi\delta g^{\mu\xi}, \quad \square := \nabla^\xi\nabla_\xi \tag{1.8}$$

$\blacksquare$

Теперь мы готовы приступить непосредственно к варьированию действия (1.3). Его вариация может быть представлена в виде

$$\delta S'_{EH} = \int d^4x[\delta(\sqrt{-g})f(R) + \sqrt{-g}f'(R)\delta(R)]$$

В дальнейшем будем опускать аргумент функции $f(R)$. Воспользуемся результатами упражнения 2 для того, что бы расписать $\delta\sqrt{-g}$ во втором слагаемом. Вспомним что $R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$, и воспользуемся результатом (1.8). Окончательно получим

$$\delta S'_{EH} = \int d^4x\sqrt{-g}\delta g^{\mu\nu}\left(-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}f + f'R_{\mu\nu}\right) + \\ + \int d^4x\sqrt{-g}f'g_{mq}\square\delta g^{\lambda\eta} - \int d^4x\sqrt{-g}f'\nabla_\mu\nabla_\xi\delta g^{\mu\xi}$$

Возникает вопрос как поступить с двумя последними интегралами. В таких случаях их пытаются свести к интегралам от дивергенции и с помощью теоремы Гаусса-Стокса вынести $g^{\mu\nu}$ из под знаков дифференцирования.

Рассмотрим первый интеграл

$$\mathfrak{I}_1 = \int d^4x\sqrt{-g}f' g_{\lambda\eta}\Box\delta g^{\lambda\eta}$$

для того, что бы применить теорему Гаусса-Стокса нам хотелось бы иметь интеграл следующего вида $\int d^4x\sqrt{-g}\nabla^\tau N_\tau$.

Распишем в анализируемом выражении оператор $\Box$ по определению $\Box := \nabla_\tau\nabla^\tau$ следующим образом

$$g_{\lambda\eta}f'\Box\delta g^{\lambda\eta} = g_{\lambda\eta}f'\nabla^\tau\nabla_\tau\delta g^{\lambda\eta}$$

Теперь перенесем ковариантную производную ∇^τ в начало выражения и применим ее. Получаем

$$\nabla^\tau\left(g_{\lambda\eta}f'\nabla_\tau\delta g^{\lambda\eta}\right) = g_{\lambda\eta}\left(\nabla^\tau f'\right)\nabla_\tau\delta g^{\lambda\eta} + g_{\lambda\eta}f'\nabla^\tau\nabla_\tau\delta g^{\lambda\eta} = g_{\lambda\eta}\left(\nabla^\tau f'\right)\nabla_\tau\delta g^{\lambda\eta} + g_{\lambda\eta}f'\Box\delta g^{\lambda\eta}$$

Таким образом, если выбрать пробное $\tilde{N}_\tau = f' g_{\lambda\eta}\nabla_\tau\delta g^{\lambda\eta}$ и применить к нему оператор ∇^τ мы получим нужное нам слагаемое и нежелательную добавку, содержащую $\nabla^\tau\delta g^{\lambda\eta}$:

$$g_{\lambda\eta}f'\Box\delta g^{\lambda\eta} + g_{\lambda\eta}(\nabla^\tau f')\nabla_\tau\delta g^{\lambda\eta}$$

Чтобы устранить второе, нежелательное слагаемое, мы можем добавить к $\tilde{N}_\tau$ подходящее выражение, которое после применения оператора аннулирует мешающий нам член. Т.е. чтобы получить истинное N_τ мы должны переписать пробное $\tilde{N}_\tau$ так, чтобы там было ещё и слагаемое, которое после применения оператора ∇^τ даст нам $-g_{\lambda\eta}(\nabla^\tau f')\nabla_\tau\delta g^{\lambda\eta}$. Понятно, что нужное слагаемое возникает при ковариантном дифференцировании $-g_{\lambda\eta}(\nabla^\tau f')\nabla_\tau g^{\lambda\eta}$.

Обратим внимание на следующее преобразование, которое позволяет получить ковариантную производную с контравариантным индексом $\nabla^\tau\delta g^{\lambda\eta}$:

$$g_{\lambda\eta}(\nabla^\tau f')\nabla_\tau\delta g^{\lambda\eta} = g_{\lambda\eta}(\nabla^\tau f')g_{\tau\gamma}\nabla^p\delta g^{\lambda\eta} = g_{\lambda\eta}(\nabla_\gamma f')\nabla^\gamma\delta g^{\lambda\eta}$$

Наконец меняем немой индекс γ на τ и получаем $g_{\lambda\eta}\nabla_\tau f'\nabla^\tau\delta g^{\lambda\eta}$. Таким образом наконец видим, как должно выглядеть искомое N_τ

$$N_\tau = f' g_{\lambda\eta}\nabla_\tau\delta g^{\lambda\eta} - g_{\lambda\eta}(\nabla_\tau f')\delta g^{\lambda\eta}$$

Возвращаясь к рассматриваемому интегралу запишем

$$\nabla^\tau N_\tau = f' g_{\lambda\eta}\Box\delta g^{\lambda\eta} - g_{\lambda\eta}\delta g^{\lambda\eta}\Box f'$$

Следовательно наш интеграл мы можем выразить следующим образом

$$\int d^4x\sqrt{-g}f' g_{\lambda\eta}\Box\delta g^{\lambda\eta} = \int d^4x\sqrt{-g}\nabla^\tau N_\tau + \int d^4x\sqrt{-g}g_{\lambda\eta}\Box f'\delta g^{\lambda\eta}.$$

Таким образом интеграл $\mathfrak{I}_1$ преобразован к 4-дивергенции от N_τ и слагаемому, которое содержит вариацию $\delta g^{\lambda\eta}$ и войдет в уравнение гравитационного поля.

Упражнение 6. По аналогии избавьтесь от производной $\nabla_\xi \delta g^{\mu\xi}$ в интеграле $\mathfrak{I}_2 = \int d^4x\sqrt{-g} f' \nabla_\mu \nabla_\xi \delta g^{\mu\xi}$.

□

Будем пытаться получить $\int d^4x\sqrt{-g}\nabla_\mu M^\mu$. Начинаем выбирать $M^\mu = f'\nabla_\xi \delta g^{\mu\xi}$ так что бы получить исходное подынтегральное выражение. Теперь применяем оператор ∇_μ

$$\nabla_\mu M^\mu = f'\nabla_\mu\nabla_\xi \delta g^{\mu\xi} + \nabla_\mu f'\nabla_\xi \delta g^{\mu\xi}.$$

Во втором слагаемом просто меняем немые индексы и, применяя метод, описанный подробно выше, для интеграла $\mathfrak{I}_1$ получаем:

$$M^i = f'\nabla_\xi \delta g^{\mu\xi} - \nabla_\xi f'\delta g^{\mu\xi}.$$

Находим, что $\nabla_i M^\mu = f'\nabla_\mu\nabla_\xi \delta g^{\mu\xi} - \nabla_\mu\nabla_\xi f'\delta g^{\mu\xi}$. И выражаем исходный интеграл:

$$\int d^4x\sqrt{-g} f'\nabla_\mu\nabla_\xi \delta g^{\mu\xi} = \int d^4x\sqrt{-g}\nabla_\mu M^\mu + \int d^4x\sqrt{-g}\nabla_\mu\nabla_\xi f'\delta g^{\mu\xi}.$$

■

Таким образом, мы можем записать вариацию действия

$$\delta S_{EH} = \int d^4x\sqrt{-g}\delta g^{\mu\nu}\left(-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}f + f'R_{\mu\nu} + g_{\mu\nu}\Box f' - \nabla_\mu\nabla_\nu f'\right) + \\ + \int d^4x\sqrt{-g}\nabla^\tau N_\tau - \int d^4x\sqrt{-g}\nabla_\mu M^\mu,$$

где выделены слагаемые, к которым можно применить теорему Гаусса – Стокса.

1.3. Выделение граничных членов

С помощью теоремы Гаусса – Стокса переведем интегралы от 4-дивергенции к интегралам по гиперповерхности. В результате вариация действия Эйнштейна – Гильберта принимает вид:

$$\delta S_{EH} = \int d^4x\sqrt{-g}\delta g^{\mu\nu}\left(-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}f + f'R_{\mu\nu} + g_{\mu\nu}\Box f' - \nabla_\mu\nabla_\nu f'\right) + \oint N_\tau d\Sigma^\tau - \oint M^\mu d\Sigma_\mu.$$

Введем некоторые обозначения, стандартные для теории гиперповерхностей [14]. Ограничимся рассмотрением четырехмерного пространства-времени и трехмерными, ненулевыми гиперповерхностями. Гиперповерхность Σ может задаваться как уравнение зависимости между 4-координатами

$$\Phi(x^\mu) = 0. \tag{1.9}$$

В этом случае $\Phi_{,\mu}$, будет нормальным вектором к гиперповерхности Σ, так как на ней $\Phi_{,\mu} = 0$, а значит значение Φ меняется только в направлении перпендикулярном Σ. Ортонормальный вектор можно определить так

$$n_\mu = \frac{\varepsilon \Phi_{,\mu}}{\sqrt{g^{\mu\nu}\Phi_{,\mu}\Phi_{,\nu}}},$$

где $n_\mu n^\mu = \varepsilon = \mp 1$, где верхний знак соответствует пространственноподобной гиперповерхности Σ, нижний – времениподобной. При этом добавляется требование, чтобы n^μ указывало направление возрастания $\Phi : n^\mu \Phi_{,\mu} > 0$.

Другой способ задания гиперповерхности заключается в указании явной зависимости 4-координат x^μ от координат на гиперповерхности $y^a, (a, b, ... = 1, 2, 3)$

$$x^\mu = x^\mu(y^a).$$

Построим базис касательных векторов к гиперповерхности Σ

$$e^\mu_a := \frac{\partial x^\mu}{\partial y^a}.$$

Тогда для нормального вектора можно записать:

$$e^\mu_a n_\mu = 0.$$

Индуцированную метрику на поверхности найдем используя способ задания внутренней метрики и условие ортогональности

$$dS^2_\Sigma = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu|_\Sigma = g_{\mu\nu} \left(\frac{\partial x^\mu}{\partial y^a}\right) dy^a \left(\frac{\partial x^\nu}{\partial y^b}\right) dy^b = h_{ab} dy^a dy^b,$$

где $h_{ab} = g_{\mu\nu} \left(\frac{\partial x^\mu}{\partial y^a}\right) \left(\frac{\partial x^\nu}{\partial y^b}\right) = g_{\mu\nu} e^\mu_a e^\nu_b$ – индуцированная метрика на Σ или ее первая фундаментальная форма.

Рассмотрим поверхностные интегралы более подробно. В координатах на гиперповерхности можно записать

$$\oint N_\tau d\Sigma^\tau = \oint \varepsilon N_\tau n^\tau \sqrt{|h|} d^3y,$$

где y- координаты на граничной гиперповерхности, $\varepsilon = n_\mu n^\mu = \pm 1$, $h^{\mu\nu}$ - метрика на гиперповерхности, причем $g^{\mu\nu} = h^{\mu\nu} + \varepsilon n^\mu n^\nu$.

Вспомним, что на границе $\delta g^{\mu\nu} = \delta g_{\mu\nu} = 0$, поэтому $n^\tau \varepsilon n^\mu n^\nu \nabla_\tau \delta g_{\mu\nu} = n^\tau \varepsilon n^\mu n^\nu \partial_\tau \delta g_{\mu\nu} = 0$. Здесь мы использовали тот факт, что частная производная от $\delta g_{\mu\nu}$ принадлежит гиперповерхности и раскладывается по ее базисным векторам e_τ, которые ортогональны вектору нормали n^τ.

Теперь, учитывая результат (1.4), мы можем выполнить преобразование свертки $N_\tau n^\tau$:

$$N_\tau n^\tau = n^\tau \left(f' g_{\lambda\eta} \nabla_\tau \delta g^{\lambda\eta} - g_{\lambda\eta} (\nabla_\tau f') \delta g^{\lambda\eta}\right) = -f' n^\tau (\varepsilon n^\mu n^\nu + h^{\mu\nu}) \nabla_\tau \delta g_{\mu\nu} = -f' n^\tau h^{\mu\nu} \nabla_\tau \delta g_{\mu\nu}$$

В итоге имеем

$$\oint N_\tau d\Sigma^\tau = -\oint \varepsilon f' n^\tau h^{\mu\nu} \nabla_\tau \delta g_{\mu\nu} \sqrt{|h|} d^3y.$$

Упражнение 7. Покажите, что $\oint M^\mu d\Sigma_\mu = 0$, воспользовавшись тем фактом, что раз $\delta g_{\mu\nu} = 0$ везде на границе, то и её касательные производные должны обращаться в ноль $\nabla_\tau \delta g_{\mu\nu} e^\tau_\alpha =$ а следовательно $h^{\mu\tau} \nabla_\tau \delta g_{\mu\nu} = 0$

□
Учитывая, что $\delta g^{\mu\nu} = 0$ на границе, запишем

$$M_\mu = g_{\mu\nu} f' \nabla_\xi \delta g^{\lambda\rho} = -g_{\mu\nu} f' g^{\nu\lambda} g^{\xi\eta} \nabla_\xi \delta g_{\lambda\eta} = -\delta^\lambda_\mu f' g^{\xi\eta} \nabla_\xi \delta g_{\lambda\eta},$$

где был снова использован результат (1.4). Теперь расписываем $n^\mu M_\mu$

$$n^\mu M_\mu = -f' n^m \left(\varepsilon n^\xi n^\eta + h^{\xi\eta}\right) \nabla_\xi \delta g_{\lambda\eta} = -n^m h^{\xi\eta} \nabla_\xi \delta g_{\lambda\eta} = 0,$$

так как $h^{\xi\eta} \nabla_\xi \delta g_{\lambda\eta}$ касательная производная от $\delta g_{\lambda\eta}$. ■

Тогда действие Эйнштейна-Гильберта в $f(R)$ имеет вид

$$\delta S_{EH} = \int d^4x \sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu} \left(-\frac{1}{2} g_{\mu\nu} f + f' R_{\mu\nu} + g_{\mu\nu} \Box f' - \nabla_\mu \nabla_\nu f' \right) - \\ - \oint \varepsilon f' n^\tau h^{\mu\nu} \nabla_\tau \delta g_{\mu\nu} \sqrt{|h|} d^3y. \quad (1.10)$$

Как мы можем видеть условия $\delta g^{\mu\nu} = 0$ на границе не достаточно, для того, что бы граничные члены обратились в ноль, следовательно действия Эйнштейна – Гильберта самого по себе не достаточно Поэтому вводят граничный член Гиббонса – Йорка – Хоукинга (S_{GYH}). Вариацию которого мы сейчас запишем.

Упражнение 8. Найдите вариацию свёртки второй фундаментальной формы (гауссова кривизна) $K = n^\mu_{;\mu}$.

□

$$K = n^\mu_{;\mu} = g^{\mu\nu} n_{\mu;\nu} = (\varepsilon n^\mu n^\nu + h^{\mu\nu}) n_{\mu;\nu} = h^{\mu\nu} n_{\mu;\nu} = h^{\mu\nu} \left(n_{\mu,\nu} - \Gamma^\gamma_{\mu\nu} n_\gamma \right).$$

Теперь варьируем по g и помня, что на границе $\delta g^{\mu\nu} = 0$, имеем

$$\delta K = -h^{\mu\nu} \delta \Gamma^\gamma_{\mu\nu} n_\gamma = -\frac{1}{2} h^{\mu\nu} (\delta g_{\mu\xi,\nu} + \delta g_{\nu\xi,\mu} - \delta g_{\mu\nu,\xi}) g^{\gamma\xi} n_\gamma = \frac{1}{2} h^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu,\xi} n^\xi. \quad (1.11)$$

■

Граничный член Гиббонса – Йорка – Хоукинга в $f(R)$ гравитации записывается следующим образом:

$$S_{GYH} = 2 \oint d^3y \varepsilon \sqrt{|h|} f'(R) K.$$

Используя (1.11) запишем его вариацию

$$\delta S_{GYH} = 2 \oint d^3y \varepsilon \sqrt{|h|} \left(f'' K \delta R + f' \delta K \right) = 2 \oint d^3y \varepsilon \sqrt{|h|} f'' K \delta R + \oint d^3y \varepsilon \sqrt{|h|} f' h^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu,\xi} n^\xi.$$

Как мы видим, второй интеграл "вылечивает"граничный член для действия Эйнштейна – Гильберта: для того, что бы занулить первый, необходимо будет положить на границе $\delta R = 0$.

Глава 2.

Основы линейной теории возмущений в ОТО

2.1. Пространственно-плоская метрика.

Рассмотрим пространственно-плоскую Вселенную Фридмана - Робертсона - Уокера. Линейный элемент можно записать как

$$ds^2 = a^2(t)\left(dt^2 - \delta_{ij}x^i x^j\right). \tag{2.1}$$

Здесь $a(t)$ -масштабный фактор, δ_{ij} - трехмерный символ Кронекера, латинские индексы i, j принимают значения $1, 2, 3$, и по одинаковым индесам происходит суммирование. Координаты x^i называются сопутствующими, они реализуют декартову систему координат в трехмерном пространстве.

Удобно ввести конформное время η, определенное соотношением

$$dt = a(t)d\eta \tag{2.2}$$

и переписать линейный элемент в виде

$$ds^2 = a^2(\eta)\left(d\eta^2 - \delta_{ij}x^i x^j\right). \tag{2.3}$$

Поскольку метрический тензор определен соотношением

$$ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu, \tag{2.4}$$

то выбрав $x^0 = \eta$, получаем выражение для ковариантных компонент метрического тензора

$$g_{\mu\nu} = a^2(\eta)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\delta_{ij} \end{pmatrix}. \tag{2.5}$$

Обратная матрица дает контравариантные компоненты метрического тензора

$$g^{\mu\nu} = \frac{1}{a^2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\delta_{ij} \end{pmatrix}. \tag{2.6}$$

Упражнение 9. Вычислить коэффициенты связности для случая пространственно-плоской Вселенной (2.3).

□

Коэффициенты связности находятся покомпонентно, прямым вычислением символов Кристоффеля

$$\Gamma^\mu_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}g^{\mu\gamma}\left(\frac{\partial g_{\gamma\alpha}}{\partial x^\beta} + \frac{\partial g_{\gamma\beta}}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\gamma}\right). \tag{2.7}$$

Диагональность метрического тензора и зависимость компонент метрического тензора только от конформного времени позволяют сильно упростить вычисления.

$$\Gamma^0_{00} = \mathcal{H}, \qquad \Gamma^i_{0j} = \mathcal{H}\delta_{ij}, \qquad \Gamma^0_{ij} = \mathcal{H}\delta_{ij}, \tag{2.8}$$

$$\Gamma^i_{00} \quad = \quad \Gamma^0_{0i} \quad = \quad \Gamma^i_{jk} \quad = \quad 0, \tag{2.9}$$

где $\mathcal{H} = a'/a$ и штрихом обозначается производная по конформному времени η.

■

Упражнение 10. Вычислить контравариантные компоненты тензора Риччи для случая пространственно-плоской метрики.

□
Так как
$$R_{\nu\beta} = \frac{\partial \Gamma^{\mu}{}_{\nu\beta}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial \Gamma^{\mu}{}_{\nu\mu}}{\partial x^{\beta}} + \Gamma^{\mu}{}_{\gamma\mu}\Gamma^{\gamma}{}_{\nu\beta} - \Gamma^{\mu}{}_{\gamma\beta}\Gamma^{\gamma}{}_{\nu\mu}, \tag{2.10}$$

а коэффициенты связности уже вычислены выше (2.8),(2.9), прямое вычисление приводит к выражениям

$$R_{00} = -3\mathcal{H}', \quad R_{0i} = 0, \quad R_{ij} = \left(\mathcal{H}' + 2\mathcal{H}^2\right)\delta_{ij} \ .$$

■

Упражнение 11. Вычислить смешанные компоненты тензора Риччи для случая пространственно-плоской метрики.

□
Так как
$$R^{\mu}{}_{\nu} = g^{\mu\sigma}R_{\sigma\nu}, \tag{2.11}$$

прямое вычисление приводит к выражениям

$$R^{0}{}_{0} = -\frac{3}{a^2}\mathcal{H}', \quad R^{0}{}_{i} = R^{i}{}_{0} = 0, \quad R^{i}{}_{j} = -\frac{1}{a^2}\left(\mathcal{H}' + 2\mathcal{H}^2\right)\delta^{i}{}_{j} \ . \tag{2.12}$$

■

Упражнение 12. Вычислить скалярную кривизну R для случая пространственно-плоской метрики.

□

$$R \equiv R^{\mu}{}_{\mu} = R^{0}{}_{0} + R^{i}{}_{i} = -\frac{6}{a^2}\left(\mathcal{H}' + \mathcal{H}^2\right) = -\frac{6}{a^2}\frac{a''}{a}. \tag{2.13}$$

■

Упражнение 13. Вычислить смешанные компоненты тензора Энштейна для случая пространственно-плоской метрики.

□
Тензор Эйнштейна имеет вид
$$G^{\mu}{}_{\nu} \equiv R^{\mu}{}_{\nu} - \frac{1}{2}\delta^{\mu}{}_{\nu}R. \tag{2.14}$$

Используя данные (2.12),(2.13), получаем

$$G_{0}{}^{0} = \frac{3}{a^2}\mathcal{H}^2 \ , \quad G^{i}{}_{0} = G^{0}{}_{i} = 0, \quad G^{i}{}_{j} = \frac{2\mathcal{H}' + \mathcal{H}^2}{a^2}\delta^{i}{}_{j} \ . \tag{2.15}$$

■

2.2. Разложение метрического тензора.

Рассматривая линейную теорию возмущений на фоне пространственно-плоской Вселенной, необходимо представить метрический тензор в виде

$$g_{\mu\nu}(\eta, x^i) = \bar{g}_{\mu\nu}(\eta) + \delta g_{\mu\nu}(\eta, x^i), \tag{2.16}$$

где фоновая метрика $\bar{g}_{\mu\nu}$ имеет вид ().

Малые возмущения $\delta g_{\mu\nu}$ метрического тензора удобно разделить на различные части: скалярные, векторные, тензорные согласно их трансформационным свойствам при преобразованиях координат на пространственных гиперповерхностях. Это разбиение впервые было предложено в работе Лифшица [18]. Причина такого разбиения заключается в том, что эти три типа возмущений метрики не взаимодействуют между собой в линеаризованных уравнениях для возмущений. Векторные возмущения в расширяющейся Вселенной как правило быстро распадаются, не приводя к наблюдаемым эффектам. Тензорные возмущения метрики описывают гравитационные волны, которые в первом порядке теории возмущений не взаимодействуют с неоднородностями давления и плотности энергии. Скалярные возмущения могут привести к росту неоднородностей плотности материи, что очень важно для описания формирования крупномасштабной структуры Вселенной.

Скалярные возмущения можно сконструировать из трехмерных скалярных функций, их производных, а также любых трехмерных фоновых величин - например, трехмерной фоновой метрики. В наиболее общем виде их можно записать с помощью четырех скалярных функций ϕ, ψ, B и E:

$$\delta g_{\mu\nu} = a^2(\eta) \begin{pmatrix} 2\phi & -B_{,i} \\ -B_{,i} & 2(\psi\delta_{ij} - E_{,ij}) \end{pmatrix}. \tag{2.17}$$

Здесь запятая обозначает частную производную по координатам, чьи индексы записаны справа от нее.

Любой вектор можно представить в виде суммы градиента от некоторой скалярной функции и вектора, дивергенция которого равна нулю. При построении чисто векторных возмущений поэтому необходимо использовать только векторы с нулевой дивергенцией. Рассмотрение векторных возмущений приводит к следующей метрике:

$$\delta g_{\mu\nu} = -a^2(\eta) \begin{pmatrix} 0 & -S_i \\ -S_i & F_{i,j} + F_{j,i} \end{pmatrix}, \tag{2.18}$$

где трехмерные векторы S_i, F_i имеют нулевую дивергенцию: ${S_i}^{,i} = {F_i}^{,i} = 0$. Здесь и далее тензорные индексы у трехмерных величин поднимаются и опускаются с помощью трехмерной метрики δ_{ij} (т.е. у них верхние и нихние индексы не отличаются).

Тензорные возмущения соответственно записываются с помощью одного тензора h_{ij}, который удовлетворяет равенству ${h_{ij}}^{,j} = 0$ и дополнительному условию поперечности ${h^i}_i = 0$. Они имеют вид:

$$\delta g_{\mu\nu} = -a^2(\eta) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & h_{ij} \end{pmatrix}. \tag{2.19}$$

Окончательно общая форма линейного элемента записывается как [12]:

$$\begin{aligned} ds^2 \;&=\; a^2(\eta) \left\{ (1+2\phi)d\eta^2 - 2(B_{,i} - S_i)d\eta dx^i - \right. \\ &\left. \left[(1-2\psi)\gamma_{ij} + 2E_{,ij} + 2F_{i,j} + h_{ij} \right] dx^i dx^j \right\}. \end{aligned} \tag{2.20}$$

Мы будем пока рассматривать только скалярные неоднородности на фоне пространственно - плоской Вселенной, т.е. линейный элемент запишем в виде [12]:

$$ds^2 = a^2(\eta)\left\{(1+2\phi)d\eta^2 - 2B_{,i}d\eta dx^i - \left[(1-2\psi)\delta_{ij} + 2E_{,ij}\right]dx^i dx^j\right\}. \tag{2.21}$$

2.3. Калибровочные преобразования координат.

Разбиение метрики на однородную и неоднородную части неоднозначно. В силу общей ковариантности, имеется свобода преобразования координат

$$\tilde{\eta} = \eta + \xi^0(\eta, \mathbf{x}), \qquad \tilde{x}^i = x^i + \xi^{,i}(\eta, \mathbf{x}) + \chi^i(\eta, \mathbf{x}), \tag{2.22}$$

где $\xi^0\,(\eta, \mathbf{x})$, $\xi\,(\eta, \mathbf{x})$ и $\chi^i\,(\eta, \mathbf{x})$ - малые скалярные функции, причем $\chi^i{}_{,i} = 0$. Функция ξ^0 определяет выбор пространственных гиперповерхностей постоянного конформного времени, а $\xi\,(\eta, \mathbf{x})$, $\chi^i\,(\eta, \mathbf{x})$ определяют выбор пространственных координат на этих гиперповерхностях. Преобразования (2.22) называются калибровочными.

Закон преобразования дифференциалов координат получается дифференцированием соотношений (2.22):

$$d\eta = d\tilde{\eta} - \xi^{0\prime}d\eta - \xi^0{}_{,i}d\tilde{x}^i, \tag{2.23}$$

$$dx^i = d\tilde{x}^i - \left(\xi^{,i\prime} + \chi^{i\prime}\right)d\tilde{\eta} - \left(\xi^{,i}{}_j + \chi^i{}_{,j}\right)d\tilde{x}^j, \tag{2.24}$$

где использован тот факт, что в силу малости преобразований $\xi^0(\eta, \mathbf{x}) = \xi^0(\tilde{\eta}, \tilde{\mathbf{x}})$, $\xi(\eta, \mathbf{x}) = \xi(\tilde{\eta}, \tilde{\mathbf{x}})$. Подставляя эти выражения в линейный элемент (2.19), получаем законы преобразования компонент возмущений метрики.

Тензорная часть возмущений метрики не меняется при калибровочных преобразованиях (2.22).

Векторные функции F_i, S_i преобразуются по правилу

$$\tilde{F}_i = F_i - \chi_i, \quad \tilde{S}_i = S_i - \chi_i{}'. \tag{2.25}$$

Закон преобразования скалярных неоднородностей метрики

$$\tilde{\phi} = \phi - \mathcal{H}\xi^0 - \xi^{0\prime}, \tag{2.26}$$

$$\tilde{\psi} = \psi + \mathcal{H}\xi^0, \tag{2.27}$$

$$\tilde{B} = B + \xi^0 - \xi', \tag{2.28}$$

$$\tilde{E} = E - \xi, \tag{2.29}$$

Векторные и скалярные возмущения метрики преобразуются независимо. В дальнейшем будем рассматривать только скалярные возмущения.

2.4. Преобразование скалярных и векторных величин.

При калибровочных преобразованиях меняются не только компоненты метрического тензора, но и скалярные и векторные величины. Любой скаляр f аналогично разложению (2.16) может быть представлен в виде $f\,(\eta, x^i) = \bar{f}(\eta) + \delta f(\eta, x^i)$. Поскольку фоновая функция $\bar{f}$ в теории возмущений фиксируется (она находится решением фоновых уравнений), при преобразованиях координат (2.20) возмущение скалярной величины преобразуются по правилу

$$\delta\tilde{f} = \delta f - \bar{f}'\xi^0 \tag{2.30}$$

Примерами скалярных величин являются плотность энергии ρ и давление P. (Имеется некоторая неточность в терминологии, которая может ввести в заблуждение, но к которой в космологии привыкли. Здесь подразумеваются величины обозначаемые ρ и P в тензоре энергии-импульса идеальной жидкости)

Упражнение 14. Получить закон преобразования (2.30).

□
В старых координатах

$$f\left(\eta, x^i\right) = \bar{f}(\eta) + \delta f(\eta, x^i) = \bar{f}(\tilde{\eta} - \xi^0(\eta, x^i)) + \delta f(\eta, x^i) = \bar{f}(\tilde{\eta}) - \bar{f}'\xi^0 + \delta f.$$

В новых координатах

$$\tilde{f}\left(\tilde{\eta}, \tilde{x}^i\right) = \bar{f}(\tilde{\eta}) + \delta\tilde{f}$$

Поскольку величина f является скаляром, левые части этих уравнений численно совпадают. Сравнением правых частей уравнений получаем (2.30). ■

Важным случаем векторных величин являются величины, определяемые при помощи трехмерного потенциала. Примером является четырехмерная скорость u^μ, в которой обычно проводят разбиение на потенциальную и вихревую составляющую:

$$u^i = \frac{1}{a}\left(v^{,i} + v^i\right), \tag{2.31}$$

где v - трехмерный потенциал скоростей, а v^i ($v^i_{,i} = 0$) - возмущение скорости. Четырехмерную скорость с точностью до членов, линейных по неоднородностям, соответственно можно представить в виде

$$u^\mu = \frac{1}{a}\left(1 - \phi,\ v^{,i} + v^i\right), \tag{2.32}$$

$$u_\mu = a\left(1 + \phi, -v_{,i} - v^i - B_{,i} + S_{,i}\right), \tag{2.33}$$

Упражнение 15. Показать что выражения (2.32), (2.33) следуют из (2.31) и условия нормировки $u^\mu u_\mu = 1$ для 4-скорости.

□
Ковариантные компоненты фоновой 4-скорости равны $u^\mu = \frac{1}{a}(1,0)$ (жидкость находится в состоянии покоя). Соответственно полная 4-скорость в линейной теории возмущений равна $u^\mu = \frac{1}{a}(1 - \lambda,\ v^{,i} + v^i)$, где λ - некоторая малая величина. Эта величина однозначно находится из условия нормировки. ■

Найдем закон преобразования трехмерных скоростей. Для этого используем точный закон преобразования 4-скорости при преобразованиях координат:

$$\tilde{u}^i = \frac{\partial\tilde{x}^i}{\partial x^\mu}u^\mu, \tag{2.34}$$

Подставляя сюда (2.22) и оставляя только линейные по неоднородностям слагаемые, получаем

$$\tilde{u}^i = \frac{1}{a}\left(\xi^{,i\prime} + v^{,i} + \chi^{i\prime} + v^i\right) = \frac{1}{a}\left(\tilde{v}^{,i} + \tilde{v}^i\right). \tag{2.35}$$

Сравнение дает законы преобразования

$$\tilde{v} = v + \xi', \tag{2.36}$$
$$\tilde{v}^i = v^i + \chi^{i\prime}. \tag{2.37}$$

2.5. Наиболее часто используемые калибровочные условия.

Как было показано ранее, разбиение метрики на однородную и неоднородную части неоднозначно. Калибровочные преобразования (2.20) позволяют упростить линейный элемент (2.19) путем выбора подходящего пространственно - подобного сечения и координат на нем. Здесь мы опишем несколько наиболее часто используемых калибровочных условий для скалярных возмущений. Более подробный обзор калибровок можно найти в работе [11].

2.5.1. Продольная калибровка.

Эту калибровку также называют конформно-ньютоновской. Она задается условиями $B = E = 0$. Эти условия полностью фиксируют выбор координат. Переход в продольную калибровку осуществляется преобразованиями

$$\eta \to \eta_L = \eta - (B - E') \ , \ x^i \to x^i_L = x^i + \gamma^{ij} E_{|j}. \tag{2.38}$$

Линейный элемент метрики приобретает вид

$$ds^2 = a^2(\eta) \left[(1 + 2\phi_L)\, d\eta^2 - (1 - 2\psi_L)\, \gamma_{ij} dx^i dx^j \right]. \tag{2.39}$$

В случае, если пространственная часть возмущений тензора энергии-импульса является диагональной, получаем

$$\phi_L = \psi_L. \tag{2.40}$$

Из величин ϕ, ψ, B, E можно составить комбинации, которые не изменяются при калибровочных преобразованиях. Например, часто используются величины [12]:

$$\Phi = \phi + \frac{1}{a} \left[(B - E')\, a \right]' \ , \ \Psi = \psi - \frac{a'}{a} (B - E'), \tag{2.41}$$

которые впервые были введены Бардиным (Bardeen) [1]. Калибровочно - инвариантные величины Φ, Ψ не зависят от выбора системы координат и в продольной калибровке совпадают с величинами ϕ_L , ψ_L соответственно.

2.5.2. Калибровка постоянной кривизны.

Эту калибровку называют также внедиагональной. В ней на выбранной пространственной гиперповерхности трехмерная метрика однородна, что требует $\psi = E = 0$. Соответствующее калибровочное преобразование имеет вид:

$$\xi^0_{UC} = -\frac{\psi}{\mathcal{H}} \ , \ \xi_{UC} = E. \tag{2.42}$$

Оставшиеся степени свободы метрического тензора описываются величинами

$$\phi_{UC} = \phi + \psi + \left(\frac{\psi}{\mathcal{H}}\right)', \tag{2.43}$$

$$B_{UC} = B - E' - \frac{\psi}{\mathcal{H}}. \tag{2.44}$$

Эти величины также являются калибровочно-инвариантными и были обозначены $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ в работе [6].

В некоторых случаях оказывается более удобным использовать эти переменные вместо переменных Φ и Ψ. Например, если рассчитывается эволюция возмущений во время сжатия в модели "перед Большим Взрывом возмущения $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ остаются малыми даже если Φ и Ψ становятся большими (см. например [3]). Возмущения скалярного поля в калибровке постоянной кривизны в силу закона преобразования (2.30) равны

$$\delta\varphi_{UC} = \delta\varphi + \varphi' \frac{\psi}{\mathcal{H}} \tag{2.45}$$

и совпадают с калибровочно-инвариантной переменной Сасаки - Муханова [12].

2.5.3. Сопутствующая ортогональная калибровка.

Предположим, что материя во Вселенной может рассматриваться как идеальная жидкость. Сопутствующая ортогональная калибровка определяется таким образом, чтобы потенциал скоростей жидкости была равен нулю $v_C = 0$. Ортогональность гиперповерхностей постоянного времени к четырехмерной скорости требует выполнения условия $B = 0$. Такая калибровка часто используется при рассмотрении возмущений в радиационно - доминированной и пылевидно - доминированной Вселенной. Из уравнений (2.28) и (2.36) получаем соответствующее калибровочное преобразование:

$$\xi^0_C = -\left(v + B\right), \tag{2.46}$$

$$\xi_C = -\int v d\eta + \hat{\xi}(x^i), \tag{2.47}$$

где $\hat{\xi}(x^i)$ отражает оставшийся произвол преобразования пространственных координат. Все трехмерные скаляры не зависят от этой остаточной свободы в выборе координат. Скалярные возмущения метрики равны:

$$\phi_C = \phi + \frac{[(v + B)a]'}{a} \quad , \tag{2.48}$$

$$\psi_C = \psi - \mathcal{H}\left(v + B\right), \tag{2.49}$$

$$E_C = E + \int v d\eta - \hat{\xi}. \tag{2.50}$$

Калибровочно-инвариантная величина ψ_C впервые была использована в работе В.Н. Лукаша [8]. В работе Д.Х. Лиса (Lyth) [9] она получила обозначение $\mathcal{R}$, которое в настоящее время широко используется. Используя уравнения Эйнштейна можно получить соотношение

$$v + B = \frac{\mathcal{H}\phi + \psi'}{\mathcal{H}' - \mathcal{H}^2}, \tag{2.51}$$

из которого потенциал скорости выражается через возмущения метрики. Величину $\mathcal{R}$ можно записать в терминах калибровочно-инвариантных величин Φ и Ψ:

$$\mathcal{R} = \Psi - \frac{\mathcal{H}(\mathcal{H}\Phi + \Psi')}{\mathcal{H}' - \mathcal{H}^2}, \tag{2.52}$$

которая при $\Phi = \Psi$ совпадает с величиной, обозначенной ζ в обзоре [12].

2.6. Тензор Риччи для скалярных неоднородностей.

Рассмотрим пространственно-плоскую вселенную с неоднородностями скалярного типа. Метрический тензор, соответсвующий линейному элементу (2.21), имеет вид

$$g_{\mu\nu} = a^2(\eta) \begin{pmatrix} 1 + 2\phi & -B_{|i} \\ -B_{|i} & -\{(1-2\psi)\delta_{ij} + 2E_{|ij}\} \end{pmatrix}. \tag{2.53}$$

$$g^{\mu\nu} = \frac{1}{a^2(\eta)} \begin{pmatrix} 1 - 2\phi & -B_{|i} \\ -B_{|i} & -\{(1+2\psi)\delta_{ij} - 2E_{|ij}\} \end{pmatrix}. \tag{2.54}$$

Символы Кристоффеля для фоновой метрики уже посчитаны и даются выражениями (2.8), (2.9). Для нахождения тензора Риччи необходимо еще посчитать возмущения коэффициентов связности.

Упражнение 16. Найти возмущения коэффициентов Кристоффеля в метрике (2.53) - (2.54).

□

Варьированием (2.7) получаем

$$\delta\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\delta g^{\mu\gamma}\left(\frac{\partial g_{\gamma\alpha}}{\partial x^\beta} + \frac{\partial g_{\gamma\beta}}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\gamma}\right) + \frac{1}{2}g^{\mu\gamma}\left(\frac{\partial \delta g_{\gamma\alpha}}{\partial x^\beta} + \frac{\partial \delta g_{\gamma\beta}}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial \delta g_{\alpha\beta}}{\partial x^\gamma}\right). \tag{2.55}$$

Перебирая возможные комбинации индексов, прямым вычислением этого выражения находим

$$\delta\Gamma^0_{00} = \phi' \tag{2.56}$$
$$\delta\Gamma^0_{0i} = \phi_{,i} + \mathcal{H}B_{,i}\ , \tag{2.57}$$
$$\delta\Gamma^0_{ij} = -(2\mathcal{H}(\phi+\psi) + \psi')\delta_{ij} - (B - 2\mathcal{H}E - E')_{,ij}\ , \tag{2.58}$$
$$\delta\Gamma^i_{00} = \phi^{,i} + \mathcal{H}B^{,i} + (B^{,i})'\ , \tag{2.59}$$
$$\delta\Gamma^i_{0j} = -\psi'\delta^i_j + (E_{,j}^{\ ,i})'\ , \tag{2.60}$$
$$\delta\Gamma^i_{jk} = \delta_{jk}\psi^{,i} - \delta^i{}_k\psi_{,j} - \delta^i{}_j\psi_{,k} - \mathcal{H}B^{,i}\delta_{jk} + (E^i{}_{,j,k} + E^i{}_{,k,j} - E_{jk}^{\ ,i}). \tag{2.61}$$

■

Фоновые компоненты тензора Риччи также уже посчитаны и даются выражениями (2.11),(2.12).

Упражнение 17. Найти возмущения ковариантных компонент тензора Риччи.

□

Вычисления проводятся покомпонентно с использованием ранее полученных результатов согласно выражениям

$$\delta R_{00}=\frac{\partial\delta\Gamma^{\mu}{}_{00}}{\partial x^{\mu}}-\frac{\partial\delta\Gamma^{\mu}{}_{0\mu}}{\partial x^{0}}+\Gamma^{\mu}{}_{\gamma\mu}\delta\Gamma^{\gamma}{}_{00}+\delta\Gamma^{\mu}{}_{\gamma\mu}\Gamma^{\gamma}{}_{00}-\Gamma^{\mu}{}_{\gamma 0}\delta\Gamma^{\gamma}{}_{0\mu}-\delta\Gamma^{\mu}{}_{\gamma 0}\Gamma^{\gamma}{}_{0\mu},$$

$$\delta R_{0i}=\frac{\partial\delta\Gamma^{\mu}{}_{0i}}{\partial x^{\mu}}-\frac{\partial\delta\Gamma^{\mu}{}_{0\mu}}{\partial x^{i}}+\Gamma^{\mu}{}_{\gamma\mu}\delta\Gamma^{\gamma}{}_{0i}+\delta\Gamma^{\mu}{}_{\gamma\mu}\Gamma^{\gamma}{}_{0i}-\Gamma^{\mu}{}_{\gamma i}\delta\Gamma^{\gamma}{}_{0\mu}-\delta\Gamma^{\mu}{}_{\gamma i}\Gamma^{\gamma}{}_{0\mu},$$

$$\delta R_{ji}=\frac{\partial\delta\Gamma^{\mu}{}_{ji}}{\partial x^{\mu}}-\frac{\partial\delta\Gamma^{\mu}{}_{j\mu}}{\partial x^{i}}+\Gamma^{\mu}{}_{\gamma\mu}\delta\Gamma^{\gamma}{}_{ji}+\delta\Gamma^{\mu}{}_{\gamma\mu}\Gamma^{\gamma}{}_{ji}-\Gamma^{\mu}{}_{\gamma i}\delta\Gamma^{\gamma}{}_{j\mu}-\delta\Gamma^{\mu}{}_{\gamma i}\Gamma^{\gamma}{}_{j\mu}.$$

Результат вычислений

$$\delta R_{00} = \phi^{,k}_{\ k}+\mathcal{H}B^{,k}_{\ k}+(B^{,k}_{\ k})'+3\psi''-(E_{,k}^{\ k})''+3\mathcal{H}\phi'+3\mathcal{H}\psi'-\mathcal{H}(E_{,k}^{\ k})' \tag{2.62}$$

$$\delta R_{0i} = \left[\left(\frac{a''}{a}+\mathcal{H}^2\right)B+2\mathcal{H}\phi+2\psi'\right]_{,i}. \tag{2.63}$$

$$\begin{aligned}\delta R_{ji} = {} & \left\{-\mathcal{H}\phi'-5\mathcal{H}\psi'+\mathcal{H}(E_{,k}^{\ k})'-4\mathcal{H}^2(\phi+\psi)-\psi''-2\mathcal{H}'(\phi+\psi)+\psi_{,k}^{\ k}-\mathcal{H}B_{,k}^{\ k}\right\}\delta_{ij}\\ & +\left[-B'+2\mathcal{H}'E+2\mathcal{H}E'+E''-\phi+\psi-2\mathcal{H}B+4\mathcal{H}^2E\right]_{,ij}.\end{aligned} \tag{2.64}$$

■

Упражнение 18. Найти возмущения смешанных компонент тензора Риччи.

□

Поскольку $R^{\mu}_{\ \nu}=g^{\mu\sigma}R_{\sigma\nu}$, для вычисления возмущений можно использовать

$$\delta R^{\mu}_{\nu}=\delta g^{\mu\sigma}R_{\sigma\nu}+g^{\mu\sigma}\delta R_{\sigma\nu} \tag{2.65}$$

Результат вычислений

$$\begin{aligned}\delta R^0_0 = {} & -\frac{1}{a^2}[6\mathcal{H}^2\phi-6\frac{a''}{a}\phi+k^2\phi-3\mathcal{H}\phi'+k^2(B'+\mathcal{H}B)\\ & -3\psi''-3\mathcal{H}\psi'-k^2E''-k^2\mathcal{H}E'],\end{aligned} \tag{2.66}$$

$$\delta R^0{}_i = \frac{2}{a^2}\left[\mathcal{H}\phi+\psi'\right]_{,i}, \tag{2.67}$$

$$\begin{aligned}\delta R^i{}_j = {} & -\frac{1}{a^2}\left[-\mathcal{H}\phi'-5\mathcal{H}\psi'+\mathcal{H}(E_{,k}^{\ k})'-4\mathcal{H}^2\phi-\psi''-2\mathcal{H}'\phi+\psi_{,k}^{\ k}-\mathcal{H}B_{,k}^{\ k}\right]\delta^i_j\\ & -\frac{1}{a^2}\left[2\mathcal{H}(E'-B)+E''-B'-\phi+\psi\right]_{,\ j}^{\ i},\end{aligned} \tag{2.68}$$

■

Упражнение 19. Найти $\delta R^k{}_k$ и возмущения скалярной кривизны.

□

Прямое вычисление дает

$$\begin{aligned}\delta R^k{}_k = {} & \frac{1}{a^2}\Big[3\mathcal{H}\phi'+15\mathcal{H}\psi'+3\psi''+(6\mathcal{H}'+12\mathcal{H}^2-k^2)\phi\\ & +4k^2\psi+k^2(E''-B')+5k^2\mathcal{H}(E'-B)\Big],\end{aligned} \tag{2.69}$$

$$\begin{aligned}\delta R = {} & \frac{2}{a^2}\Big[\left\{9\mathcal{H}(\psi'+\mathcal{H}\phi)+3k^2\mathcal{H}(E'-B)\right\}\\ & +\left\{3(\psi'+\mathcal{H}\phi)+k^2(E'-B)\right\}'+\left(3\mathcal{H}'-3\mathcal{H}^2-k^2\right)\phi+2k^2\psi\Big]\end{aligned} \tag{2.70}$$

■

Упражнение 20. Вычислить возмущения тензора Энштейна.

□

Возмущения тензора Эйнштейна удобно считать в смешанных компонентах:

$$G^{\mu}{}_{\nu} = \delta R^{\mu}{}_{\nu} - \frac{1}{2}\delta^{\mu}{}_{\nu}\delta R.$$

. Используя полученные выше результаты, записываем

$$\delta G^{0}{}_{0} = \frac{2}{a^2}\{-3\mathcal{H}\left(\mathcal{H}\phi + \psi'\right) + \nabla^2\left[\psi - \mathcal{H}\left(B - E'\right)\right]\}, \tag{2.71}$$

$$\delta G^{0}{}_{i} = \frac{2}{a^2}\{\mathcal{H}\phi + \psi'\}_{,i}\ , \tag{2.72}$$

$$\delta G^{i}{}_{j} = -\frac{2}{a^2}\left\{\left[\left(2\mathcal{H}' + \mathcal{H}^2\right)\phi + \mathcal{H}\phi' + \psi'' + 2\mathcal{H}\psi' + \frac{1}{2}\nabla^2 D\right]\delta^{i}{}_{j} - \frac{1}{2}\gamma^{ik}D_{,kj}\right\}, \tag{2.73}$$

где

$$D = (\phi - \psi) + 2\mathcal{H}\left(B - E'\right) + \left(B - E'\right)' \equiv \Phi - \Psi\ .$$

■

2.7. Идеальная жидкость.

Часто материю приходится описывать в гидродинамических терминах, таких как плотность, давление, скорость и т.д. Простейшей векторной величиной в таком случае является четырехмерная скорость. Тогда единственными величинами, из которых можно составить тензор энергии-импульса материи, являются метрический тензор $g_{\mu\nu}$ и 4-скорость u^{μ}. Самая простая возможная комбинация - тензор вида

$$f_1 u^{\mu} u^{\mu} + f_2 g_{\mu\nu}, \tag{2.74}$$

где f_1 и f_2 - некоторые скалярные функции. Вводя новые величины ρ и P согласно $f_1 = \rho + P$, $f_2 = -P$, получим

$$T^{\mu}_{\ \nu} = (\rho + P)\, u^{\mu} u_{\nu} - P\delta^{\mu}{}_{\nu}. \tag{2.75}$$

В системе покоя материи получаем выражение

$$\begin{pmatrix} \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -P & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -P & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -P \end{pmatrix}. \tag{2.76}$$

Это тензор энергии-импульса покоящейся жидкости плотносью ρ и с давлением P. Тензор (2.75) называется тензором энергии-импульса идеальной жидкости.

Разделение плотности и давления на однородную и неоднородную части дает

$$
\begin{aligned}
T^0_{\ 0} &= (\rho + \delta\rho)\,, && (2.77)\\
T^0_{\ i} &= -(\rho + p)\,(B_{,i} + v_{,i})\,, && (2.78)\\
T^i_{\ 0} &= (\rho + p)\,v_{,}^{\ i}, && (2.79)\\
T^j_{\ i} &= -(p + \delta p)\,\delta^j_{\ i}. && (2.80)
\end{aligned}
$$

Упражнение 21. Записать фоновые уравнения Эйнштейна для случая идеальной жидкости.

□

Смешанные компоненты фонового тензора Эйнштейна даются выражениями (2.15), соответствующие компоненты фонового тензора энергии-импульса идеальной жидкости являются компонентами матрицы (2.76). Подставляя в

$$G^\mu_\nu = \kappa^2 T^\mu_\nu, \tag{2.81}$$

получаем два (различных) уравнения

$$
\begin{aligned}
\mathcal{H}^2 &= \frac{\kappa^2}{3} a^2 \rho, && (2.82)\\
2\mathcal{H}' + \mathcal{H}^2 &= -\kappa^2 a^2 P. && (2.83)
\end{aligned}
$$

■

Динамические уравнения для жидкости можно получить из законов сохранения

$$T^{\mu\nu}_{\ \ ;\nu} = 0. \tag{2.84}$$

Упражнение 22. Показать справедливость (2.84) в ОТО.

□

В силу (2.84) надо показать, что $G^{\mu\nu}_{\ \ ;\nu} = 0$. Это соотношение является другой записью соотношения

$$R^\mu_{\ \nu;\mu} = \frac{1}{2}\frac{\partial R}{\partial x^\nu},$$

которое следует из тождества Бианки. ■

Упражнение 23. Расписать уравнение $T^{0\nu}_{\ \ ;\nu} = 0$ (закон сохранения энергии) для однородного случая.

□

Проще всего провести вычисления, используя тождество, справедливое для любого тензора $A^{\mu\nu}$:

$$A^{\mu\nu}_{\ \ ;\nu} = \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial(\sqrt{-g}A^{\mu\nu})}{\partial x^\nu} \tag{2.85}$$

Контравариантные компоненты фонового тензора энергии-импульса известны, вычисления дают

$$\rho' = -3\mathcal{H}\,(\rho + p)\,. \tag{2.86}$$

■

Уравнения $T^{i\nu}{}_{;\nu} = 0$ (закон сохранения импульса) для фона удовлетворяется тождественно.

С учетом неоднородностей и с использованием тождества (2.85), линеаризация (2.84) приводит к уравнениям

$$\delta\rho' + 3\mathcal{H}\left(\delta\rho + \delta P\right) = \left(\rho + P\right)\left(3\psi' + k^2\left(v + E'\right)\right), \tag{2.87}$$

$$\left[\left(\rho + P\right)\left(v + B\right)\right]' + \delta P = -\left(\rho + P\right)\left(\phi + 4\mathcal{H}\left(v + B\right)\right). \tag{2.88}$$

2.8. Скалярное поле.

В простейших моделях инфляции материя описывается одним скалярным полем с действием

$$S = \int \left[\frac{1}{2}\varphi^{;\mu}\varphi_{;\mu} - V(\varphi)\right]\sqrt{-g}d^4x, \tag{2.89}$$

где V(φ) - потенциал скалярного поля.

Тензор энергии-импульса скалярного поля имеет вид

$$T^{\mu}_{\ \nu} = \varphi^{;\mu}\varphi_{;\nu} - \left(\frac{1}{2}\varphi^{;\mu}\varphi_{;\mu} - V(\varphi)\right)\delta^{\mu}_{\ \nu}. \tag{2.90}$$

Упражнение 24. Выведете выражение (2.90).

□

Выражение получается прямым вычислением вариационной производной

$$T_{\mu\nu} = \frac{2}{\sqrt{-g}}\frac{\delta S}{\delta g^{\mu\nu}}. \tag{2.91}$$

■

Представим скалярное поле в виде суммы однородного фонового поля и малого возмущения:

$$\varphi = \varphi_0(\eta) + \delta\varphi(\eta, \mathbf{x}). \tag{2.92}$$

Упражнение 25. Запишите выражение для фононовой части тензора энергии-импульса скалярного поля.

□

Фоновая часть тензора энергии-импульса имеет вид

$$\bar{T}^0_0 = \frac{1}{2a^2}\varphi_0^{2\prime} + V\left(\varphi_0\right) = \rho, \tag{2.93}$$

$$\bar{T}^0_i = 0, \tag{2.94}$$

$$\bar{T}^i_j = \left[-\frac{1}{2a^2}\varphi_0^{2\prime} + V\left(\varphi_0\right)\right]\delta^i_j = -P\delta^i_j. \tag{2.95}$$

■

Упражнение 26. Получите выражения для возмущений первого порядка малости тензора энергии-импульса скалярного поля.

□

$$\delta T^0_{\ 0} = \frac{1}{a^2}\left[-\varphi_0^{2\prime}\phi + \varphi_0{}'\delta\varphi' + V_{,\varphi}a^2\delta\varphi\right] = \delta\rho, \tag{2.96}$$

$$\delta T^i_{\ j} = \frac{1}{a^2}\left[\varphi_0^{2\prime}\phi - \varphi_0{}'\delta\varphi' + V_{,\varphi}a^2\delta\varphi\right]\delta^i{}_j = -P\delta^i{}_j, \tag{2.97}$$

$$\delta T^0_{\ i} = \frac{1}{a^2}\varphi_0{}'\delta\varphi_{,i}. \tag{2.98}$$

■

Уравнение Клейна-Гордона для скалярного поля можно получить либо из закона сохранения тензора энергии-импульса $T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0$, либо напрямую из вариационного принципа. Для фонового поля получаем уравнение

$$\varphi_0'' + 2\mathcal{H}\varphi_0' + a^2V_{,\varphi} = 0, \tag{2.99}$$

а для возмущений соответствующим уравнением будет

$$\delta\varphi'' + 2\mathcal{H}\delta\varphi' - \nabla^2\delta\varphi + a^2V_{,\varphi\varphi}\delta\varphi + 2a^2V_{,\varphi}\phi - \varphi_0'\phi' - \varphi_0'\left[3\psi' - \nabla^2\left(E' - B\right)\right] = 0. \tag{2.100}$$

Упражнение 27. Записать фоновые уравнения Эйнштейна для случая скалярного поля.

□
Обычно используют комбинацию уравнений Эйнштейна для фона

$$\mathcal{H}^2 = \frac{\kappa^2}{3}\left[\varphi_0^{2\prime} + a^2V\left(\varphi_0\right)\right], \tag{2.101}$$

$$\mathcal{H}' = -\frac{\kappa^2}{2}\varphi_0{}'\delta\varphi. \tag{2.102}$$

■

Упражнение 28. Записать возмущенные уравнения Эйнштейна для случая скалярного поля.

□
Уравнения Эйнштейна для неоднородностей принимают вид:

$$3\mathcal{H}\left(\mathcal{H}\phi + \psi'\right) - \nabla^2\left[\psi - \mathcal{H}\left(B - E'\right)\right] = -\frac{\kappa^2}{2}\left(-\varphi_0^{2\prime}\phi + \varphi_0'\delta\varphi' + V_{,\varphi}a^2\delta\varphi\right), \tag{2.103}$$

$$\psi'' + 2\mathcal{H}\psi' + \mathcal{H}\phi' + \left(2\mathcal{H}' + \mathcal{H}^2\right)\phi = -\frac{\kappa^2}{2}\left(\varphi_0^{2\prime}\phi - \varphi_0'\delta\varphi' + V_{,\varphi}a^2\delta\varphi\right), \tag{2.104}$$

$$\psi' + \mathcal{H}\phi = \frac{\kappa^2}{2}\varphi_0'\delta\varphi, \tag{2.105}$$

$$(\phi - \psi) + 2\mathcal{H}(B - E') + (B - E')' = 0. \tag{2.106}$$

■

2.8.1. Величины, сохраняющиеся на больших масштабах.

Рассмотрим эволюцию сопутствующей кривизны $\mathcal{R}$ в модели с одним скалярным полем φ. Здесь удобно проводить рассмотрение в физическом времени.

Для сопутствующей кривизны имеем выражение

$$\mathcal{R} \equiv \psi_C = \psi + \frac{H}{\dot\varphi}\delta\varphi, \tag{2.107}$$

где последнее равенство справедливо в силу того, что в сопутствующей ортогональной калибровке $\delta\varphi_C = 0$.

Из выписанных выше уравнений Эйнштейна, а именно из пары уравнений

$$\dot H = -\frac{\kappa^2}{2}\dot\varphi_0^2, \qquad \dot\psi + H\phi = \frac{\kappa^2}{2}\dot\varphi_0\delta\varphi$$

следует, что

$$\delta\varphi = -\frac{\dot\varphi_0}{\dot H}(\dot\psi + H\phi) \tag{2.108}$$

и

$$\mathcal{R} = \psi - \frac{H(\dot\psi + H\phi)}{\dot H}. \tag{2.109}$$

Продифференцируем по времени (2.109). Получаем:

$$\dot{\mathcal{R}} = \dot\psi + \left(\frac{H}{\dot\varphi}\right)\dot{\delta\varphi} + \left(\frac{\dot H}{\dot\varphi} - \frac{\ddot\varphi H}{\dot\varphi^2}\right)\delta\varphi = \dot\psi + \frac{1}{\dot\varphi}\left\{H\dot{\delta\varphi} + \left(\dot H - \frac{\ddot\varphi H}{\dot\varphi}\right)\delta\varphi\right\}$$

$$= \dot\psi + \frac{1}{\dot\varphi}\left\{H\dot{\delta\varphi} + \left(-4\pi G\dot\varphi^2 - \frac{\ddot\varphi H}{\dot\varphi}\right)\delta\varphi\right\} = \dot\psi - 4\pi G\dot\varphi\delta\varphi + \frac{H}{\dot\varphi^2}\left\{\dot\varphi\dot{\delta\varphi} - \ddot\varphi\delta\varphi\right\}$$

$$= -H\phi + \frac{H}{\dot\varphi^2}\left\{\dot\varphi\dot{\delta\varphi} - \ddot\varphi\delta\varphi\right\} = \frac{H}{\dot\varphi^2}\left\{\dot\varphi\dot{\delta\varphi} - \dot\varphi^2\phi - \ddot\varphi\delta\varphi\right\} = \frac{H}{\dot\varphi^2}\left\{\delta\rho - 3H\delta q\right\},$$

где $\delta\rho$ и δq равны:

$$\delta\rho = \dot\varphi\dot{\delta\varphi} - \dot\varphi^2\phi + V_{,\varphi}\delta\varphi, \tag{2.110}$$

$$\delta q = \dot\varphi\delta\varphi. \tag{2.111}$$

Калибровочно-инвариантная величина ϵ_m

$$\epsilon_m \equiv \delta\rho - 3H\delta q = \dot\varphi\dot{\delta\varphi} - \dot\varphi^2\phi - \ddot\varphi\delta\varphi. \tag{2.112}$$

равна возмущениям плотности в сопутствующей калибровке. Уравнения (2.103) и (2.105) дают соотношение

$$\frac{-k^2}{a^2}\left[\psi + H(a^2\dot E - aB)\right] \equiv \frac{-k^2}{a^2}\Psi = 4\pi G\epsilon_m, \tag{2.113}$$

т.е.

$$\dot{\mathcal{R}} = \frac{H}{\dot\varphi^2}\left\{\dot\varphi\dot{\delta\varphi} - \dot\varphi^2\phi - \ddot\varphi\delta\varphi\right\} = -\frac{H}{4\pi G\dot\varphi^2}\frac{k^2}{a^2}\Psi = \frac{H}{\dot H}\frac{k^2}{a^2}\Psi. \tag{2.114}$$

Как видно из этого уравнения, при условии ограниченности потенциала Ψ для длинноволновых неоднородностей возмущения сопутствующей кривизны сохраняются.

2.8.2. Квадратичное действие для неоднородностей.

Рассмотрим, действие для неоднородностей во втором порядке малости, используя стандартные обозначения Ландау-Лифшица. Действие для модели имеет вид

$$S = \int \left\{ -\frac{R}{16\pi G} + \frac{1}{2}\varphi_{,\mu}\varphi^{,\mu} - V(\varphi) \right\} \sqrt{-g} d^4x. \tag{2.115}$$

Разложение действия в ряд теории возмущений является трудоемкой процедурой, поэтому удобно фиксировать калибровку. Хорошим выбором является условие $\delta\phi = 0$. В этой калибровке пространственная метрика диагональна (тензорные неоднородности не учитываем)

$$h_{ij} = a^2(t)e^{2\mathcal{R}}\delta_{ij}. \tag{2.116}$$

Метод впервые был предложен в работе [10](простое и очень ясное изложение подробностей метода можно найти в работе [16]). Сегодня этот метод применяется для вывода кубичных поправок к действию ([10]) и даже поправок 4-го порядка. Ограничиваясь квадратичными поправками получаем

$$S_2 = \frac{1}{2}\int dt d^3x \frac{\dot{\varphi}^2}{H^2}\left[a^3\dot{\mathcal{R}}^2 - a(\partial\mathcal{R})^2\right] . \tag{2.117}$$

Можно сделать замену переменной $v = z\mathcal{R}$, где $z = \frac{a\varphi_0'}{\mathcal{H}}$ и учесть что

$$z^2\mathcal{R}'^2 = z^2\left(\frac{v'}{z} - \frac{z'}{z^2}v\right)^2 = v'^2 + \frac{z'^2}{z^2}v^2 - 2\frac{z'}{z}vv' = v'^2 - \left(z'\frac{v^2}{z}\right)' + \frac{z''}{z}v^2.$$

Тогда действие переписывается как

$$S_2 = \frac{1}{2}\int \left(v'^2 - v_{,i}v_{,i} + \frac{z''}{z}v^2\right) d\eta d^3x. \tag{2.118}$$

В такой форме записи очевидно, что действие для неоднородностей имеет вид действия для скалярного поля. Физический смысл калибровочно-инвариантной величины v ясен:

$$v = aQ = a\delta\varphi_{UC}. \tag{2.119}$$

Кроме того, прямым варьированием действия получаем, что уравнение движения для переменной v имеет вид

$$\Box v - \frac{z''}{z}v = 0. \tag{2.120}$$

Глава 3.

Линейные неоднородности в $f(R)$ гравитации

3.1. Уравнения Энштейна для возмущений в $f(R)$ гравитации

Рассматриваем действие вида

$$S = \frac{1}{2\kappa^2}\int d^4x\sqrt{-g}f(R) + S_m\ .$$

Варьиррование по метрическим коэффициентам прямо приводит к точным уравнениям Эйнштейна

$$f_R R^\mu_\nu - \frac{1}{2}f\delta^\mu_\nu + (f_R)^{;\alpha}_{;\alpha}\delta^\mu_\nu - (f_R)^{;\mu}_{;\nu} = \kappa^2 T^\mu_\nu. \tag{3.1}$$

где $f_R \equiv \frac{df(R)}{dR}$.

Уравнения Эйнштейна для неоднородностей получаем обычным образом:

$$\delta f_R R^\mu{}_\nu + f_R\delta R^\mu{}_\nu - \frac{1}{2}\delta f\delta^\mu{}_\nu + \delta(f_R{}^{;\alpha}{}_\alpha)\delta^\mu{}_\nu - \delta(f_R{}^{;\mu}{}_\nu) = \kappa^2\delta T^\mu{}_\nu. \tag{3.2}$$

Учтем что $\delta f = f_R\delta R$ и, чтобы не за загромождать выражения, введем переобозначение $F \equiv f_R$. Уравнения Эйнштейна принимают вид

$$\delta F R^\mu{}_\nu + F\delta R^\mu{}_\nu - \frac{1}{2}F\delta R\delta^\mu{}_\nu + \delta(F^{;\alpha}{}_\alpha)\delta^\mu{}_\nu - \delta(F^{;\mu}{}_\nu) = \kappa^2\delta T^\mu{}_\nu. \tag{3.3}$$

Поскольку выражения для возмущений тензора Риччи и скалярной кривизны выписаны в предыдущей главе, для записи возмущенных уравнений Эйнштейна необходимо посчитать величины $\delta(F^{;\mu}_{\ \nu})$.

Используем формальное выражение для второй ковариантной производной

$$F_{;\mu}{}^{\nu} = g^{\nu\sigma}f_{,\mu\sigma} - g^{\nu\sigma}\Gamma^\lambda_{\mu\sigma}F_{,\lambda} \tag{3.4}$$

и следующее из него выражение для возмущения этой производной

$$\delta(F_{;\mu}{}^{\nu}) = \delta g^{\nu\sigma}F_{,\mu\sigma} + g^{\nu\sigma}\delta F_{,\mu\sigma} - \delta g^{\nu\sigma}\Gamma^\lambda_{\mu\sigma}F_{,\lambda} - g^{\nu\sigma}\delta\Gamma^\lambda_{\mu\sigma}F_{,\lambda} - g^{\nu\sigma}\Gamma^\lambda_{\mu\sigma}\delta F_{,\lambda}\ . \tag{3.5}$$

Быстрый подсчет дает

$$\delta(F_{;0}{}^{0}) = \frac{1}{a^2}\left(\delta F'' - 2\phi F'' + 2\phi\mathcal{H}F' - \phi' F' - \mathcal{H}\delta F'\right)\ , \tag{3.6}$$

$$\delta(F_{;0}{}^{i}) = \frac{1}{a^2}\left(-BF'' + (\phi + 2\mathcal{H}B)F' + \mathcal{H}\delta F\right)^{,i}\ , \tag{3.7}$$

$$\delta(F_{;i}{}^{j}) = \frac{1}{a^2}\Big(-\delta F_{,i}{}^{j} + \Big[\left(-2\mathcal{H}\phi - \psi'\right)\delta_i^j - \left(B - E'\right)_{,i}^{\ j}\Big]F' + \mathcal{H}\delta_i{}^j\delta F'\Big). \tag{3.8}$$

Упражнение 29. Получить выражения (3.6)-(3.8).

Из соотношений (3.6)-(3.8) получаем

$$\delta(F_{;i}{}^{i}) = \frac{1}{a^2}\left(-\delta F_{,i}{}^{i} + \left[-6\mathcal{H}\phi - 3\psi' - B_{,i}{}^{i} + (E_{,i}{}^{i})'\right]F' + 3\mathcal{H}\delta F'\right), \tag{3.9}$$

$$\delta(F_{;\mu}{}^{\mu}) = \frac{1}{a^2}\left(\delta F'' - 2\phi F'' + \left[(E_{,i}{}^{i})' - B_{,i}{}^{i} - \phi' - 4\mathcal{H}\phi - 3\psi'\right]F' + 2\mathcal{H}\delta F' - \delta F_{,i}{}^{i}\right). \tag{3.10}$$

Теперь имеется все необходимое для записи линеаризованных уравнений Эйнштейна. Выпишем их сразу для случая, когда тензор энергии-импульса описывает идеальную жидкость без анизотропных напряжений. Для другого вида материи достаточно подставить в правую часть уранений компоненты соответствующего тензора энергии-импульса.

- $0-0$ уравнение

$$F\left[6\mathcal{H}(\mathcal{H}\phi+\psi')+2k^2\mathcal{H}(E'-B)+2k^2\psi\right]-3\mathcal{H}\delta F'+3\mathcal{H}'\delta F-k^2\delta F + F'\left[3\mathcal{H}\phi+3(\mathcal{H}\phi+\psi')+k^2(E'-B)\right]=-\kappa^2a^2\delta\rho. \tag{3.11}$$

- $0-i$ уравнение

$$F\left(\mathcal{H}\phi+\psi'\right)-\frac{1}{2}\delta F'+\frac{1}{2}\mathcal{H}\delta F+\frac{1}{2}F'\phi=\frac{\kappa^2a^2}{2}(\rho+P)(v-B)\ . \tag{3.12}$$

- Сумма $i-i$ уравнений

$$2F\left[\mathcal{H}\phi'+2\mathcal{H}\psi'+\psi''+(2\mathcal{H}'+\mathcal{H}^2)\phi+\frac{k^2}{3}(\psi-\phi)+\frac{k^2}{3}(E''-B') + \frac{2k^2}{3}\mathcal{H}(E'-B)\right]-\delta F''+2\phi F''-\mathcal{H}\delta F'+\left(\mathcal{H}'+2\mathcal{H}^2-\frac{2k^2}{3}\right)\delta F + F'\left[\phi'+2(\mathcal{H}\phi+\psi')+\frac{2k^2}{3}(E'-B)\right]=\kappa^2a^2\delta P. \tag{3.13}$$

- $i\neq j$ уравнения

$$F\left[\psi-\phi+(E'-B)'+2\mathcal{H}(E'-B)\right]=\delta F-F'(E'-B). \tag{3.14}$$

Упражнение 30. Получить из уравнения (3.3) уравнения (3.11)-(3.14), используя (3.6)-(3.8), выражения для возмущений тензора Риччи (2.66)-(2.68), скалярной кривизны (2.70), а также выражения (3.6)-(3.8) для возмущений второй ковариантной производной от скалярной функции.

В уравнения (3.11)-(3.14) входит величина

$$\delta F=\frac{d^2f(R)}{dR^2}\delta R, \tag{3.15}$$

которая, в силу уравнения (2.70), выражается через возмущения метрики и их производные по времени до второго порядка включительно. Подстановка (3.15) в (3.11)-(3.14) приводит к уравнениям с высшими производными, а значит в $f(R)$-гравитации решения для неоднородностей обладают дополнительными степенями свободы (этот факт следует также из того, что $f(R)$-теория гравитации конформным преобразованием приводится к ОТО с дополнительным скалярным полем). Для описания этих степеней свободы удобно рассматривать величину δF как независимую переменную. По этой причине обычно работают с уравнениями Эйнштейна в форме (3.11)-(3.14) (с точностью до переобозначений) или с их линейными комбинациями.

3.2. Скалярная степень свободы.

Введем обозначение

$$\tilde{\kappa} = \frac{1}{a}\left[3(\mathcal{H}\phi + \psi') + k^2(E' - B)\right] \ . \tag{3.16}$$

Удобнее работать в физическом времени, в котором

$$\tilde{\kappa} = 3(H\phi + \dot{\psi}) + (a\dot{E} - B)k^2/a \ . \tag{3.17}$$

Используя обозначение $\tilde{\kappa}$, уравнение (3.11) можно записать как

$$3H\delta\dot{F} + \left(k^2 - 3\dot{H} + 3H^2\right)\delta F = \kappa^2\delta\rho + \dot{F}\left[3H\phi + \tilde{\kappa}\right] + 2F\left[H\tilde{\kappa} + \frac{k^2}{a^2}\psi\right]. \tag{3.18}$$

Уравнение (3.13) примет вид

$$\begin{aligned} 2F\left[\frac{1}{3}\dot{\tilde{\kappa}} + \dot{H}\phi + \frac{1}{3}\frac{k^2}{a^2}(\psi - \phi) + H\tilde{\kappa}\right] + 2\phi\ddot{F} + 2\phi H\dot{F} - \delta\ddot{F} - 2H\delta\dot{F} \\ + \left(\dot{H} + 3H^2 - \frac{2}{3}\frac{k^2}{a^2}\right)\delta F + \dot{F}\left[\dot{\phi} + \frac{2}{3}\tilde{\kappa}\right] = \kappa^2\delta P. \end{aligned} \tag{3.19}$$

Вычитая второе из первого, получаем

$$\begin{aligned} &\delta\ddot{F} + 3H\delta\dot{F} + \left(\frac{k^2}{a^2} - 3\dot{H} - 4H^2\right)\delta F \\ &= \ \kappa^2\delta\rho - \kappa^2\delta P + \dot{F}\left(\tilde{\kappa} + \dot{\phi}\right) + \left(2\ddot{F} + 3H\dot{F}\right)\phi \\ &+ \ F\left[\frac{2}{3}\dot{\tilde{\kappa}} + \frac{8}{3}H\tilde{\kappa} + \frac{2}{3}\left(3\dot{H} - \frac{k^2}{a^2}\phi\right) + \frac{4}{3}\frac{k^2}{a^2}\psi\right] \ . \end{aligned} \tag{3.20}$$

По форме это полевое уравнение для возмущений скалярного поля (с источниками). Таким образом величина δF описывает скалярную степень свободы, поэтому иногда ее называют скаляроном. Уравнение (3.20) позволяет получить ограничения на вид зависимости $f(R)$ из условия отсутствия скаляронных неустойчивостей.

Заключение

Настоящее пособие даёт возможность овладеть основами $f(R)$ теории гравитации и обратить внимание на ключевые результаты, необходимые для вхождения в предмет исследования. Подробное изложение линейной теории возмущений в ОТО, позволит овладеть техникой вычисления для космологических моделей. Пособие рассчитано на активное участие читателей в проведении самостоятельных вычислений. Список литературы содержит основополагающие работы и актуальные обзоры по $f(R)$ теории гравитации и космологии.

Литература

[1] J. M. Bardeen. Gauge-invariant cosmological perturbations. *Physical Review D*, 22:1882–1905, October 1980.

[2] Rachel Bean, David Bernat, Levon Pogosian, Alessandra Silvestri, and Mark Trodden. Dynamics of Linear Perturbations in f(R) Gravity. *Phys. Rev.*, D75:064020, 2007.

[3] R. Brustein, M. Gasperini, Massimo Giovannini, Viatcheslav F. Mukhanov, and G. Veneziano. Metric perturbations in dilaton driven inflation. *Phys. Rev.*, D51:6744–6756, 1995.

[4] R. Harrison. Fluctuations at the threshold of classical cosmology. *Phys. Rev.*, D1:2726–2730, 1970.

[5] Wayne Hu and Ignacy Sawicki. Models of f(R) Cosmic Acceleration that Evade Solar-System Tests. *Phys. Rev.*, D76:064004, 2007.

[6] H. Kodama and M. Sasaki. Cosmological Perturbation Theory. *Progress of Theoretical Physics Supplement*, 78:1, 1984.

[7] Andrew R. Liddle and David H. Lyth. The Cold dark matter density perturbation. *Phys. Rept.*, 231:1–105, 1993.

[8] V. N. Lukash. Production of phonons in an isotropic universe. *Soviet Journal of Experimental and Theoretical Physics*, 52:807, November 1980.

[9] D. H. Lyth. Large-scale energy-density perturbations and inflation. *Physical Review D*, 31:1792–1798, April 1985.

[10] Juan Martin Maldacena. Non-Gaussian features of primordial fluctuations in single field inflationary models. *JHEP*, 05:013, 2003.

[11] Karim Ali Malik. *Cosmological perturbations in an inflationary universe*. PhD thesis, Portsmouth U., 2001.

[12] Viatcheslav F Mukhanov, Hume A Feldman, and Robert Hans Brandenberger. Theory of cosmological perturbations. *Physics Reports*, 215(5):203–333, 1992.

[13] J. A. Peacock. Large scale surveys and cosmic structure. 2003.

[14] Eric Poisson. *A Relativist's Toolkit The Mathematics of Black-Hole Mechanics*. Cambridge University Press, UK, 2004.

[15] Antonio Riotto. Inflation and the theory of cosmological perturbations. In *Astroparticle physics and cosmology. Proceedings: Summer School, Trieste, Italy, Jun 17-Jul 5 2002*, pages 317–413, 2002.

[16] David Seery and James E. Lidsey. Primordial non-Gaussianities in single field inflation. *JCAP*, 0506:003, 2005.

[17] Shinji Tsujikawa, Kotub Uddin, and Reza Tavakol. Density perturbations in f(R) gravity theories in metric and Palatini formalisms. *Phys. Rev.*, D77:043007, 2008.

[18] Е.М. Лифшиц. О гравитационной нестабильности расширяющейся вселенной. *Soviet Journal of Experimental and Theoretical Physics*, 1946.

Компьютерная вёрстка: Николаев А.В.

Пособие опубликовано в авторской редакции.