

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего
профессионального образования
Ульяновский государственный педагогический университет
имени И.Н. Ульянова

С.В. Червон, И.В. Фомин, А.С. Кубасов

Скалярные и киральные поля в КОСМОЛОГИИ

Монография

Ульяновск
2015

УДК 531
ББК 22.313
Ч 45

Печатается по решению редакционно-
издательского совета
ФГБОУ ВПО «УлГПУ им. И.Н. Ульянова»

Рецензенты:

доктор физико-математических наук, профессор кафедры теоретической
физики Ульяновского государственного университета В.М. Журавлёв;
кандидат физико-математических наук, доцент кафедры информатики
Ульяновского государственного педагогического университета имени
И.Н. Ульянова Н.А. Кошелев

Ч 45 С.В. Червон, И.В. Фомин, А.С. Кубасов Скалярные и киральные поля в
космологии / С.В. Червон, И.В. Фомин, А.С. Кубасов - Ульяновск,
ФГБОУ ВПО «УлГПУ им. И.Н. Ульянова», 2015 — 233 с.

ISBN 978-5-86045-832-1

В монографии рассматриваются теоретические модели ранней вселенной, которые связаны со скалярными и киральными космологическими полями. Проводится систематическое описание классических аспектов нелинейных скалярных и киральных полей в ОТО и космологии. Значительное внимание уделяется точным решениям для самогравитирующей нелинейной сигма модели во вселенной Фридмана. Представлено построение алгоритма вычисления ключевых космологических параметров на основе теории возмущений, базирующейся на точных решениях в теории инфляции. Особое внимание уделено космологии ранней вселенной, описываемой киральной космологической моделью с фантомными полями.

Книга предназначена для физиков-теоретиков, интересующихся проблемами нелинейной теории поля, теории гравитации и космологии, а также для студентов старших курсов, магистров и аспирантов.

УДК 531
ББК 22.313

Издание опубликовано при финансовой поддержке государственного задания в рамках проекта Министерства образования и науки РФ № 2014/391 по проекту № 1670

ISBN 978-5-86045-832-1



© С.В. Червон, И.В. Фомин, А.С. Кубасов
© ФГБОУ ВПО «УлГПУ им. И.Н. Ульянова»

Оглавление

I	Скалярные и киральные космологические поля	7
1.	Скалярные поля в ОТО	9
1.1.	Точные решения со скалярными полями	10
1.2.	Нелинейные скалярные поля	17
1.3.	Самогравитирующие скалярные поля	22
1.3.1.	Скалярные поля в конформно-плоских пространствах	23
1.3.2.	Космологические и статические решения	23
1.3.3.	Решения солитонного типа	24
1.3.4.	Массивное скалярное поле	25
2.	Нелинейные сигма модели	27
2.1.	"Сигма" терминология	28
2.1.1.	Бозонные нелинейные сигма модели	29
2.2.	Двухмерная $SO(3)$ нелинейная сигма модель	32
2.2.1.	Изометрические и гомотетические симметрии	32
2.2.2.	Подгруппа трансляций	34
2.2.3.	Подгруппа вращений и гомотетии	37
3.	Самогравитирующие нелинейные сигма модели	39
3.1.	Конструктивный подход к HCM	40
3.2.	Метод генерирования точных решений в самогравитирующих $SO(N)$ HCM	42
3.2.1.	Плоско-симметричные решения в $SO(N)$ HCM	42
3.2.2.	Генерирование решений $SO(N)$ HCM из вакуумных решений уравнений Эйнштейна	45
3.2.3.	Космологические решения $SO(N)$ HCM	46
4.	Модели космологической инфляции	49
4.1.	Обобщения модели одинарного скалярного поля	50
4.2.	Стандартная модель инфляции со скалярным полем	52
4.3.	Точная настройка потенциала в стандартной модели инфляции	54
4.4.	Скалярные поля в $(1+1)$ космологии	59
4.4.1.	Уравнения модели	59
4.4.2.	Расширение по степенному закону	60
4.4.3.	Экспоненциальная инфляция	60
4.4.4.	Решения типа осциллирующей Вселенной	63
4.5.	Самогравитирующие HCM в космологии	65
4.6.	$SO(N)$ HCM в плоском мире Фридмана	67

4.7.	$SO(3)$ кинетическая НСМ	68
4.8.	Двухкомпонентная кинетическая НСМ	70
4.9.	Массивная киральная НСМ	72
4.9.1.	Самогравитирующая НСМ с потенциалом	73
4.9.2.	Киральная космологическая модель инфляции	73
4.9.3.	Гравитационное поле квазивакуумного состояния вещества	75
5.	Нелинейные поля в моделях инфляции	77
5.1.	Киральная космологическая модель, как эффективная теория инфляции	78
5.2.	$SO(N)$ НСМ в пространствах ФРУ	80
	Список литературы	81
II	Космологические возмущения в точнорешаемых моделях инфляции	93
6.	Космологическая инфляция	95
6.1.	Предпосылки теории инфляции	96
6.2.	Динамика скалярного поля	98
6.3.	Плотность энергии и давление	98
6.4.	Приближение медленного скатывания	99
6.5.	Параметры медленного скатывания	99
6.6.	Времена Хаббла	100
6.7.	Метод суперпотенциала	101
6.8.	Хаббловские времена в случае точных решений	101
6.9.	Космологические возмущения	102
6.10.	Классификация возмущений	104
6.11.	Калибровочные преобразования	104
6.12.	Квантовая теория космологических возмущений	105
6.12.1.	Уравнение гравитационных волн	106
6.12.2.	Спектр мощности тензорных мод космологических возмущений	107
6.13.	Наблюдательные данные	108
6.13.1.	Анизотропия реликтового излучения	109
7.	Квантовое рождение космологических возмущений	113
7.1.	Возмущения инфляционного поля	115
7.2.	Гауссовость и спектр мощности возмущений	116
7.3.	Квантовые флуктуации в течение де Ситтеровского расширения	118
7.4.	Адиабатичность возмущений	120
7.5.	Пересечение горизонта	120
7.6.	Фоновые уравнения	123
7.7.	Возмущения метрики	123
7.8.	Квантование скалярного поля	125

7.9. Точные решения уравнений эволюции скалярного поля	126
7.10. Спектральные характеристики космологических возмущений	127
7.10.1. Спектр мощности скалярных возмущений	129
7.10.2. Спектр мощности тензорных возмущений	130
7.11. Метод вычисления космологических параметров	131
7.12. Пост-инфляционная эволюция космологических возмущений	132
7.13. Космологические параметры для точных решений	134
7.13.1. Степенная инфляция	134
7.13.2. Де Ситтеровские решения	134
7.13.3. Обобщенная экспоненциальная инфляция	135
7.13.4. Экспоненциально-степенная инфляция	136
7.14. Различие между параметрами ϵ и γ	137
8. Построение моделей инфляции	139
8.1. Основные уравнения и точные решения	139
8.2. Модели космологической инфляции	140
8.2.1. Выбор потенциала	142
8.2.2. Сопоставление с космологическими параметрами	142
8.3. Скалярные поля в конформно-плоских пространствах	143
8.3.1. Космологические параметры	145
8.3.2. Космологические модели	145
8.3.3. Степенная инфляция	146
8.3.4. Экспоненциальная зависимость масштабного фактора	147
8.4. Тензорно-скалярное отношение в различных моделях инфляции	148
8.5. Модели с нетривиальной кинетической частью	149
8.5.1. Обобщение инфляционных моделей медленного скатывания	150
8.5.2. Построение модели	151
8.6. Ограничения на значения параметров гравитационных волн	152

Список литературы	153
--------------------------	------------

III Киральные космологические модели с фантомными полями **159**

9. Модели инфляционной космологии	165
9.1. Инфляционные модели	165
9.2. Точные решения в моделях космологической инфляции	165
9.3. Космологические параметры в точнорешаемых моделях инфляции	168
9.3.1. Метод вычисления космологических параметров	168
9.3.2. Космологические параметры для точных решений	170

9.4. Фантомные поля в космологии	171
9.5. Киральная космологическая модель	172
9.6. Развитие модели «появляющейся» вселенной	174
10. Выбор специальных анзацев в 2-ККМ	177
10.1. Двухкомпонентная киральная космологическая модель	177
10.2. Выбор специальных анзацев для отыскания точных решений	178
10.2.1. Специфика вычислений	180
10.2.2. Открытая или замкнутая Вселенная ($\epsilon = \pm 1$)	181
10.2.3. Пространственно-плоская Вселенная ($\epsilon = 0$)	189
10.3. Решение для степенного масштабного фактора и вселенной Де Ситтера .	194
10.3.1. Масштабный фактор $a(t) = At^n$	194
10.3.2. Масштабный фактор $a(t) = A \operatorname{sh}(at)$	195
10.3.3. Масштабный фактор $a(t) = A \operatorname{ch}(at)$	197
11. Ранняя инфляция и появляющаяся вселенная	199
11.1. Искривление пространственно-плоской Вселенной	199
11.2. Эволюция компонент полей K и V на заданном масштабном факторе . .	200
11.3. Точные решения, основанные на специфических разбиениях	206
11.3.1. Точное решение для пространственно-плоской Вселенной для оди- нарного фантомного скалярного поля	206
11.3.2. Точные решения для двухкомпонентной киральной космологиче- ской модели	210
11.4. Космологические параметры для «появляющейся» вселенной и обобщен- ного режима ранней инфляции	220
12. «Появляющаяся» вселенная в гравитации ЭГБ	221
12.1. Двухкомпонентная киральная космологическая модель для гравитации Эйнштейна-Гаусса-Бонне	221
12.2. Гравитация ЭГБ для пространственно-плоского случая	222
12.3. Гравитация ЭГБ для открытого и замкнутого случая	224
Список литературы	227

Предисловие

Монография посвящена исследованиям теоретических моделей ранней вселенной. Представлены основы теории скалярных полей в ОТО, киральной нелинейной сигма модели. Значительное внимание уделяется конструированию точных решений в самогравитирующих моделях со скалярными и киральными космологическими полями. Представлены способы вычисления космологических параметров с использованием точных решений в инфляционных моделях. Доказана справедливость такого подхода на основе анализа космологических возмущений. Представлен алгоритм сопоставления теоретических предсказаний наблюдательным данным по скалярному спектральному индексу и тензорно-скалярному отношению.

Монография состоит из трёх частей, которые можно читать независимо друг от друга. Часть первая представляет собой обзор и историческую панораму по скалярным полям в ОТО и нелинейным сигма моделям. Кроме того, там представлены результаты, которые явились основой дальнейших исследований в космологии, частично представленные в частях II и III.

Материал, изложенный во второй части представляет собой совокупность результатов, которые позволяют на основе точных решений скалярной космологии перейти к вычислению ключевых космологических параметров, необходимых для сопоставления предсказаний теории с наблюдательными данными.

В части III представлена реализация 2-х компонентной киральной космологической модели как эффективной модели, описывающей раннюю вселенную и инфляционную стадию. Особое внимание уделяется методом построения точных решений модели за счёт выбора анзаца для фантомного и канонического скалярных полей. Дан анализ космологических потенциалов, удовлетворяющих выбранной эволюции масштабного фактора вселенной. Показана возможность применения разработанных методов к появляющейся вселенной и в рамках модифицированной теории гравитации Эйнштейна – Гаусса – Бонне.

Авторы

Часть I

Скалярные и киральные космологические поля

Глава 1.

Скалярные поля в ОТО

1.1. Точные решения со скалярными полями

Среди физических полей, рассматриваемых в рамках ОТО, скалярные поля занимают особое место. Во-первых, они имеют совершенно прозрачную физическую интерпретацию как поле, отвечающее за сильные взаимодействия (короткодействующее поле). Во вторых, как эффективное поле, описывающее результат действия других физических полей (дальнодействующее скалярное поле). В последние несколько десятков лет особенно интенсивно исследовалось самодействующее скалярное поле, как источник гравитационного поля, приводящее Вселенную в стадию экспоненциально быстрого расширения (инфляционная стадия). Кроме того модель скалярного поля может рассматриваться как своего рода теоретическая лаборатория для отработки методов решения самосогласованной системы уравнений гравитационного и физических полей.

Прежде чем погрузиться в исторический экскурс рассмотрим основные соотношения для модели самогравитирующего скалярного поля в рамках эйнштейновской теории гравитации. Основные методы, используемые в теории гравитации, космологии, квантовой теории поля, в теории нелинейных волн и солитонов, достаточно широко представлены в монографиях [50]-[58].

Массивное скалярное поле, минимально взаимодействующее с гравитацией, описывается интегралом действия [58]¹

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \{L_g + L_{sf}\}, \quad (1.1)$$

где лагранжиан гравитационного поля

$$L_g = \frac{R}{2\kappa}.$$

Лагранжиан скалярного поля имеет вид

$$L_{sf} = \frac{1}{2}(\phi_{,i}\phi_{,k}g^{ik} - m^2\phi^2).$$

Здесь и далее принято обозначение $\phi_{,i} = \partial_i\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x^i}$

Тензор Энергии-Импульса (ТЭИ) скалярного поля имеет вид

$$T_{ik} = \phi_{,i}\phi_{,k} - g_{ik}\frac{1}{2}(\phi_{,j}\phi_{,l}g^{jl} - m^2\phi^2) \quad (1.2)$$

Принцип наименьшего действия $\delta S = 0$ приводит при варьировании по гравитационному и скалярному полям к уравнениям Эйнштейна и Клейна-Гордона соответственно

$$G_{ik} \equiv R_{ik} - \frac{1}{2}g_{ik}R = \kappa T_{ik} \quad (1.3)$$

$$\phi_{;j}^j - m^2\phi = 0 \quad (1.4)$$

Самосогласованная система уравнений ЭКГ (1.3)-(1.4) является основным объектом исследований для модели скалярного поля в ОТО. Заметим, что уравнение Клейна-Гордона (1.4) является дифференциальным следствием уравнений Эйнштейна (1.3).

¹Здесь и далее, если нет специальных оговорок, используются стандартные обозначения, принятые в монографии Ландау Л.Д. и Лифшица Е.М. Теоретическая физика, т.2, "Теория поля".

Впервые в рамках ОТО скалярное поле введено в рассмотрение в конце сороковых годов. В 1947 году Папапетроу [9] исследовал случай взаимодействия скалярного, электромагнитного и гравитационного полей. В отсутствие электромагнитного поля самосогласованная система уравнений Эйнштейна-Клейна-Гордона была рассмотрена в 1947 году в работе Фишера [10].

Основное внимание в настоящей главе будет уделено исследованиям именно системы уравнений ЭКГ "в чистом виде", то есть в отсутствие взаимодействия с другими физическими полями.

Несмотря на то, что работа [10] подверглась критике [24],[28],[29] за погрешности анализа асимптотического поведения метрики, само решение было вычислено корректно. Кроме того, данная работа подвергла сомнению распространенное в то время мнение, что для элементарных частиц можно всегда пренебрегать гравитационными силами. Здесь интересно отметить, что вопрос о возможной роли гравитации в физике элементарных частиц был поставлен Эйнштейном [17] (см.стр.664).

Теперь представим результаты работы [10] для самогравитирующего скалярного поля.

Полученная Фишером метрика имеет вид

$$ds^2 = \left\{ \frac{z - z_0}{z + z_1} \right\}^p dt^2 - \frac{r^2}{z^2} \left\{ \frac{z - z_0}{z + z_1} \right\}^p dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2), \quad (1.5)$$

где

$$z_{0,1} \equiv (\kappa^2 m^2 + \kappa G^2)^{\frac{1}{2}} \mp \kappa m, \\ p = \frac{\kappa m}{\sqrt{\kappa^2 m^2 + \kappa G^2}}.$$

G - скалярный заряд, функция z определяется из уравнения

$$(z - z_0)^{1-p}(z + z_1)^{1+p} = r^2$$

Скалярное поле определяется соотношением

$$\phi = \frac{Gp}{2\kappa m} \ln \left\{ \frac{z + z_1}{z - z_0} \right\}. \quad (1.6)$$

В работах пятидесятых годов исследуется система уравнений ЭКГ в случае сферически-симметричной и аксиально-симметричной метрики пространства-времени. В работе Иши [14] найдено статическое сферически-симметричное решение для безмассового скалярного поля, которое логарифмически убывает с расстоянием. Аналогичное решение получено в работе Бергмана и Лейпника [16]. Особо следует отметить работы Бакдала [11], [12], [13], где был предложен метод отыскания точных решений для самосогласованной системы уравнений ЭКГ, исходя из вакуумных статических решений уравнений Эйнштейна, в классе метрик, который включает в себя сферическую и аксиальную симметрию.

В работах 60-ых годов основной акцент сделан на поисках несингулярных решений для сферически-симметричного и аксиально-симметричного гравитационных полей, взаимодействующих с безмассовым скалярным полем космологического характера.

Ключевой работой этого периода является работа Яниса-Ньюмана-Виникура [19], в которой, в очередной раз, рассматривается статическое сферически-симметричное гравитационное поле, минимально взаимодействующее с безмассовым скалярным полем.

В отличие от работ [10],[14],[13] используется система координат, в которой метрика гравитационного поля записывается в шварцшильдовском виде ²

$$ds^2 = \left\{ \frac{2R + r_0(\mu + 1)}{2R - r_0(\mu - 1)} \right\}^{1/\mu} dR^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) - \left\{ \frac{2R - r_0(\mu - 1)}{2R + r_0(\mu + 1)} \right\}^{1/\mu} dt^2, \quad (1.7)$$

где радиальная координата $R(r)$ определяется из соотношения

$$r^2 = \frac{1}{4} \{2R + r_0(\mu + 1)\}^{1+\frac{1}{\mu}} \{2R - r_0(\mu - 1)\}^{1-\frac{1}{\mu}}, \quad (1.8)$$

$$\mu \equiv \sqrt{1 + 4\kappa A^2/r_0^2} \geq 1, \quad A = const, \quad r_0 = 2m = const.$$

Скалярное поле определяется формулой

$$\phi = \frac{A}{\mu} \ln \left| \frac{2R - r_0(\mu - 1)}{2R + r_0(\mu + 1)} \right|. \quad (1.9)$$

Работа [19] также содержит погрешности при исследовании асимптотического поведения метрики.

Пенней в работе [23] получил решение системы ЭКГ в квадратурах для аксиально-симметричной метрики

$$ds^2 = e^{2\nu-2\lambda}(dr^2 + dz^2) + r^2 e^{-2\lambda} d\varphi^2 - e^{2\lambda} dt^2. \quad (1.10)$$

Если функция $\lambda(r, z)$ и скалярное поле $\phi(r, z)$ удовлетворяют уравнению Лапласа, записанному в цилиндрических координатах, тогда

$$\nu = \int r((\lambda_1^2 - \lambda_2^2)dr + 2\lambda_1\lambda_2 dz) + \frac{1}{2}\kappa \int r((\phi_1^2 - \phi_2^2)dr + 2\phi_1\phi_2 dz),$$

где $\lambda_1 \equiv \partial_1 \lambda$.

Также в работе [23], при анализе сферически-симметричного случая, найдено простое преобразование координат

$$r^2 = R(R - 2m) \sin^2 \theta, \quad z = (R - m) \cos \theta, \quad (1.11)$$

позволяющее получить сферически-симметричное решение. Как выяснилось, найденное решение, после преобразования трансляции радиальной координаты и переопределения параметров, совпадает с решением Яниса-Ньюмена-Виникура (1.7).

Обобщение статических решений для безмассового скалярного поля на случай дополнительного взаимодействия с электромагнитным полем и в рамках теории гравитации Бранса-Дикке предложено в работе Яниса-Робертсона-Виникура [20].

Следует отметить появление работ по геометризации скалярного поля [18],[22], в которых предпринимается попытка найти систему дифференциальных уравнений для

²Здесь и далее сигнатура метрики и обозначения координат соответствует той, которая используется в оригинальной работе.

метрического тензора эквивалентную систему уравнений ЭКГ (для безмассового и массивного скалярного поля), установив связь между функцией поля и тензором Риччи. Короткодействующее скалярное поле рассматривалось в работе Пеннея [22], в связи с проблемой геометризации массивного скалярного поля.

Другим важным моментом является понимание необходимости введения других физических полей, кроме скалярного, для получения устойчивых конфигураций. Заметна большая активность в исследовании системы уравнений Эйнштейна-Клейна-Гордона-Максвелла (ЭКГМ) [15], [22].

В лекциях Пенроуза "Конформная трактовка бесконечности", прочитанных в 1963 году на летней школе по теоретической физике при Гренобльском университете (см., например, в сборнике [21]), предложено обобщение уравнения свободного скалярного поля, которое не меняет своего вида при конформном преобразовании метрики $dS^2 = \Omega^2 d\tilde{S}^2$. Конформно-инвариантное уравнение безмассового скалярного поля имеет вид

$$\nabla_i \nabla^i \phi + \frac{1}{6} R \phi = 0. \quad (1.12)$$

Это уравнение может быть получено варьированием по полю ϕ действия

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ L_g + L_{sf} + \frac{1}{12} R \phi^2 \right\}. \quad (1.13)$$

Метрический ТЭИ для теории с конформной связью (1.13) получен в работе Тагирова и Черникова [25], где рассматривается квантовая теория скалярного поля в конформно-инвариантной форме в пространстве де Ситтера.

В работах 70-ых – 80-ых годов много внимания уделяется анализу системы уравнений ЭКГМ и поискам устойчивых решений для этой системы. В эти же годы впервые появляется интерес к плоско-симметричным и конформно-плоским решениям.

Мы не ставим своей целью дать обзор работ по взаимодействующим электромагнитным, скалярным и гравитационным полям, однако исследования некоторых групп будут отмечены особо.

В семидесятые годы активные исследования решений с физическими полями в ОТО, которые позволяют изучить возможное влияние гравитации в микромире, предприняты в группе Станюковича. В число таких задач входит и изучение скалярного поля в искривленном пространстве. Учитывая необходимость правильного квазиклассического предела при рассмотрении квантовых эффектов в микромире, много внимания уделяется конформно-инвариантной версии скалярного поля, с акцентом на исследовании комплексного скалярного поля. Обзор работ по исследованиям в этом направлении подробно представлен в монографии Станюковича и Мельникова [56]. Отметим также и исследования, проведенные в группе Станюковича-Мельникова, по поискам частицеподобных решений для взаимодействующих скалярных, электромагнитных и гравитационных полей. Результаты этих исследований отражены в монографии [56].

Приведем результаты работ по исследованию безмассового скалярного поля в пространствах ОТО.

В классе метрик Эйнштейна-Розена

$$ds^2 = e^{\eta-\psi} (dt^2 - dr^2) - r^2 e^{-\psi} d\varphi^2 - e^{\psi} dz^2 \quad (1.14)$$

безмассовое скалярное поле рассматривалось в работах Сингха [31], Лала и Сингха [30].

В работе Патела [32] найдены плоско-симметричные решения систем уравнений ЭКГ и ЭКГМ. Для самогравитирующего безмассового скалярного поля в классе метрик

$$ds^2 = e^{2\alpha}(dt^2 - dx^2) - e^{2\beta}(dy^2 + dz^2) \quad (1.15)$$

найден статическое решение в виде

$$\alpha = \frac{c_3}{c_1} \ln(c_1x + c_2) + c_4, \quad 2\beta = \ln(c_1x + c_2), \quad \phi = \frac{c_5}{c_1} \ln(c_1x + c_2), \quad (1.16)$$

где c_a – константы, удовлетворяющие условию

$$c_1^2 + 4c_1c_3 = 16\pi c_5^2, \quad c_1 \neq 0.$$

Для линейного элемента

$$ds^2 = e^{2h} \{ dt^2 - dr^2 - r^2 d\varphi^2 - S^2 dz^2 \}, \quad (1.17)$$

где r, φ, z – цилиндрические координаты, h, S – функции от t , найдено нестатическое решение

$$\begin{aligned} S &= Ae^{hc_1/c_2}, \quad \phi = hc_3/c_2, \\ e^{h(2+c_1/c_2)} &= (2 + c_1/c_2)(c_2A^{-1}t + c_3), \\ A &= const \neq 0, \quad 3c_2^2 + 2c_1c_2 = 4\pi c_3^2, \quad c_2 \neq 0. \end{aligned}$$

Интересно отметить, что при занулении констант c_5 и c_3 в приведенных решениях, восстанавливаются известные вакуумные решения Тауба и Бера.

Аналогичные исследования для плоско-симметричной и цилиндрически-симметричной метрики проведены в работе Зайцева и Шикина [44].

Работа Лала и Прадхана [33] посвящена поиску и исследованию волновых решений системы ЭКГ в классе обобщенной метрики Переса, линейный элемент которой представлен в виде

$$ds^2 = -Adx^2 - Bdy^2 - (1 - E)dz^2 - 2Edzdt + (1 + E)dt^2, \quad (1.18)$$

где A, B, E – функции от (x, y, Z) ; $Z = z - t$. Предполагая зависимость

$$A = Bf, \quad f = f(Z),$$

найден точное плоско-волновое решение для $A = A(x, Z)$, $B = B(y, Z)$, $E = E(x, y, Z)$ и $\phi = \phi(Z)$. Вышеперечисленные функции удовлетворяют уравнению

$$\begin{aligned} A^{-1} \{ A'' - E_{xx} - (A'^2 - A_x E_x)/2A \} + \\ B^{-1} \{ B'' - E_{yy} - (B'^2 - B_y E_y)/2B \} = 16\pi\phi'^2. \end{aligned} \quad (1.19)$$

В последнем уравнении штрих означает производную по Z .

Скалярное поле в конформно-плоских пространствах рассматривалось в работах [41],[43],[35],[38]. В классе конформно-плоских метрик

$$ds^2 = e^\psi d\eta^2 \equiv e^\psi \{ (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2 - (dt)^2 \} \quad (1.20)$$

в работе [41] найдены нестационарные решения системы ЭКГ

$$e^\psi = \sqrt{\frac{2\kappa}{3}}\xi + c_2, \quad \xi = k_a x^a - \omega t, \quad a = 1, 2, 3.$$

$$\phi = \sqrt{\frac{3}{2\kappa}} \ln \left\{ \sqrt{\frac{2\kappa}{3}}\xi + c_2 \right\} + c_3. \quad (1.21)$$

Полученные решения аналогичны тем, которые следуют из решений Патела (1.15) при переходе от плоско-симметричной к конформно-плоской метрике.

В работе Федосеева и Дородных [43] найдено обобщение приведенного решения для тахионных скалярных полей. Кроме того показано, что существует решение для массивного скалярного поля типа плоских волн. Однако примеров решений не приводится, представлена лишь система двух обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка, которая имеет 3-х параметрическое семейство решений.

Аналогичные исследования скалярного поля в конформно-плоских пространствах проведены в работах [35],[38].

Нестационарные решения волнового и автомодельного типа системы ЭКГ в случае ортогональной метрики

$$ds^2 = D(dt)^2 - A(dx^1)^2 - B(dx^2)^2 - C(dx^3)^2 \quad (1.22)$$

исследованы в работах Шикина [45] и [42] соответственно.

Продолжается исследование геометризации моделей скалярного поля, начатого в работах Элерса-Кучара [18] и Пеннея [22].

В этом направлении отметим систематическое исследование комплексного скалярного поля, предпринятое в серии статей Людвига [26],[27].

Следует особо отметить работу Мельникова и Орлова [48], где представлено решение в несингулярной космологии как проявление квантового вакуума, что является близким по духу к моделям инфляции, открытыми в восьмидесятые.

В работе [51] анализируются уравнения массивного скалярного поля в гравитационном поле вращающейся черной дыры. Аналитическими методами исследуется вопрос о стабильности скалярного поля относительно малых возмущений, когда масса скалярного поля и частота возмущений значительно меньше обратной массы M черной дыры. На больших расстояниях r от черной дыры решение радиальной части уравнения Клейна-Гордона записывается через конфлюэнтные гипергеометрические функции. При приближении к горизонту событий решение радиальных уравнений выражается в гипергеометрических функциях. При анализе роста неустойчивости установлено, что наибольший рост неустойчивости аналогичен случаю $2p$ -состояния атома водорода и имеет время e -кратного роста

$$\tau = 24(a\mu^9 M^7)^{-1},$$

где μ – масса скалярного поля, a – параметр углового момента.

Следует заметить, что по мнению Детвейлера результаты работы могут оказаться полезными при анализе испарения черных дыр, когда неустойчивость играла определяющую роль. На современном же этапе эволюции Вселенной, в частности при рассмотрении пионного поля вокруг черной дыры, рассмотренное приближение неприменимо.

Уаймэном [52] продолжено исследование статического сферически симметричного гравитационного поля, порожденного скалярным полем. В специально подобранной системе координат найдены решения Бергмана-Лейпника (1957)[16], Йилмаза (1958), Бақдала (1958). (Заметим, что на решение Фишера (1.5) в этих работах нет ссылок.) Существенным прогрессом работы [52] можно считать постановку вопроса о существовании статических сферически симметричных метрик в случае зависимости скалярного поля от времени. Хотя полностью решить систему ЭКГ для этого случая Уаймэну не удается, найдено одно частное аналитическое решение и рассмотрено приближение при $r \rightarrow 0$.

Квантовые аспекты для конформно-инвариантного скалярного поля в космологии ранней Вселенной рассматривались в работах Бергер (смотри работу [53] и литературу, цитированную в ней).

Космологические пространства (II, VIII, IX типа по Бианки) заполненные идеальной жидкостью с уравнением состояния

$$p = (\gamma - 1)\varepsilon, \quad 1 \leq \gamma \leq 2,$$

скалярным и электромагнитными полями рассматривались в работе Лоренца [54]. В случае предельно жесткого вещества ($\gamma = 2$) найдено новое точное решение в параметрической форме для перечисленных выше космологических пространств.

В работе Фролова и Зельникова [55] рассматривается безмассовое скалярное поле с точечным зарядом медленно погружающееся в черные дыры Шварцшильда и Райснера-Нордстрема. Анализ полученного точного решения позволяет сделать вывод, что скалярное поле будет расплываться, и черная дыра не будет разрушаться.

Работа Клебера, Сома и Тейксейра [49] посвящена поиску точных решений для далекодействующего скалярного поля в статических плоско-симметричных пространствах. Найденный однопараметрический класс точных решений с космическим временем изучается в гармонических координатах. Решены уравнения геодезических. Скалярное поле линейно возрастает (или убывает) пропорционально пространственной координате z

$$\phi(z) = \pm k|z| + const.$$

Любопытно отметить, что из анализа компонент ТЭИ следует вывод об анизотропном состоянии вещества для полученного решения, которое характеризуется соотношением между компонентами

$$T_0^0 = T_1^1 = T_2^2 = -T_3^3 > 0.$$

Такая анизотропия вызывает поле ускорения, зависящее от скорости движущихся пробных частиц.

В работе [46] рассматривается эмиссионный тепловой поток в рамках Вселенной де Ситтера, заполненной безмассовым конформно-инвариантным скалярным полем. Методом разделения переменных решается уравнение конформно-инвариантного скалярного поля на фоне метрики де Ситтера, записанной в шварцшильдовой форме. Решение выражается через гипергеометрические функции. Данная работа продолжает исследования уравнения скалярного поля на фоне физически значимых пространств, начатого в работах Роувана и Стефенсона [37].

Решение в квадратурах системы уравнений безмассового самогравитирующего скалярного поля для стационарных аксиально-симметрических пространств представлено в работе [47].

Система уравнений ЭКГМ в стационарных аксиально симметричных гравитационных полях исследовалась в работе Банерджи и Чаудхари [39]. Найден метод генерирования новых решений системы ЭКГМ из известных вакуумных решений уравнений Эйнштейна. Некоторые ранее полученные частные решения, например решения Яниса-Робертсона-Виникура [20] и Тейксейра-Уолка-Сома [36], воспроизводятся при подходящем выборе постоянных интегрирования. Найденны два класса новых точных решений, которые не сводятся к известным.

В работе Гюрсеца [40] показано, что существуют только два класса различных конформно-плоских решений для системы уравнений ЭКГ, один из которых найден Пеннеем [35].

Изотропное скалярное поле

$$\phi^i \phi_{,i} = 0$$

в полях тяготения алгебраически специальных типов III, N и O по классификации Петрова исследовалось в работе Червона [162]. С использованием метода квазиортогональной вещественной тетрады найдены пространственно-временные многообразия, допускающие изотропное скалярное поле, и приведены примеры точных решений для самогравитирующего скалярного поля.

1.2. Нелинейные скалярные поля

Система уравнений ЭКГ представляет собой нелинейную систему дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка, проинтегрировать которую удается лишь в предположении о дополнительной симметрии гравитационного поля и некоторых специальных предположениях (анзацах) о соотношении скалярного и гравитационного полей. В виду сказанного, первоначально, основные исследования физических полей в ОТО были выполнены для безмассового скалярного поля. Только в некоторых работах (например [43],[38]) были рассмотрены массивные скалярные поля. Однако значительного прогресса здесь не было достигнуто. Поэтому введение нелинейных скалярных полей для решения самосогласованной задачи гравитации значительно запоздало по времени от постановки соответствующей проблемы в рамках полевой теории.

Побудительными причинами исследования нелинейных скалярных полей в теории относительности послужили следующие факторы. Во первых, это прогресс нелинейных теорий мезон-нуклонных взаимодействий, которые возникли как попытки объяснить существенно нелинейные эффекты в физике элементарных частиц, такие как явление ядерного насыщения и оболочечной структуры ядра [59]. Во вторых, учет квантовых явлений на ранней стадии эволюции Вселенной, указывает на необходимость рассмотрения конформно-инвариантной версии скалярного поля, которая также приводит к наличию дополнительного слагаемого (нелинейной добавки) в уравнении Клейна-Гордона (1.12), вызванного неминимальным взаимодействием с гравитацией.

Интересно отметить, что уже в 50-ые годы, когда появились первые работы по нелинейным скалярным полям, модель нелинейного комплексного скалярного поля, задан-

ная лагранжианом

$$L = \frac{1}{2}\phi^i\phi_{,i}^* + m^2\phi\phi^* - \frac{\gamma}{2}(\phi\phi^*)^2, \quad (1.23)$$

рассматривалась в качестве теоретической лаборатории в работе [62] (см. также в книге [61], стр.256.) для отработки метода решения задачи о собственных значениях уравнения спинорного поля.

Программа исследования нелинейного уравнения мезонного поля была провозглашена в работе Шиффа [59],[60] при попытке объяснения эффекта ядерного насыщения и оболочечной структуры ядра. "...мы надеемся, что дальнейшие работы в этом направлении будут посвящены изучению других типов мезонных полей и других форм нелинейности, а также проблеме квантования." (цитируется по книге [61], стр.304).

В предложенной модели Шиффа [59],[60] нуклоны являются источниками скалярного поля, которое описывается классическим образом, исходя из лагранжиана

$$L = \frac{1}{2}\phi^k\phi_{,k} - G(\phi) + f(\mathbf{r}, t)F(\phi), \quad (1.24)$$

где $f(\mathbf{r}, t)$ —плотность нуклонных источников, $F(\phi)$ —функция, описывающая нелинейное взаимодействие с источником, $G(\phi)$ —нелинейный потенциал. Если $F(\phi) = \phi$ и $G(\phi) = \frac{1}{2}m^2\phi^2$ (в системе единиц, где $c = \hbar = 1$), то мы переходим к обычной линейной теории. В дальнейшем в работе [59] показано, что тяжелые ядерные системы могут существовать для нелинейного потенциала следующего вида

$$G(\phi) = \frac{1}{2}m^2\phi^2 + \frac{1}{4}\alpha^2\phi^4, \quad (1.25)$$

причем второе слагаемое соответствует точно-контактному отталкиванию между мезонами. Постоянная α определяется из сравнения с экспериментом.

Важно отметить, что аналогичная (1.23)-(1.25) релятивистская полевая модель со спонтанно нарушенной симметрией (модель Голдстоуна) [96]

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\phi^i\phi_{,i}^* + \frac{1}{2}\mu^2\phi\phi^* - \frac{\lambda}{4}(\phi\phi^*)^2, \quad (\lambda, \mu > 0) \quad (1.26)$$

является основой механизма Хиггса наделения массой калибровочных полей [97].

В семидесятые годы активно исследовались различные формы нелинейностей в уравнении Клейна-Гордона. Для удобства последующего изложения запишем нелинейное уравнение Клейна-Гордона в виде

$$\nabla_i\nabla^i\phi + \frac{dV(\phi)}{d\phi} = 0, \quad (1.27)$$

Это уравнение следует из лагранжиана Шиффа (1.24) при отсутствии источников $f(\mathbf{r}, t) \equiv 0$ и $G(\phi) \equiv V(\phi)$, и встречается во многих физических задачах (см., например, в монографии Уизема [50]).

В двумерном случае когда

$$V'(\phi) = \sin \phi$$

нелинейное уравнение Клейна-Гордона (1.27), которое в данном случае имеет историческое название Син-Гордон, исследовалось в XIX веке при изучении поверхностей отрицательной гауссовой кривизны.

Уравнение Син-Гордона, как соответствующее киральному полю $u(x, t) = \exp\{i\varphi(x, t)\}$, принимающему значения в группе $U(1) \cong SO(2)$, рассмотрено в работе Будагова и Тахтаджяна [72]. Исследование решений методом обратной задачи рассеяния (ОЗР) рассмотрено ранее в работе [65] и вошло в монографию Тахтаджяна и Фаддеева [57].

Особый интерес представляют исследования посвященные поискам частицеподобных и солитонных решений нелинейного уравнения Клейна-Гордона. Классическое описание элементарных частиц при помощи локализованных решений уравнений поля является конечной целью таких исследований.

Исследование солитонных решений для массивного скалярного поля с кубической нелинейностью в рамках специальной теории относительности (СТО) проведено в работе Давыдова и Кислухи [63]. Нелинейный потенциал самодействия выбирался в виде

$$V(\phi) = m^2\phi^2 - \frac{\lambda}{2}\phi^4, \quad \lambda > 0, \quad m^2 > 0. \quad (1.28)$$

Полученное решение интерпретируется авторами как устойчивая релятивистская частица³.

Серия работ Барта [66],[67],[68],[69] посвящена исследованию классических и квантовых аспектов теории самодействующего скалярного поля (ССП) более общего вида, чем в работе [63]. Потенциал самодействия был выбран в виде

$$V(\phi) = \frac{\alpha}{2p+2}\phi^{2p+2} + \frac{\lambda}{2}\frac{\phi^{4p+2}}{4p+2}, \quad (p \neq 0, -\frac{1}{2}, -1). \quad (1.29)$$

Найдены плоско-волновые и сферически-симметричные решения, некоторые из которых анализируются в квантовом случае.

Отметим также исследования осциллирующих частицеподобных решений нелинейного уравнения Клейна-Гордона с потенциалом самодействия (1.28) предпринятые в работе Боголюбовского [70].

В работе [71] представлено точное решение солитонного типа для хиггсовского скалярного поля с таким же потенциалом самодействия (1.28). Гетмановым предложена модель [76], где рассматривается комплексное хиггсовское скалярное поле с лагранжианом

$$L = \frac{|\partial_\mu \psi|^2}{1 - \lambda^2 |\psi|^2} - m^2 |\psi|^2 \quad (1.30)$$

как вполне интегрируемая гамильтонова система. Найден явный вид N-солитонных решений с асимптотикой $|\psi| \rightarrow \lambda^{-1}$ при $|x| \rightarrow \infty$.

Условие существования солитоноподобных решений в теории СП в случае D-мерного пространства-времени исследовано в работе [73]. Для уравнения поля

$$\frac{1}{r^{D-1}} \frac{d}{dr} \left\{ r^{D-1} \frac{d\phi}{dr} \right\} - \kappa^2 \phi^2 + g^2 \phi^{p-1} - a\phi^{q-1} = 0. \quad (1.31)$$

найден пример устойчивых солитонов в $(\phi^4 - a\phi^6)$ теории поля.

Сферически-симметричные решения для комплексной теории поля, описываемой динамическим уравнением

$$\phi_{tt} - \phi_{xx} + m^2 \phi - \phi F(|\phi|^2) = 0, \quad (1.32)$$

³Вопрос устойчивости данного решения вызывает дополнительную дискуссию.

исследовались на устойчивость в работе [74].

Теория самодействующего комплексного скалярного поля с лагранжианом

$$L = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi^* - \phi \phi^* + F(\phi \phi^*) \quad (1.33)$$

рассматривалась в работе [75]. Исследовались регулярные сферически-симметричные решения для

$$F' = \begin{cases} 0, & \phi^2 < a \\ \lambda \ln(\alpha \phi^2), & \phi^2 \geq a \end{cases}$$

Здесь $\lambda = const$, $\alpha = 1/a$.

Работа Кумара [84] посвящена поиску зарядово-стабильных решений в моделях конфайнмента, описываемых теорией заряженного скалярного поля

$$L = -\frac{1}{2} F(s, p, q),$$

$$s = \phi^* \phi; \quad p = -\partial \phi^* \partial \phi; \quad q = I_\mu I^\mu; \quad \mu = 0, 1, 2, 3;$$

$$I_\mu = \frac{i}{2} \{ \phi^* \partial_\mu \phi - \partial_\mu \phi^* \phi \}.$$

Рассмотрены две конкретные модели для заданной функции F .

Отметим, что в данном разделе не ставится целью дать исчерпывающий обзор по всем работам, связанным с поиском частицеподобных, солитонных решений и применением метода ОЗР в теории нелинейного уравнения Клейна-Гордона, однако указывается тенденция изучения данного уравнения в рамках классической теории поля.

Как уже отмечалось, интерес к таким исследованиям продиктован надеждой построения реалистических моделей протяженных частиц на основе солитонных решений. В частности, в работе [82] рассматриваются нелинейные теории комплексного скалярного поля с зарядом. Отмечается локализованность решений с ненулевым зарядом, которые в случае статического сферически-симметричного состояния могут интерпретироваться как классический конфайнмент: заряд и энергия в нижнем энергетическом состоянии такой системы "замурованы" в конечном объеме (мешке).

В работе Чаудхари [83] найдена пара Лакса (в двумерном случае), которая приводит к нелинейному уравнению Клейна-Гордона с потенциалом

$$V(\phi) = \phi^m a_m, \quad m = 2, 3, 4. \quad (1.34)$$

Аналогичную модель, при $a_3 = 0$, геометрическими методами исследовал Джеффри [89].

Исследование системы нелинейных скалярных и спинорных полей с учетом неминимального взаимодействия выполнено в работе [85]. Лагранжиан рассматриваемой модели выбирался в виде

$$L = -\frac{1}{2} \phi_{,\mu} \phi^{,\mu} - \lambda \phi^4 - \frac{1}{2} \bar{\psi} \gamma^\mu \overleftrightarrow{\partial}_\mu \psi - \frac{3}{4} f(\bar{\psi} \psi)^{4/3} + g \bar{\psi} \psi \phi. \quad (1.35)$$

В работе [86] рассматривались модели конфайнмента в (2+1)-мерном пространстве-времени для комплексного скалярного поля для фракционной модели $V(\phi) = \lambda \phi^{2-\alpha}$ и

в полиномиальной модели $V(\phi) = a_4\phi^4 + a_6\phi^6$. Адронные свойства полученных в работе солитонных решений исследовались численными методами.

Численными методами исследовалась устойчивость решений для нелинейного уравнения Клейна-Гордона с различными типами нелинейностей: Хиггса

$$V(\phi) = \frac{1}{4}(\phi^2 - 1)^2, \quad (1.36)$$

Sin-Гордона

$$V(\phi) = 2 \sin(\phi/2), \quad (1.37)$$

и кубической нелинейностью

$$V(\phi) = \frac{1}{2}\phi^2 \left[1 - \frac{1}{2}\phi^2 \right], \quad (1.38)$$

в работе [87].

Сингулярные решения уравнения гиперболического Sin-Гордона исследовались в работе Погребкова [88].

Двумерная модель с нелинейностью Лиувилля

$$V(\phi) = \lambda e^\phi, \lambda = const \quad (1.39)$$

рассматривалась в работах [77], [78]

В дальнейшем, потенциалы, аналогичные приведенным в данном разделе, рассматривались в моделях самогравитирующего скалярного поля как потенциалы, разумные с физической точки зрения.

1.3. Самогравитирующие скалярные поля

В теории гравитации нелинейные скалярные поля значительно усложняли исследование с математической точки зрения. Одной из первых работ, где рассматривается нелинейное скалярное поле в ОТО является работа [64], в которой исследовалось безмассовое скалярное поле. Лагранжиан модели самогравитирующего нелинейного безмассового скалярного поля выбирался в виде

$$L = \frac{R}{2\kappa} + \frac{1}{2}\phi_{,i}\phi^{,i} + \frac{\gamma}{2}F(\phi)\{\phi_{,i}\phi^{,i}\}, \quad (1.40)$$

где γ -параметр нелинейности, $F(\phi)$ -функция скалярного поля ϕ . Рассматривался случай статических аксиально-симметричных гравитационных полей. Отметим, что исходный лагранжиан (1.40) может быть приведен к стандартной модели безмассового скалярного поля, вообще говоря, нелинейным преобразованием

$$\tilde{\phi} = \int \sqrt{1 - \gamma F(\phi)} d\phi.$$

Как направление исследования нелинейного скалярного поля в ОТО может рассматриваться исследование неминимально взаимодействующего с гравитацией скалярного поля. Представим лагранжиан такой теории в виде трех слагаемых

$$L = L_g + L_{sf} + L_{int},$$

где L_g - лагранжиан гравитационного поля, L_{sf} - лагранжиан скалярного поля, L_{int} - лагранжиан взаимодействия полей. Взаимодействие вида

$$L_{int} = \frac{1}{2}\xi R\phi^2, \quad (1.41)$$

где ξ - произвольный параметр, может рассматриваться как обобщение конформно-инвариантной связи [21],[25], когда $\xi = 1/6$. Этого типа модели исследовались, например, в работе [79]. В работе Коркиной [80] найдено обобщение решения Фишера (1.5) для модели с обобщенной конформной связью.

Что касается моделей с конформной связью, то значительный прогресс был достигнут в работе Бекенштейна [34], где был предложен метод генерирования решений из модели скалярного поля с минимальным взаимодействием.

В работе [81] рассматривалось самогравитирующее нелинейное скалярное поле с потенциалом самодействия

$$V(\phi) = -\frac{1}{2} \left[\frac{\mu}{f} \right]^2 (1 - f^2\phi^2) \phi^2. \quad (1.42)$$

Численным интегрированием системы уравнений ЭКГ найдено решение типа "кинк" в сферически-симметричном случае.

Исследование самогравитирующего нелинейного скалярного поля в ОТО с кубической нелинейностью, с нелинейностью Лиувилля и Хигса, с нелинейностью типа Син-Гордон было предпринято в серии работ Г.Г. Иванова [90],[91],[92]. В цитируемых работах были получены точные аналитические решения во вселенной Фридмана, для

статической сферически-симметричной и плоско-симметричной метрики, а также для конформно-плоских пространств.

Нелинейное скалярное поле также широко изучалась в 80-ые годы в моделях инфляционной космологии. Однако, акцент на поиски точных решений в таких моделях появляется лишь в начале 90-ых годов. Обзор работ и основные результаты для инфляционного сценария будут представлены в отдельной главе.

1.3.1. Скалярные поля в конформно-плоских пространствах

Поскольку класс метрик ФРУ принадлежит к классу конформно-плоских пространств рассмотрим пространства с линейным элементом

$$dS^2 = A(x^3, x^4)\{- (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2 + (dx^4)^2\} \quad (1.43)$$

Используя идею тонкой подстройки потенциала (которая подробно будет изложена в пятой главе) из уравнений ЭКГ (1.3) выразим потенциал $V(\phi)$ и ϕ_4^2 через конформный множитель $A(x^3, x^4)$ и его производные

$$V(\phi(x^3, x^4)) = \kappa^{-1} \frac{A_{33} - A_{44}}{2A^2} \quad (1.44)$$

$$\phi_3^2 + \phi_4^2 = \kappa^{-1} \left\{ -\frac{A_{33} + A_{44}}{A} + \frac{3(A_3^2 + A_4^2)}{2A^2} \right\}. \quad (1.45)$$

Здесь нижний индекс означает частную производную по соответствующей координате: $A_{33} = \frac{\partial}{\partial x^3} \left(\frac{\partial A}{\partial x^3} \right)$.

Будем искать потенциал $V(\phi)$ и ϕ_4^2 задавая гравитационный потенциал в нужном нам режиме $A(x^3, x^4)$. Определив из уравнений (1.44)-(1.45) $V(t)$ и $\phi(t)$ (скалярное поле определяется по крайней мере в квадратурах) можно найти параметрическую зависимость $V(\phi)$. В некоторых частных случаях удастся найти явную зависимость V как функцию от ϕ .

1.3.2. Космологические и статические решения

Рассмотрим несколько примеров которые иллюстрируют метод тонкой подстройки потенциала.

- Пусть $A = A_0 e^{H_0 \eta}$, $\eta = x^4$. Решение (1.44)-(1.45) принимает вид

$$V(\phi(\eta)) = -\frac{H_0^2}{\kappa A_0} e^{\mp \sqrt{2\kappa} \phi}, \quad (1.46)$$

$$\phi = \pm \frac{H_0}{\sqrt{2\kappa}} \eta. \quad (1.47)$$

- Пусть $A = A_0 e^{H_0 z}$, $z = x^3$. Тогда решение (1.44)-(1.45) таково

$$V(\phi(z)) = \frac{H_0^2}{\kappa A_0} e^{\mp \sqrt{2\kappa} \phi}, \quad (1.48)$$

$$\phi = \pm \frac{H_0}{\sqrt{2\kappa}} z. \quad (1.49)$$

Оба случая (1.46) и (1.48) соответствуют нелинейности Лиувилля для потенциала $V(\phi)$. Такие решения были получены в работе [90] в предположении лиувиллевской формы потенциала $V(\phi)$ при постановке задачи. Ясно, что космологическое решение (1.46) и (1.47) соответствует частному решению степенной инфляции [140], которое записано в конформном времени η .

- Пусть $A = e^\beta$, где $\beta = \frac{1}{2}c_1\eta^2 + c_2\eta + c_3$. Тогда, интегрируя (1.44) и (1.45) можно получить

$$V(\phi(\eta)) = -\kappa^{-1}e^{-\beta}\{c_1 + (c_1\eta + c_2)^2\}, \quad (1.50)$$

$$\phi(\eta) = \pm \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\kappa c_1}} \left\{ \frac{1}{2} \tilde{\eta} \sqrt{\tilde{\eta}^2 - c_1} - \frac{1}{2} c_1 \ln |\tilde{\eta} + \sqrt{\tilde{\eta}^2 - c_1}| \right\}, \quad (1.51)$$

$$\tilde{\eta} = \frac{c_1\eta + c_2}{\sqrt{2}}. \quad (1.52)$$

- Пусть $A = e^\beta$, где $\beta = \frac{1}{2}c_1z^2 + c_2z + c_3$. Ввиду симметрии уравнений (1.44) и (1.45) по отношению к x^3 и x^4 (с точностью до знака) мы можем найти статистический аналог для космологического решения (1.50) и (1.52) используя замены: $\eta \rightarrow z$, $V(\phi(\eta)) \rightarrow -V(\phi(z))$.
- Пусть $A = e^\beta$, где $\beta = \frac{a_1}{12}\eta^4 + a_3$. Тогда потенциал может быть представлен в виде

$$V(\phi(\eta)) = -\kappa^{-1}e^{-\beta}\left\{a_1\eta^2 + \frac{a_1^2}{9}\eta^6\right\}. \quad (1.53)$$

Скалярное поле определяется по формуле

$$\phi(\eta) = \pm \frac{3}{2a_1\sqrt{2\kappa}} \left\{ \frac{1}{2} \tilde{\eta} \sqrt{\tilde{\eta}^2 - c_1} - \frac{1}{2} c_1 \ln |\tilde{\eta} + \sqrt{\tilde{\eta}^2 - c_1}| \right\}, \quad (1.54)$$

где $\tilde{\eta} = \frac{a_1\eta^2}{3}$

- Пусть $A = e^\beta$, где $\beta = \frac{a_1}{12}z^4 + a_3$. Статический аналог может быть получен из предыдущего случая при помощи замены: $\eta \rightarrow z$, $V(\phi(\eta)) \rightarrow -V(\phi(z))$.

Следует отметить, что перечень аналитических решений может быть расширен. Для этого нужно решить (1.45) для заданного гравитационного поля $A(x^3, x^4)$.

1.3.3. Решения солитонного типа

Пусть $A = A(\theta)$, $\phi = \phi(\theta)$, где $\theta = z - u_0\eta$. Это означает, что мы ищем решения типа уединенной волны. Уравнения (1.44)-(1.45) преобразуются к следующему виду

$$V(\phi(\theta)) = \kappa^{-1}(1 - u_0^2) \frac{A_{\theta\theta}}{2A^2} \quad (1.55)$$

$$\phi_\theta^2 = \kappa^{-1} \left\{ -\frac{A_{\theta\theta}}{A} + \frac{3A_\theta^2}{2A^2} \right\}. \quad (1.56)$$

Используя подобие формы уравнений (1.55)-(1.56) уравнениям для космологических и статических решений рассмотренных выше можно прийти к выводу, что на основе

решений, полученных в предыдущем параграфе можно построить решения солитонного типа, используя подстановки:

$$\eta \rightarrow \theta, V(\phi(\eta)) \rightarrow \pm(1 - u_0^2)^{-1}V(\phi(\theta)).$$

Интересно отметить, что когда $u_0^2 = 1$, то есть u_0^2 равно скорости света, потенциал зануляется.

1.3.4. Массивное скалярное поле

Массивное скалярное поле может рассматриваться как простейшая модель хаотической инфляции [137]. Анализ модели хаотической инфляции базируется на асимптотическом решении когда $m \ll 1$, $\phi \gg 1$. Поиск точных решений в рамках ОТО с массивным скалярным полем представляет собой пример нерешенной проблемы. Чтобы понять причину этой проблемы зафиксируем потенциал

$$V(\phi) = \frac{1}{2}m^2\phi^2 \quad (1.57)$$

в общих формулах (1.44)-(1.45). После некоторых преобразований с (1.44)-(1.45), используя (1.57) можно найти уравнение, которое является тестом для точного решения самогравитирующего массивного скалярного поля в конформно-плоских пространствах (1.43).

$$\frac{1}{2m^2} \left[\left(\frac{A_{44}}{2A^2} \right)_4 \right]^2 + \frac{A_{44}}{2A^2} \left(\frac{3}{2} \frac{A_4^2}{A^2} - \frac{A_{44}}{A} \right) = 0. \quad (1.58)$$

Точное решение вида $A = A_0\eta^{-2}$ приводит к постоянному скалярному полю $\phi = const$ и может быть идентифицировано с решением для гравитационного вакуума с постоянным потенциалом, дающим эффективную космологическую постоянную $V(\phi) = const = \Lambda$.

Таким образом доказано следующее утверждение:

Точное решение для самогравитирующего массивного скалярного поля в конформно-плоских пространствах удовлетворяет уравнению (1.58) относительно функции $A(x^4)$.

Теперь становится понятным, что трудности, связанные с поиском точных решений для массивного скалярного поля в ОТО, так или иначе связаны с необходимостью интегрировать нелинейное дифференциальное уравнение третьего порядка. Тем не менее полученное уравнение (1.58) можно использовать для оценки отклонения численных и асимптотических решений от точных.

Глава 2.

Нелинейные сигма модели

2.1. "Сигма" терминология

Впервые понятие о σ -поле и σ -частице встречается в работе Швингера [98] 1957 года "Теория фундаментальных взаимодействий". Эта работа, посвященная развитию теории фундаментальных взаимодействий, содержит попытку описать известный в то время набор элементарных частиц в рамках теории квантованных полей. Для описания массивных, сильно-взаимодействующих частиц использовались поля с наименьшими значениями спина – 0 и 1/2, соответствующими статистикам Бозе-Эйнштейна и Ферми-Дирака. (Поля спина 1 со статистикой Бозе-Эйнштейна не рассматривались, так как предполагалось, что эти поля относятся к другому семейству частиц, для которого электромагнитное поле может быть специальным случаем.) При таком ограничении значений спина источник разнообразия наблюдаемых частиц связан со внутренними степенями свободы, которые могут быть представлены соответствующей свободой преобразований в пространстве внутренних симметрий (изотопическом пространстве). При рассмотрении 4-мерного пространства симметрий заряженный триплет π -мезонов, по мнению Швингера, должен дополняться неизвестным (σ) синглетом, который должен быть в значительной степени нестабильным и быстро распадаться на два π -мезона. Различные следствия существования такого гипотетического σ -поля, включая возможность установить динамическое соответствие между лептонами и сильно-взаимодействующими частицами, также обсуждаются в работе [98], где основной акцент сделан на анализе преобразований симметрии и общих свойств лагранжиана мезон-нуклонных взаимодействий.

Работа Скирме [100] "Нелинейная теория сильных взаимодействий" в своей основе содержит идею введения дополнительного σ -поля, которое обозначено как ϕ_4 . Это мезонное поле ϕ_4 , как полагает Скирме, не является независимым, а формирует вместе с остальными тремя мезонными полями $\phi_i (i = 1, 2, 3)$ вектор постоянной длины в четырехмерном евклидовом (изоспиновом) пространстве. То есть во всех точках x пространства-времени выполняется ограничение (конструкция):

$$\sum_{\rho=1}^4 \phi_{\rho}^2(x) = Q^2. \quad (2.1)$$

Такое ограничение немедленно приводит к проблеме массы мезонного поля, которая может решаться предположением о генерировании массы мезона из взаимодействия с нуклонным полем. Однако Скирме выбирает другую возможность и лагранжиан, на котором строится нелинейная теория мезон-нуклонных взаимодействий, представлен в виде

$$L_{MN} = -\frac{1}{2} \sum (\partial_{\mu} \phi_{\rho})^2 + \frac{1}{4} \gamma^2 \sum \phi_{\rho}^4 - L_{int}, \quad (2.2)$$

где

$$L_{int} = \bar{\Phi} \{i\gamma_{\mu} \partial^{\mu} + g(\phi_4 + i\vec{\pi}\vec{\tau}\gamma_5)\} \Phi. \quad (2.3)$$

Причем, следует помнить, что на мезонное поле накладывается ограничение (2.1).

После изучения симметрий в рассматриваемой модели и их интерпретации в понятиях квантовой теории поля в работе [100] рассматривается упрощенная модель, где размерности пространства-времени и изотопического спинового пространства снижены до двух. Такой подход позволил проанализировать решения классического уравнения

мезонного поля и более детально рассмотреть двумерную версию нелинейной квантовой теории поля.

Статья Гелл-Манна и Леви [122] "Аксиальный векторный ток в бета распаде" часто цитируется как работа, в которой впервые введен термин линейная и нелинейная σ -модель (см., например, [99], с.207.) Лагранжиан линейной сигма модели может быть представлен в виде [99]

$$L_{LSM} = L_{int} + \frac{1}{2}\{(\partial\pi)^2 + (\partial\sigma)^2\} - \frac{(\mu)^2}{2}(\sigma^2 + \pi^2) - \frac{\lambda}{4}(\sigma^2 + \pi^2)^2 + c\sigma = L_s + c\sigma, \quad (2.4)$$

причем в L_{int} (2.3) следует заменить ϕ_4 на σ . Несложно заметить, что отличие от лагранжиана Скиме (2.2) заключается в отсутствии конструкции (2.1), но при наличии перекрестного взаимодействия $\sigma^2\pi^2$ и, главное, слагаемого $c\sigma$, нарушающего киральную симметрию.

Нелинейная сигма модель (НСМ) формируется при введении ограничения (2.1), из которого σ -поле можно выразить через π -поле. Термин "нелинейная" связан с нелинейной реализацией киральной группы на многообразии, определяемом соотношением

$$\sigma^2(x) + \vec{\pi}^2(x) = f_\pi^2, \quad (2.5)$$

эквивалентным (2.1).

Чтобы перейти к вопросам анализа геометрического способа введения нелинейности, реализующей киральную симметрию, рассмотрим чисто бозонную НСМ. Отвлекаясь таким образом от спинорной (нуклонной) составляющей киральной σ -модели Швингера–Скиме–Гелл-Манна–Леви, отметим, что в дальнейшем метод кирально-инвариантной сигма модели получил существенное развитие в физике элементарных частиц, как альтернативный алгебре токов, но несколько проще его в вычислительных аспектах [121],[103].

2.1.1. Бозонные нелинейные сигма модели

Киральные НСМ, которые первоначально были определены в четырехмерном пространстве-времени Минковского, оказались не (пе)ренормируемые как квантово-полевые модели. Кроме того, огромный успех неабелевых калибровочных теорий в описании элементарных частиц отодвинул исследования киральной НСМ на второй план. Только после работ 1975 года Полякова [104] и Белавина–Полякова [118], в которых найдены инстантонные решения в двумерной чисто бозонной НСМ, интерес к исследованию киральных моделей¹ значительно возрос, причем как с физических так и с математических позиций (см. обзоры [114],[115],[108]).

Запишем интеграл действия кинетической бозонной НСМ, определенной на пространственно-временном многообразии $(\mathcal{M}, \mathbf{g})$, в виде

$$S_{KNSM} = \int_{\mathcal{M}} \sqrt{g} d^m x \left(\frac{1}{2} h_{AB} \varphi_{,i}^A \varphi_{,k}^B g^{ik} \right), \quad (2.6)$$

¹В работе Переломова [114] термины "нелинейная сигма модель" и "киральная модель" рассматриваются как эквивалентные

где $(\mathcal{M}, g_{ik}(x))$ – m -мерное пространство - время, $(\mathcal{N}, h_{AB}(\varphi))$ – n -мерное киральное пространство полей $\varphi = (\varphi^1, \dots, \varphi^n)$, $g = |\det(g_{ik})|$, $\varphi_k^A = \partial_k \varphi^A = \varphi_{,k}^A$.

Тензор энергии-импульса кинетической бозонной НСМ (2.6) имеет вид

$$T_{ik} = h_{AB} \varphi_i^A \varphi_k^B - g_{ik} \frac{1}{2} h_{AB} \varphi_m^A \varphi_n^B g^{mn}. \quad (2.7)$$

Киральные поля $\varphi^C(x)$ задают отображение пространства-времени в пространство полей (пространство целей или киральное пространство) $(\mathcal{N}, \mathbf{h})$. Если функции удовлетворяют уравнениям движения

$$\frac{1}{\sqrt{g}} \partial_i (\sqrt{g} g^{ik} h_{AB} \varphi_k^B) - h_{CD} \Gamma_{AB}^D \varphi_i^B \varphi_k^C g^{ik} = 0, \quad (2.8)$$

следующих из принципа минимального действия варьированием по полям, то такие отображения называют гармоническими. Теория гармонических отображений была предложена в работе [105]. Результаты этих исследований будут представлены по мере необходимости. Здесь отметим тот факт, что инстантонные решения Белавина – Полякова были известны в теории гармонических отображений восемью годами раньше [105].

Интерес к двумерным моделям связан с тем фактом, что именно они во многом схожи с четырехмерными неабелевыми калибровочными теориями поля. Решения солитонного характера для НСМ, определенной на двумерном пространстве лоренцевой сигнатуры, были исследованы в работах [102],[107]. В рамках $SO(3)$ -инвариантной НСМ инстантонные решения были найдены в работе [118], меронные решения – в работе [124], эллиптические решения – в работе [111]. Пример точного частного решения получен в работах [?, 126]. С помощью инвариантно-группового метода в работах [93],[166] найдено новое семейство точных решений, связанных с изометрическими и гомотетическими симметриями евклидоваго двумерного пространства \mathbb{R}^2 . В работе [166] показано, что решения инстантонного, меронного и эллиптического типов, являются частным случаем полученного семейства решений.

Важным методом исследования нелинейной сигма модели является метод обратной задачи рассеяния и поиски солитонных решений. Интегрируемые гамильтоновы системы, связанные с двумерными НСМ, рассматривались в работе Полмейера [102], в которой впервые были найдены решения солитонного типа для $SO(3)$ -инвариантной НСМ. Более подробный анализ релятивистски-инвариантных моделей, которые допускают применение схемы МОЗР, изучались в работах [107],[130].

Исследование классических свойств и симметрий в двумерных сигма моделях проведены в работах [118]-[126].

Геометрические связи между НСМ, калибровочными теориями и ОТО рассматривались в работах [?, 119, 108]. Соотношения с теорией релятивистской струной и другими теориями поля исследованы в статьях [?, ?, ?]. Обзоры Переломова [114, 115] посвящены геометрическим аспектам киральных моделей, а также изучению класса инстантонных решений в таких моделях. Свойства классических уравнений НСМ исследовались в работах [?, ?, ?]. Связь двумерных НСМ с моделями изотропного ферромагнетика рассматривались в работах [118, 120]; в работе [167] такие модели получены редукцией четырехмерной нелинейной сигма-модели к моделям с нарушенной киральной симметрией. Топологические свойства двумерной $O(3)$ -инвариантной НСМ рассматривались в [131]. НСМ с нетривиальной внутренней структурой (в частности при наличии кручения) изучались в работе [132].

Изучение четырехмерных НСМ стало возможным при рассмотрении их взаимодействия с гравитационным полем [125]. В работах [123, 113] предприняты попытки обобщения НСМ на случай четырехмерия, которые, однако оказались бесперспективными. Последовательное изучение четырехмерных НСМ, взаимодействующих с метрическим тензорным полем, и изучение связей с теорией гармонических отображений предпринято в работах [112]-[134].

Эффективные киральные модели гравитационных полей, калибровочных теорий и релятивистской струны рассматривались различными авторами в работах [116]-[128].

Нелинейные сигма модели с дополнительной структурой кирального пространства, некоторые специальные вопросы, связанные с квантованием НСМ, обобщения разного характера представлены в работах [133]-[135]. Квантовые аспекты теории солитонов и инстантонов в теориях поля, включая и сигма модели, также представлены в монографии Раджарамана [6].

2.2. Двухмерная $SO(3)$ нелинейная сигма модель

Двухмерные нелинейные сигма-модели (2-НСМ) допускают широкий спектр точных решений, имеющих физическую и геометрическую интерпретацию: решения солитонного, инстантонного и меронного типов, которые были открыты и подробно исследованы в рамках $SO(3)$ -инвариантной НСМ [118],[102],[124]. Особое значение имеют решения инстантонного и меронного типов: именно они подчеркивают аналогию 2-НСМ с 4-мерными неабелевыми калибровочными теориями [114]. Однако в работе [120] показано, что d -мерные евклидовы НСМ при $d > 2$ не имеют решений с конечным действием, т.е. решений типа инстантов.

Рассматривая НСМ, взаимодействующую с метрическим полем общеинвариантным способом, удалось найти решения типа инстантон и мерон для $d = 4$, и преодолеть ряд трудностей, возникающих при переходе к 4-мерным НСМ [125]. Такой подход позволил авторам [113],[109], [110], [93] привлечь геометрические методы: метод гармонических отображений, изометрических погружений и инвариантно-групповой метод для получения и анализа точных решений в 4-НСМ.

В настоящем разделе, используя инвариантно-групповой подход к нелинейным сигма моделям [95],[93], найдено новое семейство точных решений $SO(3)$ НСМ, отвечающих изометрическим и гомотетическим симметриям пространства E^2 . Показано, что решения типа инстантон, мерон и интерполирующие между ними (эллиптические) решения [111] соответствуют изометрическому вращению E^2 и кирального пространства S^2 . Указанные решения содержатся как частный случай в полученном семействе точных решений.

В разделе 2.2.1 излагается инвариантно-групповой подход к НСМ общего вида, определенной на римановом многообразии V_n . Постулируются условия связи между изометрическими и гомотетическими симметриями V_n и изометриями кирального поля U_N (пространства значений мультиплетных скалярных полей), полученные в [93] для самогравитирующих НСМ.

В разделе 2.2.2 решены групповые условия связи для подгруппы трансляций $V_n \equiv E^2$ в рамках $SO(3)$ НСМ. На основе полученных решений строятся классы решений полевых уравнений модели.

В разделе 2.2.3 условия связи решены для вращений и гомотетий.

2.2.1. Изометрические и гомотетические симметрии

В НСМ общего вида киральное поле описывается мультиплетом N (действительных) скалярных полей $\varphi^A(x)$, принимающих свои значения на (действительном) римановом многообразии U_N с метрикой $h_{AB}(\varphi^C)$; $A, B, \dots = 1, \dots, N$.

Лагранжиан кинетической НСМ, определенной на римановом многообразии V_n с метрикой $g_{ik}(x^j)$, $i, j, k = 1, 2, \dots, n$ имеет вид:

$$L_{KNSM} = \frac{1}{2} h_{AB} \varphi^A_{,i} \varphi^B_{,k} g^{ik}. \quad (2.9)$$

Соответствующие (2.9) полевые уравнения таковы:

$$\frac{1}{\sqrt{|g|}} \partial_{,i} \left(\sqrt{|g|} g^{ik} h_{CB} \varphi^B_{,k} \right) - \frac{1}{2} g^{ik} \frac{\partial h_{AB}}{\partial \varphi^C} \varphi^A_{,i} \varphi^B_{,k} = 0 \quad (2.10)$$

Тензор энергии-импульса (ТЭИ) кирального поля имеет вид:

$$T_{ik} = \left(h_{AB} \varphi^A_{,i} \varphi^B_{,k} - \frac{1}{2} g_{ik} h_{CD} \varphi^C_{,n} \varphi^D_{,m} g^{nm} \right) \quad (2.11)$$

Сделаем предположение о наличии групповых симметрий координатного пространства V_n и кирального пространства U_N . Бесконечно малое преобразование $\delta x^i = \xi^i(x)$ отвечает изометрическому движению, если выполняются уравнения Киллинга:

$$\xi_{i;k} + \xi_{k;i} = 0, \quad (2.12)$$

где (;) означает ковариантную производную. Векторное поле $\xi^i(x)$ задает гомотетическое движение, если

$$\xi_{i;k} + \xi_{k;i} = \lambda g_{ik}, \quad \lambda = const. \quad (2.13)$$

Пусть V_n допускает группу изометрических и гомотетических движений G_r с r линейно независимыми векторами изометрических (или гомотетических) движений $\xi_\alpha^i(x)$ и структурными константами $C_{\beta\gamma}^\alpha$. Пусть U_N допускает группу изометрических движений G_s с s линейно независимыми векторами Киллинга $\zeta_a^A(\varphi)$ и структурными константами C_{bc}^a . Связь между симметриями V_n и U_N , по аналогии с результатом в работе [93], постулируем в виде:

$$\begin{aligned} \xi_\alpha^i \partial_i \varphi^A &= K_\alpha^a \zeta_a^A, \quad K_\alpha^a = const, \\ (\alpha &= 1, \dots, r; \quad a = 1, \dots, s). \end{aligned} \quad (2.14)$$

Справедливость (2.14), в отсутствие взаимодействия с гравитационным полем, можно постулировать для некоторых подгрупп группы G_r . Условия интегрируемости (2.14) приводят к соотношениям на коэффициенты K_α^a :

$$K_\gamma^a C_{\alpha\beta}^\gamma = K_\alpha^b K_\beta^c C_{bc}^a.$$

Рассмотрим $SO(3)$ -инвариантную НСМ на евклидовом пространстве E^2 : $ds^2 = (dx^1)^2 + (dx^2)^2$ с пространством значений S^2 : $ds_\sigma^2 = d\chi^2 + \sin^2 \chi d\theta^2$. Тогда лагранжиан, полевые уравнения и компоненты ТЭИ согласно формулам (2.9-2.11) принимают следующий вид:

$$L = \frac{1}{2} (\chi_1^2 + \chi_2^2 + \sin^2 \chi (\theta_1^2 + \theta_2^2)) \quad (2.15)$$

$$\chi_{11} + \chi_{22} - \sin \chi \cos \chi (\theta_1^2 + \theta_2^2) = 0 \quad (2.16)$$

$$\partial_1 (\sin \chi \theta_1^2) + \partial_2 (\sin \chi \theta_2^2) = 0$$

$$T_{11} = -T_{22} = \frac{1}{2} ((\chi_1^2 - \chi_2^2) + \sin^2 \chi (\theta_1^2 - \theta_2^2)) \quad (2.17)$$

$$T_{12} = \chi_1 \chi_2 + \sin^2 \chi \theta_1 \theta_2$$

$$\chi_i \equiv \partial_i \chi, \quad \chi_{ij} \equiv \partial_j \chi_i.$$

Используя изометрическое погружение в трехмерное евклидово пространство E^3 , введем киральное поле $n_i(x)$: $n^i n_i = 1$, связанное с χ, θ соотношениями:

$$n^1 = \sin \chi \cos \theta, \quad n^2 = \sin \chi \sin \theta, \quad n^3 = \cos \chi. \quad (2.18)$$

Интегрируя уравнения (2.12), (2.13), находим линейно независимые векторы Киллинга и вектор гомотетического движения:

$$\xi_1^i = \delta_1^i, \xi_2^i = \delta_2^i, \xi_3^i = x^2 \delta_1^i - x^1 \delta_2^i, \xi_4^i = \frac{\lambda}{2}(x^1 \delta_1^i + x^2 \delta_2^i) \quad (2.19)$$

Группе движений S^2 соответствуют векторы Киллинга:

$$\begin{aligned} \zeta_1^A &= -\sin \theta \delta_1^A - \cos \theta \operatorname{ctg} \chi \delta_2^A; \\ \zeta_2^A &= \cos \theta \delta_1^A - \sin \theta \operatorname{ctg} \chi \delta_2^A \\ \zeta_3^A &= \delta_2^A. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Условия связи (2.14) с использованием (2.20) принимают вид:

$$\begin{aligned} \xi_\alpha^i \chi_i &= -K_\alpha^1 \sin \theta + K_\alpha^2 \cos \theta; \\ \xi_\alpha^i \theta_i &= -K_\alpha^1 \cos \theta \operatorname{ctg} \chi - K_\alpha^2 \sin \theta \operatorname{ctg} \chi + K_\alpha^3. \end{aligned} \quad (2.21)$$

В дальнейшем рассмотрим уравнения (2.21) для однопараметрических групп E^2 :

- трансляций, задаваемых вектором ξ_1^i (или ξ_2^i);
- вращений, задаваемых вектором ξ_3^i ;
- гомотетий, задаваемых вектором ξ_4^i ;

2.2.2. Подгруппа трансляций

Для трансляций уравнения (2.21) принимают вид:

$$\begin{aligned} \chi_1 &= -a \sin \theta + b \cos \theta, \\ \theta_1 &= -\operatorname{cth} \chi (a \cos \theta + b \sin \theta) + m. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Здесь введены обозначения для констант $K_1^1 = a$, $K_1^2 = b$, $K_1^3 = m$. Далее для интегрирования полевых уравнений удобно выделить четыре случая:

- (А) $a = b = m = 0$;
- (Б) $a = b = 0; m \neq 0$;
- (В) $a^2 + b^2 \neq 0; m = 0$;
- (Г) $a^2 + b^2 \neq 0; m \neq 0$.

Первые три случая подробно исследованы в [95], где приведены соответствующие решения. Исследование случая (Г) завершает поиск всех точных решений двумерной $SO(3)$ -инвариантной НСМ, связанных с изометрическими и гомотетическими симметриями [166].

(А). Интегрирование (2.22) дает $\chi = \chi(x^2)$, $\theta = \theta(x^2)$. При этом полевые уравнения (2.17) переходят в систему обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка, которые имеют решение:

$$\begin{aligned}\chi &= \arccos \left(\frac{1}{\alpha_1} \sqrt{\alpha_1^2 - \alpha_0^2 \cos(\alpha_1 x^2)} \right), \\ \theta &= \operatorname{arctg} \left[\frac{\alpha_1}{\alpha_0} \tan(\alpha_1 x^2) \right], \\ \alpha_1^2 &> \alpha_0^2, \alpha_1, \alpha_0 - \text{const},\end{aligned}\tag{2.23}$$

Ненулевые компоненты ТЭИ (2.18):

$$T_{11} = -T_{22} = -\frac{\alpha_1^2}{2}.$$

(Б). Интегрирование системы (2.22) дает:

$$\chi = \chi(x^2), \theta = mx^1 + f(x^2).\tag{2.24}$$

Полевые уравнения (2.17) после замены $v = \cos \chi$ сводятся к уравнениям первого порядка:

$$f_2' = \frac{\alpha_0}{1 - v^2},\tag{2.25}$$

$$(v_2') = m^2 v^4 - (\alpha_1 + 2m^2) v^2 + \alpha_1 + m^2 - \alpha_0^2,\tag{2.26}$$

которые допускают общее решение в эллиптических функциях Якоби. Компоненты ТЭИ для класса решений (2.25) имеют вид:

$$T_{11} = -T_{22} = -\frac{1}{2}\alpha_1, \quad T_{12} = \frac{1}{2}m\alpha_0.\tag{2.27}$$

(В). Интегрируя (2.22), находим:

$$\begin{aligned}\chi &= \arccos [\sin(\mu x^2) \sin(px^1 + B(x^2))], \\ \theta &= \theta_0 + \arcsin \left(\frac{\sin \mu \cos\{(px^1 + B)\}}{\sqrt{1 - (\sin^2 \mu) \sin^2(px^1 + B)}} \right),\end{aligned}\tag{2.28}$$

где

$$p^2 = a^2 + b^2, \operatorname{cth} \theta_0 = \frac{a}{b}.$$

Полевые уравнения (2.17) приводят к уравнениям на $\mu(x^2)$ и $B(x^2)$ совпадающие, с точностью до переобозначений: $v \rightarrow \cos \mu$, $f \rightarrow B$, $m^2 \rightarrow p^2$ с системой уравнений (17).

(Г). Интегрирование уравнений (2.22) дает:

$$k(x^1 + B(x^2)) = \operatorname{arctg} \left(\frac{s}{\pm \sqrt{1 \mp A^2 k^2 (1 + s^2)}} \right) - \operatorname{arctg} s,\tag{2.29}$$

где

$$\begin{aligned} k^2 &= a^2 + b^2 + m^2, \\ s &= \frac{k}{m} \operatorname{cth} \omega, \\ \omega &= \theta + \theta_0, \\ \tan \theta_0 &= \frac{b}{a}, \\ A^2 &= A^2(x^2). \end{aligned}$$

Выбирая знак минус под корнем, сделаем замены:

$$A^2 k^2 = \sin^2 \alpha(x^2), \quad (2.30)$$

$$\gamma^2 = m^2 + p^2 \cos^2 \alpha, \quad (2.31)$$

$$m^2 \leq \gamma^2 \leq k^2. \quad (2.32)$$

Для знака плюс естественно выбрать :

$$A^2 k^2 = \sinh^2 \alpha(x^2), \quad (2.33)$$

$$\gamma^2 = m^2 + p^2 \cosh^2 \alpha, \quad (2.34)$$

$$\gamma^2 \geq k^2.$$

Поле χ определяется через ω :

$$\chi = \operatorname{arctg} \left(\frac{(m - \omega'_2)}{p \sin \omega} \right). \quad (2.35)$$

Используя (2.29)-(2.35), полевые уравнения (2.17) приведем к уравнениям первого порядка:

$$\begin{aligned} B'_2 &= \frac{C_1}{1 - \bar{\gamma}^2}, \\ (\bar{\gamma}_2^2)' &= k^2 \bar{\gamma}^4 - (k^2 + k^2 C_1^2 + m^2 C_2^2) \bar{\gamma}^2 + m^2 C_2^2, \end{aligned} \quad (2.36)$$

где

$$\bar{\gamma}^2 = \frac{m^2}{\gamma^2}.$$

Система (2.36) по структуре аналогична системе (2.25) и ее аналогу в случае (В), но содержит два параметра k^2 и m^2 . Общее решение (2.36) выражается через эллиптические функции Якоби.

Компоненты ТЭИ для класса решений (2.36) таковы:

$$\begin{aligned} T_{11} = -T_{22} &= \frac{1}{2p^2} (k^2 - k^2 C_1^2 + m^2 C_2^2), \\ T_{12} &= p^2 C_1^2. \end{aligned} \quad (2.37)$$

Выразить решение (2.36) в элементарных функциях при ограничениях на константы C_1 и C_2 , как это было сделано в [95], в случае (Г) не удастся, в силу ограничений (2.30) и (2.33) на γ .

2.2.3. Подгруппа вращений и гомотетии

Перейдем в систему координат (φ, z) :

$$\varphi = \operatorname{arctg} \left(\frac{x^1}{x^2} \right), \quad (2.38)$$

$$\rho = \exp z, \quad \rho = \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2}. \quad (2.39)$$

Тогда линейный элемент E^2 принимает вид: $dS^2 = \exp\{2z\} (dz^2 + d\varphi^2)$. Уравнения (2.21) в координатах (2.39) принимают вид, совпадающий с (2.22) после замены $x^1 \rightarrow \varphi$. Полевые уравнения (2.18) в координатах (φ, z) в силу их конформной инвариантности [119] примут тот же вид, что и в декартовых координатах (x^1, x^2) . Поэтому все результаты 2.2.2 справедливы для подгруппы вращений, если учесть замены $x^1 \rightarrow \varphi, x^2 \rightarrow z$.

Используя аналогичные рассуждения в координатах (2.39) для гомотетий, установим, что результаты 2.2.2 справедливы и в том случае, если сделать замену $x^1 \rightarrow z, x^2 \rightarrow \varphi$.

Отметим что решения 2.2.2 можно обобщить на случай пространства Минковского, сделав замену $x^2 \rightarrow ix^2$. Тогда некоторые классы решений для гомотетий (в случае (А), например) будут носить автомодельный характер.

Таким образом, инвариантно-групповой подход к нелинейным сигма моделям позволяет естественным образом ввести для самогравитирующих НСМ уравнение связи между симметриями координатного пространства V_n и кирального пространства U_n [93]. В настоящем параграфе в отсутствие гравитационного взаимодействия такая связь постулируется для подгрупп E^2 с изометриями S^2 . Это позволяет использовать дифференциальные уравнения первого порядка (2.14) для интегрирования уравнений поля (2.10). Условия связи (2.14) играют вспомогательную роль для отыскания решений, как и уравнения дуальности [114], выделяющие решения инстантонного характера. Более того, инстантонное решение $SO(3)$ -инвариантной НСМ:

$$\begin{aligned} \chi &= 2 \operatorname{arctg} \rho, \\ \rho &= \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2}, \\ \theta &= \operatorname{arctg} \frac{x^1}{x^2} \end{aligned}$$

и решение меронного типа:

$$\begin{aligned} \chi &= \frac{\pi}{2}, \\ \theta &= \operatorname{arctg} \frac{x^1}{x^2} \end{aligned}$$

отвечают подгруппе вращений E^2 и удовлетворяют условиям (2.21) при $K_3^1 = K_3^2 = 0, K_3^3 = 1$. Таким образом, физически важные решения типа инстантон и мерон входят в более широкий класс решений, связанных с однопараметрическими подгруппами изометрических и гомотетических движений E^2 .

Глава 3.

Самогравитирующие нелинейные сигма модели

3.1. Конструктивный подход к НСМ

При увеличении размерности пространства ($n > 2$), на котором определяется НСМ, теряется аналогия с четырехмерными неабелевыми калибровочными теориями, так как теория на квантовом уровне становится неперенормируемой. Более того, даже на классическом уровне теряется конформная инвариантность и модель уже не является точно интегрируемой (в смысле метода ОЗР). Тем не менее после некоторых неудачных попыток (см., например, [129],[123]) в работе [125] была найдена вполне удовлетворительная теория, которая допускает инстантонные и меронные решения, сохраняет конформную инвариантность. Такая модель, для сохранения желаемых свойств из двумерной версии НСМ, предусматривает взаимодействие четырехмерной НСМ с тензорным полем (гравитацией). Однако в эйнштейновской трактовке НСМ, которая является источником гравитационного поля и определена на пространстве-времени лоренцевой сигнатуры, введена в рассмотрение в работах Иванова [93],[94]. Геометрические методы поиска точных решений и их приложения для $SO(N)$ -инвариантных самогравитирующих НСМ рассматривались в работах [93],[163]. Приложение НСМ в теории космологической инфляции было предложено в работах [170],[171] и получило дальнейшее развитие как киральная космологическая модель в работах Червона с соавторами (см. обзор [?]).

В рамках лагранжевого метода при описании бозонной нелинейной сигма модели используются, как правило, два подхода: конструктивный и локальный [125]. Конструктивный подход подразумевает использование ограничения (конструкции) Скирме (2.1). При этом лагранжев формализм соответствует задаче условного экстремума для функционала.

Пусть задан мультиплет скалярных (вещественных или комплексных) полей $\Phi^a(x)$, ($a = 1, 2, \dots, p$) на координатном (базовом) пространстве-времени – римановом многообразии (M, g_{ik}) , где $g_{ik}(x)$ -метрический тензор, $x = (x^1, x^2, x^3, x^4)$ -локальные координаты. Тогда НСМ описывается "свободным" лагранжианом

$$\mathcal{L}_{FF} = \frac{1}{2} \sum_{a=1}^p \partial_i \Phi^a \partial_k \Phi^a g^{ik} = \frac{1}{2} \Phi_{,i} \Phi_{,k} g^{ik}$$

для которого взаимодействие вводится геометрическим способом, за счет ограничения Скирме на свободные поля

$$\sum_{a=1}^p \Phi^a \Phi^a \equiv \Phi^2 = 1. \quad (3.1)$$

В общем случае конструктивный подход может быть сформулирован, используя лагранжиан со связями [102]

$$\mathcal{L}_{\lambda NSM} = \frac{1}{2} \Delta_1(\Phi, \Phi) + \frac{\lambda(x)}{2} \{\Phi^2 - 1\},$$

где $\lambda(x)$ - лагранжев множитель, Δ_1 и Δ_2 - скалярные операторы Бельтрами первого рода

$$\Delta_1 \psi = g^{ij} \psi_{,i} \psi_{,j}, \quad \Delta_1(\psi, \chi) = g^{ij} \psi_{,i} \chi_{,j} \quad (3.2)$$

и второго рода

$$\Delta_2 \psi = g^{ij} \psi_{,ij}. \quad (3.3)$$

Из условия экстремальности действия $\delta S_{\lambda NSM} = 0$, где

$$S_{\lambda NSM} = \int_{\mathcal{M}} \sqrt{|g|} d^m x \mathcal{L}_{\lambda NSM}, \quad g = \det(g_{ik}),$$

обычным образом получают полевые уравнения

$$-\Delta_2 \Phi^a + \left\{ \sum_{b=1}^p \Phi^b \Delta_2 \Phi^b \right\} \Phi^a = 0. \quad (3.4)$$

Используя соотношение (3.1) и его дифференциальные следствия, уравнения поля (3.4) можно представить в виде

$$\Delta_2 \Phi + \Delta_1 \{ \Phi, \Phi \} \Phi = 0.$$

Компоненты тензора энергии-импульса находятся из соотношений

$$T_{ik} = (\partial_i \Phi)(\partial_k \Phi) - \frac{1}{2} g_{ik} \Delta_1(\Phi, \Phi). \quad (3.5)$$

Локальный подход для кинетической НСМ описан в третьей главе и представлен интегралом действия (2.6), уравнениями движения (2.8) и компонентами ТЭИ (2.7). При таком подходе связи типа (2.1) явным образом не фиксируются, но могут быть учтены при задании метрики кирального пространства $h_{AB}(\varphi^C)$.

Переход от локального к конструктивному подходу осуществляется погружением кирального пространства \mathcal{N} на сферу S^{p-1} (в случае действительных полей), которая затем естественным образом погружается в \mathcal{R}^p . Функции погружения Φ^a , удовлетворяющие соотношениям

$$h_{AB} \varphi_{,i}^A \varphi_{,k}^B = \sum_{a=1}^p \Phi_{,i}^a \Phi_{,k}^a, \quad (3.6)$$

$$\sum_{a=1}^p \Phi^a \Phi^a = 1, \quad p > N,$$

соответствуют скалярным полям конструктивного формализма.

Рассмотрим гравитационное поле, порожденное ТЭИ нелинейной сигма модели (2.7). Уравнения Эйнштейна, следующие из вариации действия

$$S = S_{KNSM} + S_G, \quad S_G = \int d^4 x \sqrt{|g|} \frac{R}{2\kappa} d^4 x \quad (3.7)$$

могут быть представлены в виде

$$R_{ik} = \kappa h_{AB} \varphi_{,i}^A \varphi_{,k}^B. \quad (3.8)$$

Для решения самосогласованной системы уравнений Эйнштейна (3.8) и динамических уравнений киральных полей (2.8) был разработан инвариантно-групповой метод [93], позволяющий использовать дополнительные уравнения первого порядка: геометрический анзац и условия погружения кирального пространства в физическое пространство-время.

Другим методом, позволяющим находить точные решения самогравитирующей НСМ без решений уравнений Эйнштейна (3.8), является метод генерации решений самогравитирующей НСМ из вакуумных уравнений Эйнштейна [165]. Ввиду того, что этот метод покрывает широкий класс точных решений, полученных инвариантно-групповыми методами, изложим его более подробно в следующем разделе.

3.2. Метод генерирования точных решений в самогравитирующих $SO(N)$ НСМ

Рассматривая гравитационное взаимодействие НСМ с метрическим полем $g_{ik}(x)$, удовлетворяющим уравнениям Эйнштейна, в работах [125],[110],[113] найдены точные решения $SO(3)$ -инвариантной НСМ на 4-мерных римановых пространствах евклидовой сигнатуры: решения инстантонного и меронного типов. Изучены общие свойства моделей и топологические характеристики решений.

Развивая этот подход для римановых пространств лоренцевой сигнатуры (что позволяет учитывать гравитационное взаимодействие между бозонами, которые описывает НСМ [114]), в [93],[163] получены классы точных решений $SO(3)$ -, $SO(4)$ -инвариантной σ -модели в сферически-симметричных, плоско-симметричных пространствах и в рамках космологических моделей. Дальнейшее обобщение на случай $SO(N)$ внутренней симметрии и метод генерации представлены в работе [165], результаты которой приведены в настоящем разделе.

3.2.1. Плоско-симметричные решения в $SO(N)$ НСМ

Рассмотрим класс плоско-симметричных пространств с линейным элементом

$$ds^2 = f(z, t)(-dz^2 + dt^2) + g_{ab}dx^a dx^b, \quad (3.9)$$

где f и g_{ab} зависят только от z и t ; $a, b = 1, 2$.

Метрика кирального пространства, обладающего $SO(N)$ инвариантностью, выбрана в виде

$$dS^2 = (d\varphi^1)^2 + \sin^2 \varphi^1 \{(d\varphi^2)^2 + \sin^2 \varphi^2 \{(d\varphi^3)^2 + \dots + \sin^2 \varphi^{N-2} (d\varphi^{N-1})^2\} \dots\}. \quad (3.10)$$

Рассматриваем НСМ в классе плоско-симметричных пространств диагонального вида с линейным элементом (3.9), где

$$g_{12} = g_{21} = 0, \quad g_{11} = g_{22} = A(z, t).$$

Уравнения Эйнштейна с ТЭИ (2.8) принимают вид:

$$\begin{aligned} A_{\xi\eta} &= 0, \\ \frac{1}{2A^2} + \frac{F_\xi}{A} &= \kappa \langle \varphi_\xi^1, \varphi_\xi^1 \rangle, \\ \frac{1}{2A^2} + \frac{\epsilon F_\eta}{A} &= \kappa \langle \varphi_\eta^1, \varphi_\eta^1 \rangle, \\ \frac{\epsilon}{2A^2} - F_{\xi\eta} &= \kappa \langle \varphi_\xi^1, \varphi_\eta^1 \rangle, \end{aligned} \quad (3.11)$$

В (3.11) и дальше приняты обозначения $z = \xi + \eta$, $t = \xi - \eta$, $\varphi_\xi = \partial_\xi \varphi$, $F = \ln f$, $\epsilon = \pm 1$,

$$\langle \varphi_\xi^M, \varphi_\eta^M \rangle := \varphi_\xi^M \varphi_\eta^M + \sin^2 \varphi^M [\varphi_\xi^{M+1} \varphi_\eta^{M+1} + \sin^2 \varphi^{M+1} \times$$

$$[\varphi_\xi^{M+2} \varphi_\eta^{M+2} + \dots + \sin^2 \varphi^{N-2} [\varphi_\xi^{N-1} \varphi_\eta^{N-1}] \dots],$$

где

$$(M = 1, 2, \dots, N - 1).$$

Соответствующие полевые уравнения (2.8) в рассматриваемом случае таковы:

$$\partial_\xi(A\varphi_\eta^1) + \partial_\eta(A\varphi_\xi^1) - A \sin 2\varphi^1 \langle \varphi_\xi^2, \varphi_\eta^2 \rangle = 0 \quad (3.12)$$

$$\begin{aligned} \partial_\xi(A \sin^2 \varphi^1 \cdot \varphi_\eta^2) + \partial_\eta(A \sin^2 \varphi^1 \varphi_\xi^2) \\ - A \sin^2 \varphi^1 \sin^2 2\varphi^2 \langle \varphi_\xi^3, \varphi_\eta^3 \rangle = 0 \end{aligned} \quad (3.13)$$

.....

$$\begin{aligned} \partial_\xi(A \sin^2 \varphi^1 \dots \sin^2 \varphi^{N-2} \cdot \varphi_\eta^{N-1}) + \\ \partial_\eta(A \sin^2 \varphi^1 \dots \sin^2 \varphi^{N-2} \cdot \varphi_\xi^{N-1}) = 0 \end{aligned} \quad (3.14)$$

Учитывая (3.11) и используя допустимые преобразования координат, приходим к двум возможностям: а) $A = z; \epsilon = 1$; б) $A = t, \epsilon = -1$. Случай $A = A(\xi)$ (или $A = A(\eta)$) не представляет интереса, так как приводит к вырождению уравнений поля (3.12)-(3.14).

1А. Предположим, что все поля статические: $\varphi^A = \varphi^A(z)$, $A = z$. Интегрируя (3.11), находим

$$f = |z|^{-1/2+\kappa\alpha_0}, (z < 0), \quad (3.15)$$

где константа α_0^2 удовлетворяет соотношению

$$\alpha_0^2 = z^2 \langle \varphi_z^1, \varphi_z^1 \rangle = \langle \varphi_u^1, \varphi_u^1 \rangle \quad (u = \ln |x|). \quad (3.16)$$

Учитывая в (3.12)- (3.14) соотношение (3.16) и рекуррентную связь

$$\begin{aligned} \langle \varphi_u^1, \varphi_u^1 \rangle &= \varphi_u^1 \varphi_u^1 + \sin^2 \varphi^1 \langle \varphi_u^2, \varphi_u^2 \rangle \\ \langle \varphi_u^2, \varphi_u^2 \rangle &= \varphi_u^2 \varphi_u^2 + \sin^2 \varphi^2 \langle \varphi_u^3, \varphi_u^3 \rangle \\ &\dots \end{aligned} \quad (3.17)$$

уравнение (3.12) приводится к виду

$$(\varphi^1)_{uu} + \cot \varphi^1 [(\varphi^1)_u^2 - \alpha_0^2] = 0, \alpha_0^2 > (\varphi^1)_u^2, \quad (3.18)$$

и имеет решение

$$\varphi^1 = \arccos \left[\alpha_0^{-1} \sqrt{\alpha_0^2 - \alpha_1^2 \cos(\alpha_0 u)} \right], \alpha_1^2 = \text{const} < \alpha_0^2. \quad (3.19)$$

Учитывая (3.16)-(3.19), уравнение (3.13) можно представить таким образом:

$$\begin{aligned} \sin^{-4} \varphi^1 [(\varphi^2)_{\xi\xi} + \cot \varphi^2 ((\varphi_\xi^2)^2 - \alpha_1^2)] \\ + \varphi_\xi^2 [\xi_{uu} + \xi_u (\ln \sin^2 \varphi^1)_u] = 0. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Требую равенство нулю первого и второго слагаемого в (3.20), находим

$$\begin{aligned}\varphi^2 &= \arccos \left(\alpha_1^{-1} \sqrt{\alpha_1^2 - \alpha_2^2} \cos \alpha_1 \xi \right), \\ \xi &= \alpha_1^{-1} \operatorname{arctg}(\alpha_1^{-1} \alpha_0 \tan \alpha_0 u).\end{aligned}\quad (3.21)$$

Учитывая (3.16)–(3.21), можно свести (3.14), а также последующие уравнения, к виду (3.20). Непосредственно интегрируя (3.14) получаем

$$\begin{aligned}\varphi^1 &= \arccos(\alpha_0^{-1} \sqrt{\alpha_0^2 - \alpha_1^2} \cos \xi_1), \quad \xi_1 = \alpha_0 u; \\ \varphi^2 &= \arccos(\alpha_1^{-1} \sqrt{\alpha_1^2 - \alpha_2^2} \cos \xi_2), \\ \xi_2 &= \operatorname{arctg}(\alpha_0 \alpha_1^{-1} \operatorname{tg} \xi_1), \\ &\dots \\ &\dots \\ \varphi^{N-2} &= \arccos(\alpha_{N-3}^{-1} \sqrt{\alpha_{N-3}^2 - \alpha_{N-2}^2} \cos \xi_{N-2}), \\ \xi_{N-2} &= \operatorname{arctg}(\alpha_{N-3} \alpha_{N-2}^{-1} \operatorname{tg} \xi_{N-2}), \\ \varphi^{N-1} &= \operatorname{arctg}(\alpha_{N-1} \alpha_{N-2}^{-1} \operatorname{tg} \xi_{N-2}), \\ \alpha_0^2 &> \alpha_1^2 > \dots > \alpha_{N-2}^2.\end{aligned}\quad (3.22)$$

$$(3.23)$$

$$(3.24)$$

2А. Предполагая, что киральные поля φ^A зависят только от времени: $\varphi^A = \varphi^A(t)$, $A = z$, из уравнений (3.11) находим

$$f = |z|^{-1/2} \exp \left\{ \kappa \alpha_0^2 \frac{z^2}{2} \right\}.\quad (3.25)$$

Решение (3.12) аналогично случаю 1А и имеет вид (3.22)–(3.23) с учетом замены $u \rightarrow t$.

1Б. Пусть $\varphi^A = \varphi^A(t)$, $A = t$. Тогда получаем

$$f = |t|^{\kappa \alpha_0^2 - \frac{1}{2}},\quad (3.26)$$

Решение (3.12) имеет вид (3.22)–(3.23), где $u = \ln |t|$.

2Б. Пусть $\varphi^A = \varphi^A(z)$. Тогда

$$f = |t|^{-1/2} \exp \left\{ \kappa \alpha_0^2 \frac{t^2}{2} \right\}, \quad A = t.\quad (3.27)$$

Решение полевых уравнений (3.12) имеет вид (3.22)–(3.23), где $u = z$.

Отметим, что полученные гравитационные поля (3.15), (3.25)–(3.27) $SO(N)$ -инвариантной самогравитирующей НСМ имеют тот же вид, что и в работах [93],[163],[164]. Кроме того, по гравитационному полю в полученных классах решений не удастся определить количество киральных полей, его породивших, так как в метрику (и компоненты ТЭИ (2.7)) входит только одна константа – α_0^2 .

3.2.2. Генерирование решений $SO(N)$ НСМ из вакуумных решений уравнений Эйнштейна

Следуя работе [106], представим метрический коэффициент f в метрике (3.9) в виде произведения $f = f_v \cdot \Phi$, где f_v – решение вакуумных уравнений Эйнштейна $R_{ik} = 0$; $\Phi(z, t)$ – поправочный на материю (в нашем случае – на мультиплет скалярных полей φ^A) коэффициент. Тогда уравнения самогравитирующей $SO(N)$ -инвариантной НСМ распадаются на четыре группы.

Первая группа уравнений:

$$(\alpha \hat{g}_{,\xi} \hat{g}^{-1})_{\eta} + (\alpha \hat{g}_{,\eta} \hat{g}^{-1})_{\xi} = 0,$$

где

$$\alpha^2 = \det(g_{ab}), \quad \hat{g} = (g_{ab}), \quad \hat{g} \hat{g}^{-1} = E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Вторая:

$$\begin{aligned} (\ln f_v)_{\xi} &= (\ln \alpha)_{\xi\xi} / (\ln \alpha)_{\xi} + (Sp \hat{A}^2) / 4\alpha \alpha_{\xi}, \\ (\ln f_v)_{\eta} &= (\ln \alpha)_{\eta\eta} / (\ln \alpha)_{\eta} + (Sp \hat{B}^2) / 4\alpha \alpha_{\eta}, \end{aligned}$$

где $\hat{A} = -\alpha \hat{g}_{,\xi} \hat{g}^{-1}$, $\hat{B} = \alpha \hat{g}_{,\eta} \hat{g}^{-1} - 2 \times 2$ матрицы.

Третья группа – полевые уравнения (3.12)-(3.14), с учетом замены A на α .

Четвертая группа определяет поправочный на скалярные поля коэффициент Φ :

$$(\ln \Phi)_{\xi} = \kappa \frac{\langle \varphi_{\xi}^1, \varphi_{\xi}^1 \rangle}{(\ln \alpha)_{\xi}}, \quad (\ln \Phi)_{\eta} = \kappa \frac{\langle \varphi_{\eta}^1, \varphi_{\eta}^1 \rangle}{(\ln \alpha)_{\eta}}. \quad (3.28)$$

Условия интегрируемости (3.28) выполняются в силу полевых уравнений (3.16). Действительно, составив линейную комбинацию

$$(3.12) \times \varphi_{\xi}^1 + (3.13) \times \varphi_{\xi}^2 + \dots + (3.14) \times \varphi_{\xi}^{N-1},$$

получим условия интегрируемости (3.28).

Таким образом, чтобы получить точные решения НСМ в пространствах (3.9), достаточно решить полевые уравнения (3.12) для вакуумной метрики и найти из (3.28) поправочный на материю коэффициент Φ .

Решения предыдущего раздела можно считать генерированными из вакуумных решений, причем Φ и f_v для рассмотренных случаев таковы:

$$1A. \quad \Phi = |z|^{\kappa \alpha_0^2}, \quad f_v = f_0^2 |z|^{-1/2}, \quad A = z, \quad f_0^2 = const.$$

$$2A. \quad \Phi = \exp\{\kappa \alpha_0^2 \frac{z^2}{2}\}, \quad f_v = f_0^2 |z|^{-1/2}, \quad A = z.$$

$$1B. \quad \Phi = |t|^{\kappa \alpha_0^2}, \quad f_v = f_0^2 / \sqrt{|t|}, \quad A = t.$$

$$2B. \quad \Phi = \exp\{\kappa \alpha_0^2 \frac{t^2}{2}\}, \quad f_v = f_0^2 / \sqrt{|t|}, \quad A = t.$$

Отметим, что в силу (3.28) в поправочный на скалярные поля φ^A коэффициент Φ определен с точностью до постоянного множителя $\Phi \rightarrow const \cdot \Phi$.

3.2.3. Космологические решения $SO(N)$ НСМ

В качестве исходных вакуумных решений выбираем те классы метрик, которые приводят к космологическим моделям Фридмана со скалярным полем [106].

Линейный элемент

$$dS^2 = sh2t \left[f_0^2 \left(\frac{sh4\xi \cdot sh4\eta}{sh^2 2t} \right)^{\tilde{k}^2} (dt^2 - dz^2) - sh^2 z dx^2 - ch^2 z dy^2 \right], \quad (3.29)$$

где $0 \leq t < \infty, 0 \leq z < \infty, 0 \leq x \leq 2\pi, -\infty < y < \infty, f_0^2, k^2 - const$, является решением вакуумных уравнений Эйнштейна $R_{ik} = 0$ и приводит к открытой космологической модели.

Линейный элемент, исходный для закрытой космологической модели:

$$dS^2 = \sin 2t \left[f_0^2 \left(\frac{\sin 4\xi \cdot \sin 4\eta}{\sin^2 2t} \right)^{\tilde{k}^2} (dt^2 - dz^2) - \sin^2 z dx^2 - \cos^2 z dy^2 \right], \quad (3.30)$$

где $0 \leq z \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq x \leq 2\pi, -\infty < y < \infty, .$

Исходная метрика для плоского мира имеет вид

$$dS^2 = t \left[f_0^2 (\xi \eta t^{-2})^{\tilde{k}^2} (dt^2 - dz^2) - z^2 dx^2 - dy^2 \right], \quad (3.31)$$

где $0 \leq z < \infty, 0 \leq x \leq 2\pi, -\infty < y < \infty$. В работе Белинского [106] классы метрик (3.29) – (3.31) не приводятся, но указана процедура их получения из стандартных фридмановских решений со скалярным полем.

Генерируем решения $SO(N)$ -инвариантной НСМ описанным выше способом из вакуумного решения (3.29).

1⁰. Предположим, что киральные поля зависят только от времени: $\varphi^A = \varphi^A(u(t))$, где $u = \frac{1}{2} \ln |tht|$. Тогда полевые уравнения (3.12) имеют решение (3.22), где $u = \frac{1}{2} \ln |tht|$.

Интегрируя (3.28) найдем коэффициент

$$\Phi = (sh^2 2t \cdot sh^{-1} 4\xi \cdot sh^{-1} 4\eta)^{\tilde{k}^2}, \tilde{k}^2 = \frac{4}{3} \kappa \alpha_0^2. \quad (3.32)$$

С учетом (3.32) получаем открытую изотропную Вселенную в классе метрик (3.9) (в (3.29) положить $\tilde{k}^2 = 0, f_0^2 = 1$).

2⁰. Предположим, что $\varphi^A = \varphi^A(u(z))$, где $u = \frac{1}{2} \ln |thz|$, $\langle \varphi_u^1, \varphi_u^1 \rangle = \alpha_0^2$. Тогда решение (3.12) имеет вид (3.22), где $u = \frac{1}{2} \ln |thz|$. Интегрируя (3.28), определим поправочный на материю коэффициент Φ :

$$\Phi = (sh^2 2z \cdot sh^{-1} 4\xi \cdot sh^{-1} 4\eta)^{\tilde{k}^2}, \tilde{k}^2 = \frac{4}{3} \kappa \alpha_0^2.$$

В результате получаем неоднородную, анизотропную космологическую метрику

$$dS^2 = sh2t \left[f_0^2 (sh2z \cdot sh^{-1} 2t)^{\tilde{k}^2} (dt^2 - dz^2) - sh^2 z dx^2 - ch^2 z dy^2 \right]. \quad (3.33)$$

Таким образом, в случае зависимости скалярных полей φ^A от пространственной координаты z $SO(N)$ -инвариантная НСМ порождает неоднородную, анизотропную космологическую модель (3.33).

Исходя из вакуумных решений (3.30),(3.31), найдем, что в случае временных киральных полей φ^A при аналогичных предположениях $SO(N)$ -инвариантная НСМ порождает закрытую и плоскую Вселенную (в (3.30),(3.31) считать $\tilde{k}^2 = 0, f_0^2 = 1$). В случае зависимости φ^A от пространственной координаты z получим неоднородные, анизотропные космологические модели:

$$dS^2 = \sin 2t \left[f_0^2 \left(\frac{\sin 2z}{\sin 2t} \right)^{\tilde{k}^2} (dt^2 - dz^2) - \sin^2 z dx^2 - \cos^2 z dy^2 \right], \quad (3.34)$$

$$dS^2 = t \left[f_0^2 (zt^{-1})^{\tilde{k}^2} (dt^2 - dz^2) - z^2 dx^2 - dy^2 \right], \quad (3.35)$$

которые создаются мультиплетом скалярных полей (3.22), где $u = \frac{1}{2} \ln |\tan 2z|$ для решения (3.34) и $u = \frac{1}{2} \ln |z|$ для решения (3.35).

Таким образом, схема обобщения плоско-симметричных решений самогравитирующей НСМ на случай $SO(N)$ внутренней инвариантности с использованием метода генерации решения НСМ из вакуумных метрик позволяет не только интерпретировать решения, полученные ранее, как генерированные из вакуумных, но и найти новые классы решений, описывающие неоднородные, анизотропные космологические модели; показать, что $SO(N)$ -инвариантная НСМ может порождать фридмановские космологические модели открытой, закрытой и пространственно-плоской Вселенной.

Глава 4.

Модели космологической инфляции

4.1. Обобщения модели одинарного скалярного поля

Космологические модели инфляции могут быть представлены самосогласованной системой уравнений Эйнштейна и нелинейных (скалярных, киральных, калибровочных) полей. На основе этих уравнений строится инфляционный сценарий: анализ физических предпосылок и механизмов, способствующих возникновению чрезвычайно быстрого расширения (раздувания) Вселенной. Обычно инфляционный сценарий связан с фазовыми переходами в рамках квантовой теории скалярного поля конечной температуры, спонтанным нарушением и восстановлением калибровочной симметрией, другими физическими явлениями. При этом активно используются различные приближения при анализе инфляционной модели, то есть самосогласованной системы уравнений гравитации и физических полей [137]. После ярких успехов в начале восьмидесятых годов в объяснении ключевых проблем стандартного сценария (проблема горизонта, монополей, крупномасштабной структуры), в девяностые годы возникает необходимость дать анализ используемым приближениям для согласования модели инфляции с наблюдаемыми данными по крупномасштабной структуре Вселенной. Кроме того, возникает необходимость в поисках именно точных решений модели, так как существует подозрение о наличии псевдоэффектов при анализе спектра возмущений плотности, вызванных сделанными приближениями при решении уравнений стандартной инфляционной модели: самосогласованной системы уравнений Эйнштейна и скалярного поля с потенциалом самодействия.

Несколько вариантов модификаций и обобщений моделей инфляции было предложено в работах [77], [174],[179]. Новый метод получения точных решений в рамках стандартной модели инфляции, базирующейся на теории самодействующего скалярного поля (ССП) представлен в работе [176]. Киральные модели инфляции, основанные на нелинейной сигма модели с потенциалом самодействия, допускают точные решения и были исследованы в работах [77],[173]. Максимально реалистические на наш взгляд модели, описываемые Теорией Великого Объединения, взаимодействующей самосогласованным образом с гравитацией рассматривались в работах [179],[177]. Отметим, что в рамках последних двух подходов: киральной и калибровочной модели инфляции – существенным моментом является появление геометрической структуры внутреннего пространства. В киральной модели – это пространство целей или киральное пространство. В калибровочной версии – это пространство внутренних симметрий.

Используя концепцию внутреннего пространства можно осуществить соответствие между киральными и калибровочными моделями, за счет погружения или гауссова отображения кирального пространства и пространства симметрий калибровочных полей. В этом случае киральная модель выступает как эффективная модель для более реалистической калибровочной ТВО. Более того в работе [179] установлено, что при определенных ограничениях выполняется переход от калибровочной теории к киральной модели и далее к модели самодействующего скалярного поля (ССП).

Рассмотрим некоторые факты, подтверждающие необходимость перехода к более общим версиям моделей космологической инфляции.

Первые модели космологической инфляции основывались на СПП взаимодействующим минимальным образом с гравитацией в рамках пространств Фридмана-Робертсона-Уокера (ФРУ). При этом потенциал самодействия $V(\phi)$, его форма, отражали тот физический механизм, который эффективно описывался СПП. В качестве примера рас-

смотрим ситуацию с потенциалом Колемана-Вайнберга, который соответствует $SU(5)$ -инвариантной ТВО, и имеет вид

$$V(\phi) = A\phi^4 \left\{ \ln\left(\frac{\phi^2}{M^2} + c\right) \right\}$$

где M -ренормализационная масса, c -константа порядка единицы. Этот потенциал оказывается не вполне удовлетворительным, так как $A \sim g^4 \geq 10^{-2}$ в соответствии с $SU(5)$ ТВО, но при тонкой настройке (то есть при приведении параметров исходной теории в соответствии с наблюдаемым возмущением плотности $\frac{\delta\rho}{\rho}$ крупномасштабной структуры) для константы A получается ограничение $A \leq 10^{-12}$, которое решительно не согласуется с исходным.

Для того чтобы поправить ситуацию строится "улучшенный" потенциал [144] за счет добавления хиггсовских полей

$$V(\phi, \Phi, H_5) = \frac{1}{2}a(\mathbf{Tr}\Phi^2)^2 + \frac{1}{2}b\mathbf{Tr}\Phi^4 + \alpha(H_5^+ H_5)\mathbf{Tr}\Phi^2 + \\ + \frac{1}{4}\lambda(H_5^+ H_5)^2 + \frac{1}{4}\lambda_1\varphi^4 - \frac{1}{2}\lambda_2\varphi^2\mathbf{Tr}\Phi^2 + \lambda_3\phi^2 H_5^+ H_5,$$

где Φ и H_5 –присоединенные и фундаментальные хиггсовские поля. Обратим внимание на то, что при таком "улучшении" потенциала в лагранжиан модели не включаются кинетические слагаемые, что является недостатком подхода. Ситуация поправлена в моделях многокомпонентной инфляции [145] и в особенно активно разрабатываемой в настоящее время модели двойного поля [146],[147], где рассматривается корректная теория двух скалярных полей, взаимодействующих посредством потенциала.

Отметим, что в работе [148] рассмотрен конкретный физический механизм, приводящий к модели двух полей с перекрестным взаимодействием. Потенциал, полученный в работе [148] имеет вид

$$V(\varphi, \xi) = \frac{1}{2}m_\varphi^2\varphi^2 + \frac{1}{4}\lambda_\varphi\varphi^4 - \frac{1}{2}m_\xi^2\xi^2 + \frac{1}{4}\lambda_\xi\xi^4 + \frac{1}{2}\nu\varphi^2\xi^2.$$

Таким образом мы замечаем тенденцию введения дополнительных полей и их взаимодействия между собой в моделях космологической инфляции. Кроме того, потенциал $V(\phi)$ в стандартных моделях не является жестко фиксированной функцией и допускается возможность изменения его формы. Так например переход от модели "старой" инфляции к ее "новой" версии означает изменение функциональной зависимости потенциала $V(\phi)$ от поля ϕ [137],[174].

Киральные модели инфляции, основанные на нелинейной сигма модели (НСМ) с потенциалом самодействия, дают возможность рассматривать взаимодействие между полями не только посредством потенциала, но и за счет геометрического взаимодействия в киральном пространстве. А именно, коэффициенты связности кирального пространства вносят дополнительные слагаемые в уравнения динамики киральных полей [77].

4.2. Стандартная модель инфляции со скалярным полем

Рассмотрим инфляционные модели, которые базируются на теории самодействующего скалярного поля минимально взаимодействующего с гравитационным и описываются интегралом действия

$$S_{GSF} = \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ \frac{R + 2\Lambda}{2\kappa} + \frac{1}{2} \phi_i \phi_k g^{ik} - V(\phi) \right\}. \quad (4.1)$$

Уравнения Эйнштейна можно представить в виде

$$R_{ik} = \phi_i \phi_k - V(\phi) g_{ik} + \Lambda g_{ik}, \quad (4.2)$$

где компоненты ТЭИ самодействующего скалярного поля имеют вид

$$T_{ik}^{sf} = \phi_{,i} \phi_{,k} - g_{ik} \left\{ \frac{1}{2} \phi_{,j} \phi_{,l} g^{jl} - V(\phi) \right\} \quad (4.3)$$

Уравнение скалярного поля может быть получено варьированием действия S_{GSF} (4.1) по ϕ

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_i (\sqrt{-g} g^{ik} \phi_k) + \frac{dV}{d\phi} = 0 \quad (4.4)$$

Космологическая постоянная Λ введена в рассмотрение ввиду ее важности на инфляционной стадии. Напомним, что инфляционным расширением (раздуванием) называется та быстрая эпоха эволюции Вселенной, для которой справедливы следующие основные положения

- Масштабный фактор растет экспоненциально $K(t) \propto e^{\lambda t}$ или по степенному закону $K(t) \propto t^m$, $m > 1$.
- Космологическая постоянная Λ отлична от нуля при инфляционном режиме. (Это требование связано прежде всего с желанием удовлетворить предыдущему требованию).
- Вещество находится в квазивакуумном состоянии, то есть удовлетворяет уравнению

$$p = -\rho \quad (4.5)$$

где p - давление, ρ - плотность (энергии) вещества.

- Вещество эффективно описывается самодействующим скалярным полем ϕ с потенциалом самодействия $V(\phi)$. (Это требование приводит к выполнению требования о квазивакуумном состоянии вещества и описывает поведение сверхплотного вещества и фазовые переходы в нем.)

В качестве арены для инфляционного сценария рассматриваются в первую очередь однородные и изотропные космологические пространства Фридмана-Робертсона-Уокера (ФРУ) с метрикой

$$dS^2 = dt^2 - K^2(t) \left(\frac{dr^2}{1 - \epsilon r^2} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \right), \quad (4.6)$$

где $\epsilon = +1, 0, -1$ что соответствует замкнутой, пространственно-плоской и открытой вселенной.

Система уравнений (4.2)-(4.4) в метрике ФРУ принимает вид

$$\frac{K_{44}}{K} + \frac{2K_4^2}{K^2} + \frac{2\epsilon}{K^2} = -\Lambda + \kappa V(\phi), \quad (4.7)$$

$$-\frac{3K_{44}}{K} = \Lambda + \kappa(\phi_4^2 - V(\phi)), \quad (4.8)$$

$$\phi_{44} + 3\frac{K_4}{K}\phi_4 + \frac{dV(\phi)}{d\phi} = 0. \quad (4.9)$$

Именно эта система уравнений и является отправным пунктом для построения инфляционного сценария. Под инфляционным сценарием условимся понимать физическую картину эволюции материальных и гравитационного полей, которая описывается квантовой теорией поля (с конечной температурой) и включает в себя объяснение эволюции возмущений плотности энергии от квантовых флуктуаций в очень ранней Вселенной до образования крупномасштабной структуры наблюдаемой ее части. К настоящему времени не существует единой модели, описывающей все процессы эволюционирующей Вселенной в виде точных решений системы уравнений (4.2)-(4.4). Поэтому в рамках инфляционного сценария делаются вычисления в некоторых выбранных режимах, когда систему уравнений (4.7)-(4.9) можно упростить: заменить (именно заменить!) другой системой, как это делается в приближении "медленного скатывания", где ϕ_{44} исключается из уравнения поля [138]. Аналогичная ситуация с заменой возникает при анализе возмущений плотности в линеаризованной теории гравитации [140]. Другая возможность упростить систему уравнений (4.7)-(4.9) достигается при рассмотрении уравнения скалярного поля (4.9) на фоне точного решения уравнений Эйнштейна (4.2) с "начальной" формой потенциала $V(\phi)$. Действительно, в теории квантового поля с конечной температурой эффективный потенциал $V(\phi)$ зависит от температуры T , а значит и от времени t [140]. (При этом неявно вводится дополнительное скалярное поле, ответственное за температуру.) Уравнение (4.7) показывает на зависимость темпа инфляции при изменении потенциала $V(\phi, T)$ при фазовых переходах первого и второго рода. Поэтому, строго говоря, для каждой конфигурации потенциала самодействия следует решать вновь уравнения Эйнштейна (4.7)-(4.8) и скалярного поля (4.9). Однако в инфляционных сценариях приходится ограничиваться решениями полевого уравнения (4.9) на фоне гравитационного поля, отвечающего начальной конфигурации потенциала. Следует отметить, что довольно часто при анализе уравнения поля (4.4) считают $\nabla\phi \neq 0$. В то время как из уравнений Эйнштейна (4.2) следует, что скалярное поле зависит только от времени: $\phi = \phi(t)$ и не зависит от пространственных координат.

Существует немного примеров точных решений самосогласованной системы уравнений гравитационного и нелинейного скалярного поля в рамках исследований инфляционной стадии эволюции Вселенной. Не претендуя на полноту обзора, отметим работы Барроу с соавторами [141], [149], [142], в которых получены точные решения для моделей степенной инфляции и в случае взаимодействия скалярного поля с идеальной жидкостью. Мультипольные и анизотропные модели инфляции с экспоненциальным потенциалом рассматривались в работе [143]. Точные решения в киральных моделях

инфляции, основанных на нелинейной двухкомпонентной сигма-модели, получены в работах [77],[174].

Учитывая те трудности для исследования стандартной модели космологической инфляции, которые возникают при введении потенциала произвольным образом, рассмотрим другой подход, продиктованный желанием получить точные решения самосогласованной системы уравнений (4.7)-(4.9).

4.3. Точная настройка потенциала в стандартной модели инфляции

Критикуя инфляционные сценарии за непоследовательность при анализе уравнений модели поставим задачу поиска точных решений несколько в ином виде. А именно, будем исходить из требования существования точного решения модели инфляции (4.1) S_{GSF} для гравитационного поля в заданном режиме, используя произвол в выборе для этой цели потенциала самодействия $V(\phi)$. Непосредственный анализ уравнений модели инфляции (4.7)-(4.9) позволяет сделать следующий вывод:

Для любого заданного темпа эволюции масштабного фактора $K(t)$ однородной и изотропной Вселенной существует потенциал $V(\phi)$ который, при некоторых ограничениях на скорость изменения скалярного поля ϕ_4 , дает точное решение самосогласованной системы уравнений инфляционной модели (4.7)-(4.9).

Чтобы получить точные формулы данного утверждения вернемся к системе уравнений (4.7)-(4.9). Последнее уравнение данной системы, является следствием двух других и поэтому может быть исключено из анализа. Для доказательства этого факта достаточно продифференцировать уравнение (4.7) по t , затем использовать два следствия системы уравнений (4.7)-(4.8):

- во-первых, сумму уравнений Эйнштейна (4.7)-(4.8)

$$\frac{2}{\kappa K^2} \{-K K_{44} + K_4^2 + \epsilon\} = \phi_4^2, \quad (4.10)$$

- во-вторых, производную по времени t этой суммы

$$\phi_{44}\phi_4 = \kappa^{-1} \partial_4 \left\{ -\frac{K_{44}}{K} + \frac{K_4^2}{K^2} + \frac{\epsilon}{K^2} \right\} \quad (4.11)$$

Далее, перегруппировав слагаемые, выделить в дифференциальном следствии (4.11) $\phi_{44}\phi_4$ и ϕ_4^2 , после чего, представив $\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{d\phi} \phi_4$, разделить обе части на $\phi_4 \neq 0$. В итоге получаем уравнение для скалярного поля (4.9).

Оставшиеся два уравнения (4.7),(4.8) можно привести к виду, в котором функции $V(t) \equiv V(\phi(t))$ и $\phi(t)$ выражаются только через функцию $K(t)$ и ее производные:

$$V(t) = \frac{1}{\kappa} \left(\Lambda + \frac{K_{44}}{K} + \frac{2K_4^2}{K^2} + \frac{2\epsilon}{K^2} \right), \quad (4.12)$$

$$\phi(t) = \pm \sqrt{\frac{2}{\kappa}} \int \left(\sqrt{-\frac{d^2 \log K}{dt^2} + \frac{\epsilon}{K^2}} \right) dt + \phi_0, \quad (4.13)$$

где ϕ_0 – константа интегрирования. Задавая определенный вид функциональной зависимости $K = K(t)$ масштабного фактора от времени, можно найти соответствующие ей функции $\phi(t)$ и $V(t)$ – обеспечивающие выбранный сценарий эволюции Вселенной¹. Очевидно, пара этих функций задает неявную, параметрическую зависимость $V = V(\phi)$. После вычисления правых частей в (4.12), (4.13) явную зависимость $V = V(\phi)$ вычислить иногда удается, исключая t . В остальных случаях указанную зависимость можно проанализировать в различных предельных случаях, например, при $t \rightarrow \infty$, либо графически.

Приведем несколько примеров точных решений модели инфляции. Для инфляции представляют интерес такие режимы эволюции Вселенной, при которых масштабный фактор растет со временем либо экспоненциально, либо степенным образом с показателем большим 1.

Самое простое решение экспоненциального характера можно представить в виде $K(t) = K_0 e^{H_0 t}$, где K_0, H_0 – константы.

- Для пространственно-плоской Вселенной ($\epsilon = 0$) получаем решение $\phi = \phi_0 = const$; $V(\phi) = V_0 = const$; $\Lambda = 0$ или $\Lambda \neq 0$, которое соответствует так называемому режиму медленного скатывания [140].
- Замкнутая модель Вселенной ($\epsilon = 1$) допускает экспоненциальное расширение при следующих значениях потенциала и скалярного поля

$$V(\phi) = H_0^2 (\phi_0 - \phi(t))^2 + \kappa^{-1} (3H_0^2 + \Lambda),$$

$$\phi_0 - \phi(t) = \sqrt{2/\kappa} (K_0 H_0)^{-1} e^{-H_0 t}$$

Другие типы экспоненциального поведения масштабного фактора, которые при $t \rightarrow \infty$ совпадают, но отличаются друг от друга вблизи момента времени $t = 0$, могут быть записаны в форме

$$K(t) = a \cdot \text{ch}^\alpha \{\lambda t\} \quad (4.14)$$

либо в форме

$$K(t) = a \cdot \text{sh}^\alpha \{\lambda t\} \quad (4.15)$$

где λ – некоторая постоянная. Для упрощения формул рассмотрим случай $\alpha = 1$. В случае (4.14) масштабный фактор в нулевой момент времени конечен, а в случае (4.15) – равен нулю, что соответствует начальной сингулярности. В обоих случаях решение для $\phi(t)$, $V(t)$ и $V(\phi)$ находится точно. Решение для метрики (4.14) таково

$$\phi(t) = \pm \frac{q}{2i\lambda} \ln \frac{\text{sh}(\lambda t) - i}{\text{sh}(\lambda t) + i}, \quad (4.16)$$

$$V(\phi) = \frac{1}{\kappa} \left[\Lambda + 3\lambda^2 - q^2 \kappa^2 \cos^2 \frac{2\lambda\phi}{q} \right], \quad (4.17)$$

где

$$q = \frac{1}{\kappa} \sqrt{\frac{2\epsilon}{a^2} - 2\lambda^2}.$$

¹ Аналогичный подход использовался в работе [181].

Для удобства исследования в решении (4.16) используется комплексное представление для скалярного поля ϕ . Однако само поле по прежнему вещественное. В рассматриваемом случае зависимость потенциала от поля ϕ - периодическая. Вселенная эволюционирует от конечного радиуса к бесконечному, раздуваясь экспоненциально, что на плоскости $V - \phi$ соответствует скатыванию из неустойчивого равновесия в точках максимума к устойчивому равновесию в точках минимума.

Для масштабного фактора (4.15) решение имеет вид

$$\phi(t) = \pm \frac{q}{2\lambda} \ln \frac{\text{h}(\lambda t) - 1}{\text{ch}(\lambda t) + 1}, \quad (4.18)$$

$$V(\phi) = \frac{1}{\kappa} \left[\Lambda + 3\lambda^2 + q^2 \kappa^2 \text{sh}^2 \frac{2\lambda\phi}{q} \right], \quad (4.19)$$

где

$$q = \frac{1}{\kappa} \sqrt{\frac{2\epsilon}{a^2} + 2\lambda^2}.$$

В этом случае Вселенная эволюционирует из сингулярного состояния, соответствующего бесконечному значению поля ϕ , в состояние с бесконечным радиусом, при котором достигается единственный локальный минимум потенциала $V(\phi)$. Интересно, что этот потенциал приводит к еще одному точному решению соответствующему гармоническому изменению масштабного фактора $K(t) = a_1 \sin\{\lambda_1 t\}$ при некоторых значениях параметров a_1 и λ_1 .

$$\phi(t) = \pm \frac{q}{2\lambda_1} \ln \frac{1 - \cos(\lambda_1 t)}{1 + \cos(\lambda_1 t)},$$

$$V(\phi) = \frac{1}{\kappa} \left[\Lambda - 3\lambda_1^2 + q_1^2 \kappa^2 \text{ch}^2 \frac{2\lambda_1\phi}{q_1} \right],$$

где

$$q_1 = \frac{1}{\kappa} \sqrt{\frac{2\epsilon}{a_1^2} + 2\lambda_1^2}.$$

Потенциалы (4.18) и (4.19) совпадают с точностью до аддитивной постоянной, если

$$\lambda_1 = \lambda, \quad q_1 = q,$$

Этот последний режим соответствует периодическому прохождению через сингулярное состояние. Заметим, что все эти решения существуют не зависимо от того замкнута Вселенная, открытая или плоская. Тип режима зависит от знака подкоренного выражения для параметра q . Если $\frac{2\epsilon}{a^2} \pm 2\lambda^2 > 0$, то реализуются рассмотренные выше случаи, если $\frac{2\epsilon}{a^2} \pm 2\lambda^2 < 0$, то случаи (4.16) и (4.18) меняются местами. Особый случай $q = 0$ соответствует нулевому или произвольному постоянному значению поля.

Укажем еще одно важное соображение общего характера, появляющееся из анализа уравнений (4.12), (4.13) и хорошо иллюстрируемое представленными точными решениями. Именно, тип функциональной зависимости потенциала $V(\phi)$ от ϕ существенно зависит от того: возникает ли в процессе эволюции сингулярное состояние с нулевым значением масштабного фактора или нет? *Прохождение в процессе эволюции Вселенной через сингулярное состояние с нулевым масштабным фактором автоматически*

влечет за собой неограниченный рост V при стремлении ϕ к некоторому значению. Если же сингулярное состояние исключается из эволюции, то это возможно лишь при ограниченности V как функции ϕ .

В случае степенной инфляции масштабный фактор ищется в виде $K(t) = K_0 t^m$. При такой зависимости $K(t)$ интеграл в правой части (4.13) вычисляется точно. Поэтому для $V(t)$ и $\phi(t)$ получаем следующие выражения ($m \neq 1$)

$$V(\phi(t)) = \frac{m}{\kappa} \left(\frac{\Lambda}{m} - t^{-2}(3m - 1 - 2\alpha t^{-2m+2}) \right) \quad (4.20)$$

$$\begin{aligned} \phi(t) = \pm \sqrt{\frac{1}{2\kappa} \frac{m}{1-m}} \left\{ 2\sqrt{1 + \alpha t^{-2m+2}} \right. \\ \left. + \ln \left(\frac{\sqrt{1 + \alpha t^{-2m+2}} + 1}{\sqrt{1 + \alpha t^{-2m+2}} - 1} \right) \right\} + \phi_0, \end{aligned} \quad (4.21)$$

где $\alpha = \epsilon K_0^{-2}/m$.

- Для пространственно-плоской Вселенной ($\epsilon = 0$) решение для произвольного m имеет вид

$$\phi = \pm \sqrt{2m/\kappa} \ln t + \phi_0, \quad V(t) = \kappa^{-1}(\Lambda + (m + 3m^2)t^{-2}). \quad (4.22)$$

Исключая t находим экспоненциальную зависимость потенциала от поля

$$V(\phi) = \kappa^{-1} \{ \Lambda + (m + 3m^2) \exp(-\sqrt{2\kappa m^{-1}} \{ \phi - \phi_0 \}) \}, \quad (4.23)$$

что обычно и является определением степенной инфляции.

- Для открытой и замкнутой модели Вселенной ($\epsilon \neq 0$) явную зависимость потенциала от скалярного поля удастся найти лишь при некоторых значениях m . Например, для $m = 1$ (для которого формулы (4.20) и (4.21) не работают)

$$V(\phi) = \Lambda/\kappa + \kappa^{-1} \exp \left\{ -\frac{2(\phi - \phi_0)}{\pm \sqrt{2/\kappa} \sqrt{1 + \epsilon K_0^{-2}}} \right\}, \quad (4.24)$$

- Случай $m = (3/2), 2, 3$ (и другие) не позволяет явно выразить зависимость потенциала от поля. Ограничимся лишь одним примером ввиду громоздкости формул.

$$m = 2, \quad \epsilon \neq 0, \quad V(t) = \kappa^{-1} \{ \Lambda + 14t^{-2} + 2\epsilon K_0^{-2} t^{-4} \}; \quad (4.25)$$

$$\begin{aligned} \phi = \mp \frac{1}{2} \sqrt{2/\kappa} \{ 2F(\epsilon, t) + \sqrt{2} \ln \left(\frac{F - \sqrt{2}}{F + \sqrt{2}} \right) \} + \phi_0, \\ F(\epsilon, t) = \sqrt{2 + \epsilon K_0^{-2} t^{-2}} \end{aligned} \quad (4.26)$$

- Общее поведение всех функций мало отличается при различных значениях $m > 1$.

В настоящем разделе предложен новый подход к построению инфляционного сценария, основанного на точных решениях самосогласованной системы уравнений Эйнштейна и самодействующего скалярного поля. Задавая режим эволюции радиуса Вселенной в рамках изотропной и однородной модели Фридмана-Робертсона-Уокера мы определяем эволюцию скалярного поля и потенциала самодействия. Затем, находя зависимость потенциала самодействия от скалярного поля, мы определяем тот физический механизм, который является основой инфляционного сценария, сопоставлением потенциалов. Вполне возможно, что существующие модели инфляции, для разрешения некоторых противоречий с наблюдениями [146],[147], потребуют лишь уточнения формы потенциала. Предложенный в настоящей работе подход к определению потенциала, доставляющего точное решение инфляционной модели с заданным темпом инфляции, вызывает интерес с точки зрения астрофизических приложений [143] и указывает на возможность сопоставления результатов наших исследований с решениями для кинетической киральной модели [174] и массивной киральной модели инфляции [77], которые будут описаны в следующих главах.

4.4. Скалярные поля в (1+1) космологии

В последнее время в качестве точно интегрируемых моделей рассматриваются нетривиальные модели гравитации в двухмерном пространстве-времени. Значительный прогресс был достигнут в космологических моделях (1+1) мерной гравитации. В частности, в работах [161], [160], [182] (см. также ссылки в этих статьях) показана тесная аналогия со стандартной (1+3) мерной космологической моделью.

В настоящем параграфе будут представлены новые точные решения для (1+1) мерной космологической модели, в которой источником гравитации является нелинейное скалярное поле. Метод тонкой настройки потенциала [178] позволил значительно расширить класс точных решений, полученных ранее другими методами. Более того в данном параграфе будут получены новые типы потенциалов самодействия для инфляционной и осциллирующей Вселенной.

4.4.1. Уравнения модели

Рассмотрим двухмерное пространство-время с линейным элементом

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)dx^2. \quad (4.27)$$

Источником (1+1) мерной гравитации в нашем случае является самодействующее скалярное поле с тензором энергии-импульса

$$T_{ab} = \phi_{,a}\phi_{,b} - g_{ab} \left(\frac{1}{2}\phi_{,c}\phi^{,c} - V(\phi) \right). \quad (4.28)$$

След тензора энергии-импульса (4.28)

$$T = 2V(\phi). \quad (4.29)$$

Тогда гравитация описывается уравнением

$$R = T. \quad (4.30)$$

Уравнение поля принимает вид

$$\nabla^a T_{ab} = 0. \quad (4.31)$$

Отметим, что в работе [160] выбрана другая сигнатура.

Уравнения (4.30), (4.31) с учетом (4.27)-(4.29) могут быть представлены следующим образом

$$\frac{a_{tt}}{a} = V(\phi), \quad (4.32)$$

$$\phi_{tt} + H\phi_t + \frac{dV}{d\phi} = 0, \quad (4.33)$$

$$H = \frac{a_t}{a}. \quad (4.34)$$

Уравнение (4.33) может быть преобразовано к следующему виду

$$\frac{1}{2}y_t + Hy + \frac{dV}{dt} = 0, \quad (4.35)$$

$$y = \phi_t^2 > 0. \quad (4.36)$$

Такое представление будет использоваться при дальнейших вычислениях. Выпишем для краткости общее решение уравнения (4.35)

$$y = -2a^{-2} \left(\int a^2 \frac{dV}{dt} dt - C_0 \right) \quad (4.37)$$

Здесь C_0 – выделенная постоянная интегрирования. Поэтому все интегралы (4.37) могут записываться без других постоянных. Теперь можно искать точные решения уравнений (4.32), (4.37) используя метод тонкой настройки потенциала. Следуя общему рецепту метода тонкой настройки потенциала следует подставить масштабный фактор в уравнение (4.32) чтобы получить соответствующий потенциал и затем проинтегрировать уравнение (4.37). Это позволит получить первый интеграл динамического уравнения (4.33). После чего требуется решить уравнение (4.36) чтобы найти $\phi(t)$. Различие между стандартной (1+3) мерной космологией и рассматриваемой здесь (1+1) моделью заключается в невозможности получить общую формулу (в квадратурах) для скалярного поля в рамках (1+3) мерной космологии. Тем не менее, как будет показано далее, спектр точных решений достаточно широк.

4.4.2. Расширение по степенному закону

Пусть

$$a = a_0 t^m. \quad (4.38)$$

Чтобы получить степенную инфляцию, следует потребовать $m > 1$. В нашем случае возможно рассмотреть более общую возможность, когда $m \neq 1$.

Применяя формулу (4.32) можно найти полиномиальную зависимость V от t :

$$V(\phi(t)) = m(m-1)t^{-2}. \quad (4.39)$$

Решение для y таково

$$y = 2mt^{-2} + c_1 t^{-2m} > 0, \quad c_1 = 4m(m-1)C_0/a_0^2. \quad (4.40)$$

Тогда, решение для скалярного поля представимо в аналитической форме

$$\phi = \pm \frac{\sqrt{2m}}{2(1-m)} \left[2\sqrt{1 + \frac{c_1}{2m} t^{2-2m}} + \ln \left| \frac{\sqrt{1 + \frac{c_1}{2m} t^{2-2m}} - 1}{\sqrt{1 + \frac{c_1}{2m} t^{2-2m}} + 1} \right| \right]. \quad (4.41)$$

4.4.3. Экспоненциальная инфляция

Решение де Ситтера

Рассмотрим вначале стандартное решение де Ситтера в форме

$$a = a_0 e^{\lambda t}. \quad (4.42)$$

Постоянная Хаббла может быть получена из (4.34)

$$H = \lambda. \quad (4.43)$$

Потенциал самодействия (4.32) принимает форму

$$V(t) = \lambda^2. \quad (4.44)$$

Потенциал всегда положителен в этом случае. Из уравнения (4.37) можно найти

$$\phi = \mp \frac{\sqrt{2C_0}}{a_0\lambda} e^{-\lambda t} + \phi_0. \quad (4.45)$$

Такое решение было найдено другим способом в $(\Lambda - R)$ двухмерной модели в работе [160]. Если подставить $\Lambda = 0$ в решение (3.11) статьи [160], то получится решение (4.42)-(4.45).

Решение $a = a_0 \cosh^\alpha \lambda t$.

Пусть

$$a = a_0 \cosh^\alpha \lambda t. \quad (4.46)$$

Тогда

$$H = \alpha\lambda \tanh \lambda t, \quad (4.47)$$

Из соотношения (4.32) можно найти потенциал самодействия

$$V(t) = \alpha\lambda^2 \{(\alpha - 1) \tanh^2 \lambda t + 1\}. \quad (4.48)$$

Теперь возникает две возможности

- $\alpha = 1$ – специальный случай,
- $\alpha \neq 1$ – общий случай

Специальный случай ($\alpha = 1$)

Несложно заметить, основываясь на уравнении (4.48), что $V(t) = \lambda^2$, то есть $V = const$. Непосредственное вычисление по формуле (4.37) приводит к

$$y = 2C_0 \cosh^{-2} \lambda t > 0. \quad (4.49)$$

Интегрируя (4.49) можно получить

$$\phi = \pm \frac{2C_0}{\lambda} 2 \arctan(e^{\lambda t}) + \phi_0. \quad (4.50)$$

Полученное решение соответствует решению (3.10) в работе [160].

Общий случай ($\alpha \neq 1$)

Интересно отметить, что данный тип решений не удастся найти в (3+1) мерной космологии [178]. В рассматриваемой (1+1) мерной ‘ $R - T'$ ’ гравитации удастся достичь определенного прогресса.

Из соотношения (4.37) можно получить

$$y = -2\alpha\lambda^2 \cosh^{-2} \lambda t + \frac{2C_0}{a_0^2} \cosh^{-2\alpha} \lambda t > 0. \quad (4.51)$$

Общее решение для скалярного поля можно выразить в квадратурах

$$\phi = \pm \int \sqrt{-2\alpha\lambda^2 \cosh^{-2} \lambda t + \frac{2C_0}{a_0^2} \cosh^{-2\alpha} \lambda t} dt. \quad (4.52)$$

Можно получить аналитическое решение (4.52) при специальном выборе параметров. Например, значения $\alpha = 2$, $C_0 = -\frac{1}{2}\alpha\lambda^2 a_0^2$ приводят к решению

$$\phi = \mp 2 \cosh^{-1} \lambda t + \phi_0. \quad (4.53)$$

Следует отметить, что найденные здесь решения обобщают соответствующие решения работы [160]. Различие становится понятным из выражения (4.48) для $V(t)$, которое не было найдено в работе [160]. Очевидно, что если положить $\alpha = 1$ в выражении (4.48), то потенциал становится постоянным.

Решение $a = a_0 \sinh^\alpha \lambda t$.

Пусть

$$a = a_0 \sinh^\alpha \lambda t. \quad (4.54)$$

Тогда

$$H = \alpha\lambda \coth \lambda t, \quad (4.55)$$

Учитывая (4.32), можно подсчитать потенциал

$$V(t) = \alpha\lambda^2 \{(\alpha - 1) \coth^2 \lambda t + 1\}. \quad (4.56)$$

Здесь опять возникают две возможности

- $\alpha = 1$ – специальный случай,
- $\alpha \neq 1$ – общий случай.

Специальный случай ($\alpha = 1$)

Легко увидеть из соотношения (4.48) что $V(t) = \lambda^2$, то есть $V = const$. Непосредственное вычисление по формуле (4.37) дает

$$y = \frac{2C_0}{a_0^2} \sinh^{-2} \lambda t > 0. \quad (4.57)$$

Отсюда легко находится скалярное поле

$$\phi = \frac{2C_0}{a_0^2 \lambda} \ln \left| \tanh \frac{\lambda t}{2} \right| + \phi_0. \quad (4.58)$$

Общий случай ($\alpha \neq 1$)

Из (4.37) можно получить в этом случае

$$y = -2\alpha\lambda^2 \sinh^{-2} \lambda t + \frac{2C_0}{a_0^2} \sinh^{-2\alpha} \lambda t > 0. \quad (4.59)$$

Общее решение для скалярного поля ϕ может быть представлено в квадратурах

$$\phi = \pm \int \sqrt{-2\alpha\lambda^2 \sinh^{-2} \lambda t + \frac{2C_0}{a_0^2} \sinh^{-2\alpha} \lambda t} dt. \quad (4.60)$$

4.4.4. Решения типа осциллирующей Вселенной

В рамках (1+1) мерной космологии оказывается возможным получить решения, которые являются обобщением для стандартной (3+1) космологии. Например, для решений осциллирующего типа $a = a_0 \sin \lambda t$ and $a = a_0 \cos \lambda t$, представленных ранее для (1+3) космологии, здесь будет получено обобщение.

Решение $a = a_0 \cos^\alpha \lambda t$.

Пусть

$$a = a_0 \cos^\alpha \lambda t. \quad (4.61)$$

Тогда

$$H = -\alpha\lambda \tan \lambda t, \quad (4.62)$$

Используя формулу (4.32) найдем потенциал самодействия,

$$V(t) = \alpha\lambda^2 \{(\alpha - 1) \tan^2 \lambda t - 1\}. \quad (4.63)$$

Возникает две возможности

- $\alpha = 1$ – специальный случай,
- $\alpha \neq 1$ – общий случай.

Специальный случай ($\alpha = 1$)

По формуле (4.48) находим, что $V(t) = \lambda^2$. Из (4.37) находим

$$y = \frac{2C_0}{a_0^2} \cos^{-2} \lambda t > 0. \quad (4.64)$$

Тогда из (4.64) интегрированием можно найти ϕ

$$\phi = \pm \frac{2C_0}{a_0^2 \lambda} \ln \left| \frac{1 + \sin \lambda t}{1 - \sin \lambda t} \right| + \phi_0. \quad (4.65)$$

Общий случай ($\alpha \neq 1$)

По формуле (4.37) можно получить

$$y = -2\alpha\lambda^2 \cos^{-2} \lambda t + \frac{2C_0}{a_0^2} \cos^{-2\alpha} \lambda t > 0. \quad (4.66)$$

Общее решение для скалярного поля ϕ может быть представлено в квадратурах

$$\phi = \pm \int \sqrt{-2\alpha\lambda^2 \cos^{-2} \lambda t + \frac{2C_0}{a_0^2} \cos^{-2\alpha} \lambda t} dt. \quad (4.67)$$

Solution $a = a_0 \sin^\alpha \lambda t$.

Пусть

$$a = a_0 \sin^\alpha \lambda t. \quad (4.68)$$

Тогда

$$H = \alpha\lambda \cot \lambda t, \quad (4.69)$$

Используя (4.32) можно найти потенциал

$$V(t) = \alpha\lambda^2 \{(\alpha - 1) \cot^2 \lambda t - 1\}. \quad (4.70)$$

Далее возможны два случая

- $\alpha = 1$ – специальный случай,
- $\alpha \neq 1$ – общий случай.

Специальный случай ($\alpha = 1$)

Из (4.48) найдем, что $V(t) = \lambda^2$. Непосредственное вычисление по формуле (1.9) дает

$$y = \frac{2C_0}{a_0^2} \sin^{-2} \lambda t > 0. \quad (4.71)$$

Из (4.49) можно найти

$$\phi = \frac{2C_0}{a_0^2 \lambda} \ln \left| \frac{1 - \cos \lambda t}{1 + \cos \lambda t} \right| + \phi_0. \quad (4.72)$$

Общий случай ($\alpha \neq 1$)

Используя формулу (4.37) можно получить

$$y = -2\alpha\lambda^2 \sin^{-2} \lambda t + \frac{2C_0}{a_0^2} \sin^{-2\alpha} \lambda t > 0. \quad (4.73)$$

Общее решение для скалярного поля ϕ может быть представлено в квадратурах

$$\phi = \pm \int \sqrt{-2\alpha\lambda^2 \sin^{-2} \lambda t + \frac{2C_0}{a_0^2} \sin^{-2\alpha} \lambda t} dt. \quad (4.74)$$

4.5. Самогравитирующие НСМ в космологии

В настоящей главе рассматриваются космологические решения для самогравитирующей нелинейной сигма модели, полученные с использованием геометрических и других методов. Особое внимание уделяется построению теории космологической инфляции, основанной на нелинейной сигма модели, которая в дальнейшем (при включении потенциала взаимодействия киральных полей) получила более общее название "киральная космологическая модель".

Теоретико-групповой подход к нелинейной сигма модели (НСМ), развитый в работах Иванова [93],[94], позволил найти точные решения в $SO(3)$ - и $SO(4)$ - инвариантной НСМ, используя геометрический анзац

$$\xi_a^i \varphi_i^A = K_a^\alpha \zeta_\alpha^A \quad (4.75)$$

и метод погружения пространства полей (кирального пространства) в физическое пространство-время. Метод генерации решений для самогравитирующей НСМ из точных решений для вакуумных уравнений Эйнштейна, предложенный в работах Червона [165], позволил найти точные решения для $SO(N)$ - инвариантной НСМ. Кроме того, метод генерирования позволяет воспроизвести многие решения, полученные ранее в работах [93],[94],[163], и устанавливает тот факт, что $SO(N)$ - инвариантная НСМ, как источник гравитационного поля приводит к фридмановским моделям открытой, замкнутой и плоской Вселенной. Последний факт означает, что нелинейные сигма модели могут рассматриваться в качестве источника гравитационного поля в космологии наряду с релятивистской жидкостью, скалярным, электромагнитным полем и другими источниками. В связи с этим остановимся более подробно на решениях самогравитирующей НСМ космологического характера.

Плоско-симметричные космологические решения

Возможны следующие два решения космологического характера для плоско-симметричного гравитационного поля, порожденного мультиплетом $SO(N)$ -инвариантных скалярных полей.

Решение 1

$$dS^2 = -t(dx^2 + dy^2) + \{\sqrt{t}\}^{-1} t^{\kappa c_0^2} (-dz^2 + dt^2). \quad (4.76)$$

Решение 2

$$dS^2 = -t(dx^2 + dy^2) + \{\sqrt{t}\}^{-1} \exp\{\kappa c_0^2 t^2 / 2\} (-dz^2 + dt^2). \quad (4.77)$$

Решение 1 получено в предположении, что киральные поля зависят от времени t . При соотношении на константы $\kappa c_0^2 = \frac{3}{2}$ получаем плоскую Вселенную Фридмана.

Решение 2 соответствует случаю зависимости киральных полей от пространственной координаты z . Последнее весьма любопытно, так как ТЭИ и гравитационное поле (4.77) зависят только от времени. Отметим, что оба решения (4.76),(4.77) могут быть генерированными из вакуумного решения

$$dS^2 = -t(dx^2 + dy^2) + \frac{f_0^2}{\sqrt{t}} (-dz^2 + dt^2), \quad (4.78)$$

где f_0^2 – постоянная.

Анизотропные космологические решения в $SO(3)$ НСМ

В классе метрик

$$dS^2 = -L(t)dr^2 - M(t)\{d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2\} + dt^2 \quad (4.79)$$

с использованием метода погружения найдены точные аналитические решения для $SO(3)$ -инвариантной НСМ [93]

Решение 3

$$1) \quad \kappa = 1; L(t) = c^2 t^{-2}; M(t) = M_0 = const;$$

$$2) \quad \kappa = 1; L(t) = t^{-2/3}; M(t) = ct^{4/3};$$

$$3) \quad \kappa > 1; L(t) = 1; M(t) = (\kappa - 1)t^2.$$

Киральные поля совпадают (с точностью до периода) с угловыми координатами сферы S^2 : $\varphi^1 = \varphi + 2\pi m, \varphi^2 = \theta + \pi n$, n, m — целые. Отличные от нуля компоненты ТЭИ имеют вид

$$T_1^1 = T_4^4 = M^{-1}.$$

Следует заметить, что Решение 3 (при $\kappa > 1$) является частным решением.

Пример точного решения для анизотропной Вселенной представлен в работах [183, 184]. Рассмотрим модель для вселенной I типа по Бианки с линейным элементом

$$dS_{\mathcal{M}}^2 = dt^2 - B^2(t)dr^2 - C^2(t)\{d\theta^2 + d\varphi^2\}. \quad (4.80)$$

В классе двухкомпонентных НСМ с нарушенной сферической симметрией, то есть с метрикой кирального пространства

$$dS_{\mathcal{N}}^2 = d\phi^2 + 2P(\phi)d\chi^2, \quad (4.81)$$

найденно решение

$$B^2 = t^{2c/(c+2)}, \quad C^2 = t^{2/c+2},$$

$$\phi = c_1 \ln t + \phi_0, \quad \chi = c_2 \ln t + \chi_0, \quad P(\phi) = P_0 = const.$$

Здесь константы связаны соотношением

$$\frac{2\beta}{\kappa\alpha} = c_1^2 + 2P_0 c_2^2, \quad \beta = \frac{c(2c+1)}{(c+2)^2} \neq -2.$$

При $c < -1$ метрическая функция $C^2(t)$ меняется со временем по степенному закону с показателем больше единицы, в то время как $B^2(t)$ имеет показатель степени роста меньше единицы. Данное решение соответствует предельно жесткому состоянию вещества.

$SO(4)$ НСМ в замкнутом мире Фрийдмана

Метод погружений может быть использован для $SO(4)$ -инвариантной НСМ только в случае существования гиперповерхности S^3 в пространстве-времени, то есть только в случае замкнутой Вселенной

$$dS^2 = a^2(\eta)\{-d\chi^2 - \sin^2 \chi(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) + d\eta^2\} \quad (4.82)$$

В случае отождествления угловых координат (χ, θ, φ) и киральных полей $(\varphi^1, \varphi^2, \varphi^3)$ уравнения Эйнштейна сводятся к одному уравнению на масштабный фактор $a(\eta)$ [93]

$$(\kappa - 2)a^2 = (a')^2. \quad (4.83)$$

Решения уравнения (4.83) таковы:

- $\kappa = 2$, $a = const$, что соответствует статической космологической модели $\mathbf{S}^3 \otimes \mathbf{R}$.
- $\kappa > 2$, $a = a_0 \exp\{\pm\sqrt{\kappa - 2}\eta\}$
- $\kappa < 2$ – в этом случае действительные нестационарные решения невозможны. При замене $\eta \rightarrow i\eta$ возможны решения меронного типа.

4.6. $SO(N)$ НСМ в плоском мире Фрийдмана

Метод генерирования решений для самогравитирующей НСМ из решений вакуумных уравнений Эйнштейна позволил найти точные решения для открытой, замкнутой и пространственно-плоской Вселенной [165] в специальной системе координат. Чтобы не воспроизводить здесь довольно громоздкую запись решений воспользуемся тем, что в случае пространственно-плоской модели Вселенной, которая представляет особый интерес в моделях инфляционной космологии, решения могут быть представлены в сопутствующей системе координат. Причем нет необходимости рассматривать преобразование решений самогравитирующей НСМ при преобразовании координат, так как процедура нахождения точных решений в рассматриваемом случае аналогична той, которая была проделана для НСМ в плоско-симметричных пространствах [163],[165].

Решение для гравитационного поля

$$dS^2 = dt^2 - K_0^2 t^{2/3} \{dr^2 + r^2(d\text{th}^2 + \sin^2 \text{th} d\varphi^2)\}. \quad (4.84)$$

Метрика кирального пространства выбрана в виде

$$dS^2 = (d\varphi^1)^2 + \sin^2 \varphi^1 \{(d\varphi^2)^2 + \sin^2 \varphi^2 \{(d\varphi^3)^2 + \dots + \sin^2 \varphi^{N-2} (d\varphi^{N-1})^2\} \dots\}. \quad (4.85)$$

Киральные поля определяются цепочкой соотношений аналогичной (3.22)-(3.23)

$$\begin{aligned}\varphi^1 &= \arccos(c_0^{-1} \sqrt{c_0^2 - c_1^2} \cos \xi_1), \quad \xi_1 = c_0 u, \quad u = \ln t, \quad c_0^2 = \frac{2}{3\kappa}; \\ \varphi^2 &= \arccos(c_1^{-1} \sqrt{c_1^2 - c_2^2} \cos \xi_2), \quad \xi_2 = \operatorname{arctg}(c_0 c_1^{-1} \operatorname{tg} \xi_1), \\ &\dots \\ &\dots \\ \varphi^{N-2} &= \arccos(c_{N-3}^{-1} \sqrt{c_{N-3}^2 - c_{N-2}^2} \cos \xi_{N-2}), \\ \xi_{N-2} &= \operatorname{arctg}(c_{N-3} c_{N-2}^{-1} \operatorname{tg} \xi_{N-2}), \\ \varphi^{N-1} &= \operatorname{arctg}(c_{N-1} c_{N-2}^{-1} \operatorname{tg} \xi_{N-2}), \\ c_0^2 &> c_1^2 > \dots > c_{N-2}^2.\end{aligned}\tag{4.86}$$

$$\tag{4.87}$$

4.7. $SO(3)$ кинетическая НСМ

Система уравнений Эйнштейна и киральных полей в рамках самогравитирующей НСМ (с киральной метрикой (4.81), где $2P = \sin^2 \phi$) в пространствах ФРУ

$$dS^2 = dt^2 - K^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - \epsilon r^2} + r^2(d\theta^2 + \sin \theta d\varphi^2) \right]\tag{4.88}$$

принимает вид

$$\frac{K_{44}}{K} + \frac{2K_4^2}{K^2} + \frac{2\epsilon}{K^2} = \Lambda,\tag{4.89}$$

$$-\frac{3K_{44}}{K} = -\Lambda + \kappa(\phi_4^2 + \sin^2 \phi \chi_4^2),\tag{4.90}$$

$$\phi_{44} + 3\frac{K_4}{K}\phi_4 - \frac{1}{2}\sin 2\phi \chi_4^2 = 0\tag{4.91}$$

$$\partial_4\{K^3 \sin^2 \phi \chi_4\} = 0.\tag{4.92}$$

Первое уравнение системы приводится к виду [174]

$$zp \frac{dp}{dz} + 2p^2 + 2\epsilon - \Lambda z^2 = 0,\tag{4.93}$$

где $p = K_4$, $z = K(t)$.

Будем считать космологическую постоянную равной нулю.

Тогда для открытой модели ($\epsilon = -1$) находим решение в квадратурах

$$t = \int \frac{K^2 dK}{\sqrt{K^4 + c_0}}, \quad c_0 = \text{const}.\tag{4.94}$$

Киральные поля определяются в этом случае через масштабный фактор $K(t)$ и могут быть представлены в виде

$$\phi = \arccos \left[\frac{\sqrt{\alpha_1^2 - \alpha_0^2}}{\alpha_1^2} \sin(-\alpha_1 I(t)) \right]\tag{4.95}$$

$$\chi = \frac{\alpha_0 \alpha_1^2}{K^3(t)} \{ \alpha_1^2 \cos^2(-\alpha_1 I(t)) + \alpha_0^2 \sin^2(-\alpha_1 I(t)) \}^{-1}, \quad (4.96)$$

где

$$I(t) = \int K^{-3}(t) dt.$$

Для закрытой модели ($\epsilon = 1$) решение для гравитационного поля определяется из интеграла

$$t = \int \frac{K^2 dK}{\sqrt{c_1^4 - K^4}}. \quad (4.97)$$

Решения для киральных полей определяются через $K(t)$ формулами (4.95)-(4.96).

4.8. Двухкомпонентная кинетическая НСМ

В качестве первого шага на пути обобщения и поиска альтернативной модели инфляции рассмотрим киральную НСМ, взаимодействующую с гравитационным полем (так называемую самогравитирующую НСМ) в присутствии космологической постоянной Λ .

$$S_{KNSM} = \int \sqrt{g} d^4x \left[\frac{R + 2\Lambda}{2\kappa} + \frac{1}{2} h_{AB} \varphi_i^A \varphi_k^B g^{ik} \right], \quad (4.98)$$

где $x = (x^1, \dots, x^m)$ – локальные координаты базового пространства-времени, Риманова многообразия (\mathcal{M}, g_{ik}) ; $\varphi = (\varphi^1, \dots, \varphi^n)$ – мультиплет скалярных полей, принимающих значения на киральном пространстве, Римановом многообразии (\mathcal{N}, h_{AB}) ; $g = |\det(g_{ik})|$; $\varphi_k := \varphi_{,k} := \partial_k \varphi$; R – скалярная кривизна κ – постоянная Эйнштейна. По повторяющимся индексам подразумевается суммирование. Варьируя действие (4.98) по отношению к φ получаем уравнения движения

$$\frac{1}{\sqrt{g}} \partial_i (\sqrt{g} g^{ik} h_{AB} \varphi_k^B) - \frac{1}{2} \frac{\partial h_{BC}}{\partial \varphi^A} \varphi_i^B \varphi_k^C g^{ik} = 0. \quad (4.99)$$

Здесь h_{AB} – метрический тензор кирального многообразия (\mathcal{N}, h_{AB}) . Уравнения Эйнштейна для модели (4.98) с ТЭИ

$$T_{ik} = h_{AB} \varphi_i^A \varphi_k^B - g_{ik} \left(\frac{1}{2} g^{jl} \varphi_j^A \varphi_l^B h_{AB} \right) \quad (4.100)$$

могут быть приведены к следующему виду

$$R_{ik} = \kappa h_{AB} \varphi_i^A \varphi_k^B + \Lambda g_{ik}. \quad (4.101)$$

Рассмотрим однородную и изотропную Вселенную с метрикой

$$dS_{\mathcal{M}}^2 = (dt)^2 - e^{a(t)} \left(\frac{(dr)^2}{1 - kr^2} + r^2 [(d\theta)^2 + \sin^2 \theta (d\varphi)^2] \right). \quad (4.102)$$

Здесь $k = 1, 0, -1$ для замкнутой, плоской и открытой Вселенной соответственно.

В качестве метрики кирального пространства выбираем метрику, связанную с теорией ССП [29]

$$dS_{\mathcal{N}}^2 = d\phi^2 + 2P(\phi) d\chi^2, \quad \varphi^1 = \phi, \quad \varphi^2 = \chi \quad (4.103)$$

Подставляя (4.102) и (4.103) в (4.99) и (4.101), найдем, что киральные поля ϕ и χ будут зависеть только от космологического времени t . Поэтому, делая некоторые упрощения мы получаем систему уравнений

$$e^a \left(\frac{1}{2} a_{tt} + \frac{3}{4} a_t^2 \right) = \Lambda e^a - 2\kappa, \quad (4.104)$$

$$\frac{3}{2} \left(a_{tt} + \frac{1}{2} a_t^2 \right) = -\kappa (\phi_t^2 + 2P\chi_t^2) + \Lambda, \quad (4.105)$$

$$\frac{3}{2} a_t \phi_t + \phi_{tt} - \frac{dP}{d\phi} \chi_t^2 = 0 \quad (4.106)$$

$$\frac{3}{2}a_t\chi_t + \chi_{tt} + \frac{d \ln P}{d\phi}\phi_t\chi_t = 0 \quad (4.107)$$

Остановимся подробнее на методе решения системы уравнений (4.104)- (4.107). Ясно, что гравитационное поле (масштабный фактор $K(t) = e^{a(t)}$) определяется из уравнения (4.104). Подставляя этот результат в (4.105) можно получить соотношение между производными от киральных полей и киральным потенциалом $P(\phi)$. Это соотношение позволяет найти компоненты ГЭИ и свести уравнение (4.104) к обыкновенному дифференциальному уравнению первого порядка, которое, вообще говоря, может быть формально разрешено. Однако результат будет зависеть от наших предположений о киральном потенциале и первых производных от киральных полей. Поэтому можно представить семейство возможных решений для каждого случая. Причем нет необходимости решать уравнение (4.107) так как оно является дифференциальным следствием (4.104)-(4.106).

Отметим здесь, что уравнение (4.104) может быть приведено к обыкновенному дифференциальному уравнению первого порядка

$$zp \frac{dp}{dz} + 2p^2 - \Lambda z^2 + 2k = 0, \quad (p = z_t, z = e^{a/2}), \quad (4.108)$$

которое соответствует гравитационным полям, порожденными предельно жестким веществом или безмассовым скалярным полем.

Таким образом, уравнение (4.108) позволяет определить масштабный фактор $e^{a(t)}$ для моделей Фридмана и Де Ситтеровских вселенных в рамках двухкомпонентной НСМ. В случае пространственно-плоских моделей Вселенной получены точные аналитические решения для рассматриваемой 2-НСМ [29].

4.9. Массивная киральная НСМ

Различные варианты инфляционного сценария базируются на теории самодействующего скалярного поля (ССП), взаимодействующего с гравитацией в рамках космологических пространств. Нелинейная теория скалярного поля с потенциалом самодействия $V(\phi)$ может рассматриваться как простейшая эффективная модель, которая описывает явления в физике элементарных частиц на стадии Ранней Вселенной, такие как спонтанное нарушение и восстановление калибровочной симметрии ТВО [138]. При этом потенциал самодействия $V(\phi)$ отражает эпоху ТВО Ранней Вселенной: при учёте квантовых процессов форма потенциала изменяется с изменением температуры. Кроме того, выбор формы потенциала фактически определяет модель инфляции.

На основе теории СПП минимально взаимодействующего с эйнштейновской гравитацией в рамках изотропной и однородной Вселенной рассматривались различные версии модели инфляции: модели "старой", "новой" и хаотической инфляции. Анизотропные и неоднородные космологии наряду с многомерными пространство-временами также были исследованы рядом авторов (см., например, [151],[149],[143]).

Модель расширенной инфляции базируется на теории гравитации Бранса-Дикке и фактически содержит два скалярных поля. А именно, скалярное поле Бранса-Дикке и скалярное поле "материи" [139],[152]. Известно, что скалярно-тензорные теории гравитации, типа Бранса-Дикке, также как и модели R^2 - и индуцированной гравитации конформно эквивалентны эйнштейновской теории гравитации, минимально взаимодействующей с самодействующим скалярным полем [153],[154].

Все вышеперечисленные модели инфляционного сценария тесно связаны с гравитационным полем, порожденным единичным скалярным полем. Однако прогресс ТВО и теории суперполей показывает, что гравитационное поле Ранней Вселенной скорее всего порождается несколькими (эффективными) скалярными полями, что учитывалось в моделях мульти-компонентной инфляции и "двойного поля" [155],[156],[145]. Такой подход базируется на модели невзаимодействующих скалярных полей с различными потенциалами самодействия и приводит к устранению ряда проблем стандартной космологической модели и проблем оригинальной модели инфляции Гуса [136][150]. Следующей ступенью на этом пути должно быть введение взаимодействия между скалярными полями, что может быть сделано по крайней мере двумя способами [170]. Первый – введение потенциала, зависящего от всех скалярных полей. Такой тип моделей рассматривался, например, в работах [158],[157],[137]. Второй способ – киральная модель (или нелинейная сигма модель), где взаимодействие вводится геометрически, при помощи ограничения на значения скалярных полей [114]. Рассматриваемая в настоящем разделе модель инфляции представляет собой объединение двух вариантов и приводит к прямому обобщению теории СПП, избавляя от некоторых трудностей, присущих второму подходу. В частности, при описании уравнения состояния вещества [171]. Отметим, что рассматриваемая здесь модель, как прямое обобщение теории СПП, сохраняет все физические идеи, лежащие в основе теории космологической инфляции.

Модель СПП представляет собой лишь простейший вариант эффективной теории, описывающей калибровочные и хиггсовские поля ТВО, взаимодействующие с гравитацией. Киральная или нелинейная сигма модель может рассматриваться как новая эффективная теория, которая наследует симметрию ТВО как симметрию внутреннего кирального пространства. То есть, мы постулируем здесь, что группа симметрий в ТВО

реализуется как группа движений, допускаемая в киральном пространстве.

4.9.1. Самогравитирующая НСМ с потенциалом

В качестве модели непосредственно обобщающей теорию ССП (а значит и математическую основу инфляционных моделей) рассмотрим нелинейную сигма модель с потенциалом взаимодействия,

$$S_{KMW} = \int_{\mathcal{M}} d^m x \sqrt{g} \left\{ \frac{1}{2} h_{AB} \varphi_i^A \varphi_k^B g^{ik} - W(\varphi) \right\} \quad (4.109)$$

Здесь $(\mathcal{M}, g_{ik}(x))$ – пространство - время, $(\mathcal{N}, h_{AB}(\varphi))$ – киральное пространство полей $\varphi = (\varphi^1, \dots, \varphi^n)$, $g = |\det(g_{ik})|$, $\varphi_k^A = \partial_k \varphi^A = \varphi_{,k}^A$. При варьировании действия (4.109) по полям φ^C получаем уравнения движения

$$\frac{1}{\sqrt{g}} \partial_i (\sqrt{g} g^{ik} h_{AB} \varphi_k^B) - \frac{1}{2} \frac{\partial h_{BC}}{\partial \varphi^A} \varphi_i^B \varphi_k^C g^{ik} + \frac{\partial W}{\partial \varphi^A} = 0. \quad (4.110)$$

Чтобы перейти к рассмотрению инфляционных моделей к действию (4.109) следует добавить действие гравитационного поля при наличии космологической постоянной Λ . Таким образом, самогравитирующая НСМ с потенциалом взаимодействия описывается интегралом действия

$$S_{KKM} = \int_{\mathcal{M}} d^m x \sqrt{g} \left\{ \frac{R + 2\Lambda}{2\kappa} + \frac{1}{2} h_{AB} \varphi_i^A \varphi_k^B g^{ik} - W(\varphi^C) \right\}, \quad (4.111)$$

В связи с активным применением такой модели в космологии будем для нее использовать термин Киральная Космологическая Модель (ККМ).

Тензор энергии импульса для действия (4.109) определяется следующими компонентами

$$T_{ik} = h_{AB} \varphi_i^A \varphi_k^B - g_{ik} \left\{ \frac{1}{2} \varphi_j^A \varphi_l^B h_{AB} g^{jl} - W(\varphi^C) \right\} \quad (4.112)$$

Уравнения Эйнштейна с ТЭИ (4.112) приводятся к виду

$$R_{ik} = \kappa \left\{ h_{AB} \varphi_i^A \varphi_k^B - g_{ik} W(\varphi^C) \right\} + \Lambda g_{ik}. \quad (4.113)$$

Таким образом мы получили уравнения (4.110) и (4.113), которые определяют динамику киральных полей и поведение, порожденного ими, гравитационного поля.

4.9.2. Киральная космологическая модель инфляции

Рассмотрим модель S_{KKM} в рамках однородной и изотропной Вселенной, описываемой метрикой Фридмана - Робертсона - Уокера (ФРУ)

$$dS_{\mathcal{M}}^2 = (dt)^2 - K^2(t) \left\{ \frac{(dr)^2}{1 - \epsilon r^2} + r^2 [(d\theta)^2 + \sin^2 \theta (d\varphi)^2] \right\}. \quad (4.114)$$

Где $\epsilon = 1, 0, -1$ для замкнутой, плоской и открытой модели Вселенной соответственно. Неисчезающие компоненты ТЭИ (4.112) принимают вид

$$T_1^1 = T_2^2 = T_3^3 = -p = -\frac{1}{2} h_{AB} \varphi_t^A \varphi_t^B + W(\varphi) \quad (4.115)$$

$$T_4^4 = \varepsilon = \frac{1}{2}h_{AB}\varphi_t^A\varphi_t^B + W(\varphi)$$

Из соотношений (4.115) следует, что уравнение состояния вещества $p = -\varepsilon$ достигается когда φ_t^A - изотропный вектор в киральном пространстве

$$h_{AB}\varphi_t^A\varphi_t^B = 0$$

. Квазивакуумное состояние вещества $p = -\varepsilon$ является одним из необходимых условий физического истолкования инфляционной стадии. Другая крайняя ситуация – предельно жёсткое состояние материи с уравнением состояния $p = \varepsilon$ достигается при занулении массы-потенциала $W(\varphi)$. Гравитационное поле и динамика киральных полей были подробно исследованы для пространственно-плоских моделей ФРУ в работах [77],[172].

Несмотря на то, что масса-потенциал в модели S_{KKM} вводится с определенной степенью произвола, то есть, так же как и в моделях ССП, у нас появляется возможность введения $W(\varphi)$ геометрическим способом, сохраняя инвариантность симметрии кирального пространства (или нарушая её в соответствии с физическим механизмом). При этом возникает различие в описании гравитационного поля рассматриваемой модели (4.111) S_{KKM} и стандартного инфляционного сценария, например в модели "новой" инфляции.

В подтверждение сказанного, рассмотрим двухкомпонентную ККМ. В качестве кирального пространства выберем двумерную поверхность вращения

$$dS_{\mathcal{N}}^2 = d\phi^2 + 2P(\phi)d\chi^2 \quad (4.116)$$

где $P(\phi)$ совпадает (с точностью до знака) с потенциалом самодействия скалярного поля $V(\phi)$ [172]. Потенциал кирального поля выберем, следуя работе [159], в инвариантной форме

$$W = h_{AB}\xi^A\xi^B \quad (4.117)$$

где $\xi^A(\varphi)$ - вектор Киллинга кирального пространства (\mathcal{N}, h_{AB}) . Следуя терминологии работы [159], будем называть НСМ с потенциалом (4.117) массивной сигма моделью. Для одного из векторов Киллинга $\xi^A = \delta_\xi^A$ потенциал кирального поля принимает вид $W(\varphi^C) = \lambda 2P(\phi)$. Система уравнений (4.110),(4.113) в пространствах (4.114), с киральной метрикой (4.116) и потенциалом (4.117) может быть приведена к виду

$$\frac{1}{K^2}[KK_{44} + 2K_4^2 + 2\epsilon] = -\kappa\lambda P(\phi) - \Lambda, \quad (4.118)$$

$$-\frac{3K_{44}}{K} = \kappa[\phi_4^2 + 2P(\phi)\chi_4^2] + \kappa\lambda P(\phi) + \Lambda, \quad (4.119)$$

$$\frac{1}{K^3}\partial_4(K^3\phi_4) - \frac{1}{2}\frac{dP}{d\phi}\frac{1}{P}\chi_4^2 - \lambda\frac{dP}{d\phi} = 0, \quad (4.120)$$

$$\partial_4(2P(\phi)\chi_4 K^3) = 0. \quad (4.121)$$

Последнее уравнение легко интегрируется

$$2P(\phi)\chi_4 K^3(t) = const = c_1. \quad (4.122)$$

Напомним, что в (4.118) $\epsilon = 0, +1, -1$ для плоской, закрытой и открытой модели Вселенной соответственно.

4.9.3. Гравитационное поле квазивакуумного состояния вещества

Для того, чтобы получить уравнение состояния вещества $p = -\varepsilon$ необходимо, чтобы выполнялось условие $h_{AB}\varphi_t^A\varphi_t^B = 0$, что в рассматриваемом случае даёт

$$\phi_4^2 + 2P(\phi)\chi_4^2 = 0 \quad (4.123)$$

Возможно два варианта выполнения связей (4.123)

$$1) \phi_4 = 0; \chi_4 = 0; \Leftrightarrow; \phi = \phi_0; \chi = \chi_0$$

Данный случай позволяет получить нижеследующие решения:

а) Для пространственно-плоской модели Вселенной ($\epsilon = 0$)

$$K = K_0 \exp H_0 t, \quad H_0, K_0 = \text{const}; \quad (4.124)$$

$$P(\phi) = P_0 = \text{const}, \quad 3H_0^2 = -\Lambda - \kappa\lambda P_0, \quad c_1 = 0.$$

Данное решение соответствует деситтеровской (инфляционной) стадии расширения Вселенной.

б) Случай открытой и закрытой модели Вселенной ($\epsilon \neq 0$).

$$\epsilon = -1, \quad K = t, \quad P = P_0 = -\frac{\Lambda}{\kappa\lambda}; \quad (4.125)$$

$$K = \frac{1}{2} \left\{ \exp\{\sqrt{p_0}t\} + \frac{\epsilon}{p_0} \exp\{-\sqrt{p_0}t\} \right\}, \quad (4.126)$$

$$3p_0 = -\Lambda - \kappa\lambda P_0, \quad \epsilon = \pm 1, \quad P_0 < -\frac{\Lambda}{\kappa\lambda};$$

$$\epsilon = -1; \quad K = \frac{1}{\sqrt{-p_0}} \sin \sqrt{-p_0}t, \quad (4.127)$$

$$P_0 > -\frac{\Lambda}{\kappa\lambda},$$

$$2) \phi_4^2 = -2P(\phi)\chi_4^2, \quad P(\phi) < 0$$

Ясно, что в этом случае остаются справедливыми решения (4.125). Кроме того получены решения:

а) $\epsilon = -1, \quad 3H_0 = -(\Lambda + \kappa\lambda P_0);$

$$K = K_0 \exp\{H_0 t\}; \quad (4.128)$$

$$\phi = \frac{C_1}{\sqrt{-2P_0}} \exp\{-3H_0 t\} + \phi_0;$$

$$\chi = -\frac{C_1}{2P_0} \exp\{-3H_0 t\} + \chi_0; \quad C_1 = c_1(3H_0 K_0^3)^{-1};$$

б) $\epsilon = -1, \quad \kappa\lambda P_0 = 3 - \Lambda$

$$K = \sin t; \quad \phi = \frac{c_1}{\sqrt{-2P_0}} F_1(t) + \phi_0,$$

$$\chi = \frac{c_1}{2P_0} F_1(t) + \chi_0, \quad (4.129)$$

$$F_1(t) = \left\{ \frac{-\cos t}{2\sin^2 t} + \frac{1}{2} \ln \left| \tan \frac{t}{2} \right| \right\};$$

$$в) \quad \epsilon = -1, \quad \kappa\lambda P_0 = -3 - \Lambda$$

$$\begin{aligned} K &= \sinh t; \\ \phi &= \frac{c_1}{\sqrt{-2P_0}} F_2(t) + \phi_0, \\ \chi &= \frac{c_1}{2P_0} F_2(t) + \chi_0, \\ F_2(t) &= \left\{ -\frac{\cosh t}{2 \sinh^2 t} + \frac{1}{2} \ln \left| \tanh \frac{t}{2} \right| \right\}; \end{aligned} \quad (4.130)$$

$$г) \quad \epsilon = 1, \quad \kappa\lambda P_0 = 3 - \Lambda$$

$$\begin{aligned} K &= \cosh t; \\ \phi &= \frac{c_1}{\sqrt{2P_0}} F_3(t) + \phi_0, \quad \chi = \frac{c_1}{2P_0} F_3(t) + \chi_0, \\ F_3(t) &= \left\{ \frac{\sinh t}{2 \cosh^2 t} + \frac{1}{2} \arctan \sinh t \right\}; \end{aligned} \quad (4.131)$$

Заметим, что решения, приведенные в данном разделе, соответствуют тем, которые получены в рамках модели "новой" инфляции в приближении "медленного скатывания". Однако данные решения являются точными решениями для динамических уравнений киральных и гравитационных полей.

Глава 5.

Нелинейные поля в моделях инфляции

Сценарий космологической инфляции, то есть стадии экспоненциального расширения (раздувания) Вселенной на ранних этапах её эволюции, как правило базируется на модели самодействующего скалярного поля (ССП) ϕ , минимально взаимодействующего с гравитацией

$$S_{GSF} = \int \sqrt{-g} d^4x \left\{ \frac{R + 2\Lambda}{2\kappa} + \frac{1}{2} \phi_i \phi_k g^{ik} - V(\phi) \right\} \quad (5.1)$$

Предпочтение отдается теории СПП потому, что квантовая теория скалярного поля позволяет описать космологические фазовые переходы и восстановление симметрии при высоких температурах в Ранней Вселенной. Кроме того модель СПП допускает точное решение Де Ситтера при постоянном потенциале самодействия $V(\phi) = V_0$, который при этом трактуется как космологическая постоянная Λ . Однако заметим, что СПП служит лишь простейшей эффективной моделью, удовлетворительно описывающей эффекты гравитации и физики элементарных частиц на инфляционной стадии.

Строго говоря, если мы хотим быть последовательными при рассмотрении гравитационного поля на ранних этапах эволюции Вселенной, то в качестве источника гравитационного поля следует рассматривать материю (ТЭИ), которая описывается ТВО. То есть в качестве источника гравитационного поля следует рассматривать калибровочные и хиггсовские поля. Однако, более приближенной к теории СПП является киральная НСМ, которая может использоваться как эффективная модель для калибровочной теории [127]. На этом пути была построена так называемая, массивная киральная модель инфляции [173, 77], которая наиболее точно отражает теорию СПП и обладает большим спектром решений, в частности при описании квазивакуумного состояния вещества.

Следует заметить, что несмотря на кажущуюся простоту модели СПП при построении инфляционного сценария приходится ограничиваться различными приближениями при решении самосогласованной системы уравнений, соответствующей модели (5.1). Вполне вероятно, что именно отсутствие точных решений модели инфляции (5.1) приводит к некоторым противоречиям с ожидаемыми в наблюдательной астрофизике результатами [147, 146]. Более того, иногда при построении инфляционного сценария приходится рассматривать области пространства-времени, для которых существует противоречие с самосогласованной системой уравнений Эйнштейна и скалярного поля. А именно, речь идет о существовании градиента скалярного поля отличного от нуля $\nabla\phi \neq 0$, что противоречит следствию уравнений Эйнштейна о том, что поле ϕ является функцией от времени t и не зависит от пространственных координат.

В настоящем разделе рассматриваются эффекты киральных и калибровочных полей в пространствах космологического сценария – вселенных Фридмана.

5.1. Киральная космологическая модель, как эффективная теория инфляции

Вполне естественно предположить, что на ранней стадии эволюции Вселенной источником гравитационного поля являлась материя, описываемая калибровочными и хиггсовскими полями. С учетом гравитации такая модель в рамках Теории Великого Объединения описывается интегралом действия

$$S_{GUT} = \int \sqrt{-g} d^4x \left\{ \frac{R + 2\Lambda}{2\kappa} + L_M \right\}, \quad (5.2)$$

где

$$L_M = -\frac{\sqrt{-g}}{8\pi} \left\{ \frac{1}{2} G_{\mu\nu}^a G^{a\mu\nu} + D_\alpha \varphi^a D^\alpha \varphi^a + V(|\varphi|) \right\}. \quad (5.3)$$

Здесь $G_{\mu\nu}^a = \partial_\mu W_\nu^a - \partial_\nu W_\mu^a + e f_{bc}^a W^b W^c$, f_{bc}^a - структурные константы калибровочной группы для поля Янга-Миллса W_μ^a , $D_\mu = \partial_\mu + e[W_\mu,]$ - ковариантная производная, поле Хиггса φ^a осуществляет спонтанное нарушение калибровочной симметрии при фазовом переходе, если, например, потенциал поля $V(|\varphi|) = \frac{\lambda}{4}(\varphi^a \varphi^a - F^2)^2$, где $F = \langle |\varphi^a| \rangle \neq 0$ - вакуумное среднее поля.

Модель космологической инфляции (5.2,5.3) содержит в себе стандартную модель инфляции, основанной на теории ССП (5.1). Действительно, при условии зануления поля Янга-Миллса удлиненные производные D_α переходят в частные ∂_α , и в случае одного эффективного скалярного (хиггсовского) действительного поля ϕ с потенциалом самодействия $V(\phi)$ интеграл действия (5.2) в точности совпадает с действием (5.1).

Рассмотрим ККМ с потенциалом взаимодействия $W(\varphi)$ [173]

$$S_{NSMW} = \int_{\mathcal{M}} \sqrt{-g} d^4x \left\{ \frac{1}{2} h_{AB}(\varphi) \varphi_i^A \varphi_k^B g^{ik} + W(\varphi) \right\}. \quad (5.4)$$

Здесь $(\mathcal{M}, g_{ik}(x))$ - пространство - время, $(\mathcal{N}, h_{AB}(\varphi))$ - киральное пространство полей $\varphi = (\varphi^1, \dots, \varphi^n)$, $\varphi_k^A = \partial_k \varphi^A = \varphi_{,k}^A$.

Отметим какими важными для инфляции свойствами обладает такая теория. Прежде всего модель (5.4) является обобщением для хиггсовских полей (при равенстве нулю калибровочных), которая легко получается из (5.3) в предположении, что метрика кирального пространства совпадает с единичной матрицей

$$h_{AB}(\varphi) = \text{diag}\{1, 1, \dots, 1\}.$$

Во вторых, существует конкретная двухкомпонентная НСМ, которая представляет динамику теории ССП [77]. Третьим свойством является возможность представить калибровочную теорию как нелинейную сигма модель [127]. Кстати, отметим и возможность представления гравитационного поля как четырехкомпонентной НСМ [169].

Рассмотрим еще один аспект связанный со стандартной моделью инфляции (5.1) и ТВО (5.2). Теория ССП имеет в определенном смысле вырожденную геометрическую структуру. То есть, для него не существует внутреннего пространства, которое описывало бы микрофизику системы. ТВО обладает таковым, так же как и НСМ. В работе [127] показано, что калибровочная теория, обладающая $SU(2)$ - симметрией, может быть представлена как $O(5)$ - инвариантная НСМ. Поэтому можно сделать вывод, что источник гравитационного поля в рамках ТВО может быть представлен эффективной НСМ, содержащей ту же симметрию, что и ТВО. Как видно из приведенного примера, симметрия НСМ может быть более высокой по отношению к ТВО.

Вполне понятно, что можно ожидать описание скажем $SU(5)$ -калибровочной модели, наиболее популярной в ТВО, в рамках $O(N)$ -инвариантной НСМ. В связи с этим решим задачу о существовании точных решений для самосогласованной системы уравнений Эйнштейна и киральных полей.

5.2. $SO(N)$ НСМ в пространствах ФРУ

В разделе 5.2 показано, что в классе метрик ФРУ

$$dS^2 = dt^2 - K^2(t) \left\{ \frac{dr^2}{1 - \epsilon r^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \right\} \quad (5.5)$$

система уравнений Эйнштейна и киральных полей, соответствующая действию S_{KKM} (4.111) с учетом гравитационного поля имеет следующее точное решение.

Решение для гравитационного поля

$$dS^2 = dt^2 - K_0^2 t^{2/3} \{ dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \}. \quad (5.6)$$

Метрика кирального пространства выбрана в виде

$$dS^2 = (d\varphi^1)^2 + \sin^2 \varphi^1 \{ (d\varphi^2)^2 + \sin^2 \varphi^2 \{ (d\varphi^3)^2 + \dots + \sin^2 \varphi^{N-2} (d\varphi^{N-1})^2 \} \dots \}. \quad (5.7)$$

Киральные поля определяются цепочкой соотношений

$$\begin{aligned} \varphi^1 &= \arccos(c_0^{-1} \sqrt{c_0^2 - c_1^2} \cos \xi_1), \quad \xi_1 = c_0 u, \quad u = \ln t, \quad c_0^2 = \frac{2}{3\kappa}; \\ \varphi^2 &= \arccos(c_1^{-1} \sqrt{c_1^2 - c_2^2} \cos \xi_2), \quad \xi_2 = \operatorname{arctg}(c_0 c_1^{-1} \operatorname{tg} \xi_1), \\ &\dots \\ &\dots \\ \varphi^{N-2} &= \arccos(c_{N-3}^{-1} \sqrt{c_{N-3}^2 - c_{N-2}^2} \cos \xi_{N-2}), \\ \xi_{N-2} &= \operatorname{arctg}(c_{N-3} c_{N-2}^{-1} \operatorname{tg} \xi_{N-2}), \\ \varphi^{N-1} &= \operatorname{arctg}(c_{N-1} c_{N-2}^{-1} \operatorname{tg} \xi_{N-2}), \\ &c_0^2 > c_1^2 > \dots > c_{N-2}^2. \end{aligned}$$

Таким образом, при описании $SU(2)$ -инвариантной калибровочной теории посредством $SO(5)$ -инвариантной "кинетической" НСМ (т.е. в отсутствие кирального потенциала взаимодействия $W(\varphi)$ в действии (5.4)) масштабный фактор Вселенной возрастает по степенному закону $K(t) \simeq t^{1/3}$, что не является достаточным для инфляционного сценария. Ситуация в отсутствие хигсовских полей, но при наличии калибровочных рассмотрена в работе [28].

Литература

- [1] Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц, *Теоретическая физика: Т.II. Теория поля*// 7-е изд.,испр.–М.:Наука, 1988.-512 с.
- [2] К.П.Станюкович, В.Н.Мельников, *Гидродинамика, поля и константы в теории гравитации*// М.:Энегроатомиздат, 1983.-256 с.
- [3] А.Д.Линде, *Физика элементарных частиц и инфляционная космология*// М.: Наука, 1990.-280 с.
- [4] Дж.Тейлор, *Калибровочные теории слабых взаимодействий*// М.:Мир, 1978.-208 с.
- [5] К.Ициксон, Ж.-Б.Зюбер, *Квантовая теория поля*// М.:Мир, 1984, т.2.-400 с.
- [6] Р.Раджараман, *Солитоны и инстантоны в квантовой теории поля.*// М.:Мир, 1985.-416с.
- [7] Л.А.Тахтаджян, Л.Д.Фаддеев, *Гамильтонов подход в теории солитонов*// М.: Наука,1986.-528 с.
- [8] Дж.Уизем, *Линейные и нелинейные волны*// М.:Мир., 1977.-624с.
- [9] А.Рарепetrou, Proc.Roy.Irish.Acad.,1947, **A51**,p.191.
- [10] И.З.Фишер, *Скалярное мезостатическое поле с учетом гравитационных эффектов*// ЖЭТФ,1948, том **18**, N 7, С.636.
- [11] Н.А.Buchdahl, Quart.J.Math (Oxford),1954, **5**,P.116.
- [12] Н.А.Buchdahl, Australian J.Phys.,1956,**9**,p.13.
- [13] Н.А.Buchdhal, *Reciprocal static metrics and scalar fields in the general theory of relativity*// Phys. Rev.,1959, **115**,p.1325.
- [14] Дуань И-ши, *Самосогласованная система гравитационного и скалярных полей*// ЖЭТФ, 1954, **27**,С.756.
- [15] W.B.Vonnor, Z.Phys., 1961,**161**, p.439.
- [16] O.Bergmann and R.Leipnik, *Space-time structure of a static spherically symmetric scalar field*// Phys. Rev.,1957, **107**,p.1157.
- [17] А.Эйнштейн, *Собрание научных трудов*// Издательство "Наука Москва,1965, т.1.-700с.

- [18] K.Kuchař, *On the Rainich geometrization of scalar meson fields*// Czechoslovak J.Phys.,1963,**B13**,p.511.
- [19] A.J.Janis, E.T.Newman and J.Winicour, *Reality of the Schwarzschild singularity*// Phys.Rev.Lett., 1968,**20**,p.878.
- [20] A.J.Janis, D.C.Robinson and J.Winicour, *Comment on Einstein scalar solutions*// Phys.Rev.,1969,**186**, p.1729.
- [21] Р.Пенроуз, *Конформная трактовка бесконечности*// В книге: Гравитация и топология, (под ред. Д.Иваненко) М.:Мир,1966, с.152-181.
- [22] R.Penney, *Geometrization of a massive scalar field*// J.Math.Phys.,1965, **6**,p.1029.
- [23] R.Penney, *Axially symmetric zero-rest-mass solutions of Einstein's equations*// Phys.Rev, 1968,**174**,p.1578.
- [24] Р.А.Асанов, *Статические скалярное и электромагнитные поля в теории тяготения Эйнштейна*// ЖЭТФ, 1967, т.**53**, N 2(8),С.673.
- [25] Э.А.Тагиров, Н.А.Черников, *Квантовая теория поля в пространстве де Ситтера*// 1968, Препринт **P2-3777**, Дубна, ОИЯИ.
- [26] G.Ludwig, J.Math.Phys., 1971,**12**, No.7,p.1218.
- [27] G.Ludwig, *Geometrization of a massive scalar field*// J.Math.Phys.,1971,**12**,No.7, p.1220.
- [28] М.А.Марков, *Global properties of collapsing matter (Black Holes)*// Preprint JINR, E2-6831, Dubna,1972.-49p.
- [29] М.А.Марков, *Глобальные свойства вещества в коллапсированном состоянии. ("Черные дыры")*// Успехи физических наук, 1973, т.**111**, вып.1,С.3.
- [30] K.B.Lal and T.Singh, *A note on a non-singular zero-rest-mass scalar field*// "Tensor,N.S. 1974, **28**,p.250.
- [31] T.Singh, *A plane symmetric solution of Einstein's field equations of general relativity containing zero-rest-mass scalar field*// GRG, 1974, **5**(6),p.657.
- [32] L.K.Patel, *Plane-symmetric zero mass meson solution of Einstein's equations*// "Tensor,N.S. 1975,**29**,p.237.
- [33] K.B.Lal and A.Pradhan, *Accademia Nazionale dei Lincei*,1976,**61**, No.1-2,p.109-114.
- [34] J.D.Bekenstein, *Exact solutions of Einstein-conformal scalar equations*// Ann.Phys.,1974, **82**,p.535.
- [35] R.V.Penney, *Conformally flat zero-mass meson solutions of Einstein equations*// Phys.Rev.,1976, **D14**, p.910.
- [36] A.F.da F.Teixeira, I.Wolk and M.M.Som, *On static electrovacs with scalar fields*// J.Phys., 1976,**A9**,p.53.

- [37] Rowan ,Stephenson G.A. *The massive scalar meson field in a Schwarzschild background space*// J.Phys.A:Math.Gen. v.9.No.8,p.1261.
- [38] D.Ray, *Scalar meson fields in a conformally flat space*// J.Math.Phys.,1977, **18**,p.1899.
- [39] A.Banerjee and S.B.D.Chaudhury, *Stationary axially symmetric coupled Einstein-Maxwell-scalar fields*// Phys.Rev., 1977,**D15**,No.10,p.3062.
- [40] M.Gurses, *Conformally flat solutions of Einstein-massless-scalar field equation*// Phys.Rev.,1977,**D15**,No.10,p.2731.
- [41] Н.А.Зайцев, Г.Н.Шикин, *Конформно-плоские нестационарные решения в ОТО и скалярно-тензорных теориях гравитации*// Проблемы теории гравитации и элементарных частиц. (Под ред.К.П.Станюковича.) М.,Атомиздат1975,вып.6,С.31.
- [42] Г.Н.Шикин, *Нестационарные решения автомодельного типа системы уравнений Эйнштейна и безмассового скалярного поля в ортогональной метрике*// Проблемы теории гравитации и элементарных частиц. (Под ред.К.П.Станюковича.) М.,Атомиздат1975,вып.6,С.38.
- [43] И.А.Федосеев, В.С.Дородных, *Скалярное поле в конформно-плоских пространствах*// Проблемы теории гравитации и элементарных частиц. (Под ред.К.П.Станюковича.) М.,Атомиздат1976,вып.7,С.155.
- [44] Н.А.Зайцев, Г.Н.Шикин, *Плоско-симметричные и цилиндрически-симметричные решения уравнений Эйнштейна в присутствии безмассового скалярного поля*// Проблемы теории гравитации и элементарных частиц. (Под ред.К.П.Станюковича.) М.,Атомиздат1977,вып.8,С.77.
- [45] Г.Н.Шикин, *Некоторые нестационарные решения системы уравнений Эйнштейна, безмассового скалярного и электромагнитных полей для случая ортогональной метрики*// В книге: Теория относительности и гравитация. М.: "Наука" 1976, С.124
- [46] L.Lohiya and N.Panchapakesan, *Massless scalar field in a de Sitter universe and its thermal flux*// J.Phys.A:Math.Gen.,1978,**A11**,No.10.,p.1963.
- [47] A.D.Papadopoulos, C.R.Acad.Sc.Paris,1978,**t.287**,Serie A,p.377.
- [48] V.N.Melnikov, S.V.Orlov, *Nonlinear cosmology as a quantum vacuum effect*// Phys.Lett. **A70**, 1979, p.263.
- [49] A.Kleber, M.M.Som and A.F.da F.Teixeira, *Anisotropic scalar field with cosmical time*// GRG,1979,**v.10**,No.6,p.535.
- [50] Дж.Уизем, *Линейные и нелинейные волны*// М.:Мир., 1977.-624с.
- [51] S.Detweiler, *Klein Gordon equation and rotating black holes*// Phys.Rev.,1980, **D22**,No.10,p.2323.
- [52] M.Wyman, *Static spherically symmetric scalar fields in general relativity*// Phys.Rev.,1981, **D24**,No.4,p.839.

- [53] B.K.Berger, *Comments on the coherent-state representation of a scalar field in the early universe*// Phys.Rev.,1982, **D25**,No.8,p.2208.
- [54] D.Lorenz, *Scalar field generalizations of electromagnetic Bianchi models of types II, VIII and IX*// Lett. Al Nuovo Cimento, 1980, v.**29**,No.7,p.238.
- [55] V.P.Frolov and A.I.Zel'nikov, *The massless scalar field around a static black hole*// J.Phys.A:Math.Gen., 1980, **A13**,p.L345.
- [56] К.П.Станюкевич, В.Н.Мельников, *Гидродинамика, поля и константы в теории гравитации*// М.:Энегроатомиздат, 1983.-256 с.
- [57] Л.А.Тахтаджян, Л.Д.Фаддеев, *Гамильтонов подход в теории солитонов*// М.: Наука,1986.-528 с.
- [58] Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц, *Теоретическая физика: Т.II.Теория поля*// 7-е изд.,испр.-М.:Наука, 1988.-512 с.
- [59] L.Shiff, *Nonlinear meson theory of hadronic force.I*// Phys.Rev.,1951, **84**,p.1.
- [60] Л.Шифф, *Нелинейная мезонная теория ядерных сил. I.Нейтральные скалярные мезоны и точечно-контактное отталкивание*// В книге: Нелинейная квантовая теория поля. Под ред. Д.Д.Иваненко. М.: ИЛ, 1959, с.300.
- [61] *Нелинейная квантовая теория поля* // Под ред. Д.Д.Иваненко. М.: ИЛ, 1959.
- [62] R.Finkelstein, R.LeLevier and M.Ruderman, *Nonlinear spinor fields*// Phys.Rev.,1951, **83**,p.326.
- [63] А.С.Давыдов, Н.И.Кислуха, *Пример самолокализующегося нелинейного релятивистского поля*// ТМФ, 1973, том **16**,No.1,с.100.
- [64] В.П.Колпаков, Г.Н.Шикин, *Аксиально-симметричные решения системы уравнений Эйнштейна и нелинейного уравнения безмассового скалярного поля*// Вестник МГУ, 1974, No.1, с.
- [65] В.Е.Захаров, Л.А.Тахтаджян, Л.Д.Фаддеев, *Полное описание решений "sin-Gordon"уравнения*// ДАН СССР, 1974, том **219**, No.6,с.1334.
- [66] P.V.Burt, *Special solution in nonlinear field theory*// Phys.Rev. Lett., 1974, **32**, No.19, p.1080.
- [67] P.V.Burt, *Self-interacting field theory of neutral pseudoscalar mesons*// Lett.Nuovo Cim.,1975, v.**13**,No.1,p.26.
- [68] P.V.Burt, *Quantization of a solitary wave in the nonlinear field theory*// Acta Phys.Polonica, 1976, v.**B7**, No., p.617.
- [69] P.V.Burt, *Classical, spherically symmetric solutions of nonlinear field equations*// Lett.Nuovo Cim.,1977, v.**18**,No.17.p.547.

- [70] И.Л.Боголюбский, *Осциллирующее частицеподобное решение нелинейного уравнения Клейна-Гордона*// Письма в ЖЭТФ, 1976, том **24**,вып.10, с.
- [71] Б.С.Гетманов, *Связанные состояния солитонов в модели теории поля ϕ_2^4* // Письма в ЖЭТФ, 1976, том **24**,вып. 5, с.??
- [72] А.С.Будагов, Л.А.Тахтаджян, *Нелинейная одномерная модель классической теории поля с внутренними степенями свободы*// ДАН СССР, 1977, том **235**,No.4,с.805.
- [73] В.Г.Маханьков, Ю.В.Катышев, *О существовании и устойчивости неодномерных солитоноподобных решений в некоторых моделях теории поля*// Препринт ОИЯИ **P2-10547**,1977, Дубна, ОИЯИ.
- [74] В.Г.Маханьков, *Об устойчивости "заряженных"солитонов в рамках уравнения Клейна-Гордона с насыщающейся нелинейностью*// Препринт ОИЯИ **P2-10362**,1977, Дубна, ОИЯИ.
- [75] А.Кумар, *Частичеподобное кусочно-аналитическое решение в одной нелинейной модели уравнения Клейна-Гордона*// Известия вузов. Физика1977,No.1,с.
- [76] Б.С.Гетманов, *Интегрируемая модель нелинейного комплексного скалярного поля с нетривиальной асимптотикой солитонных решений*// ТМФ, 1979,том **38**, No.2, с.186.
- [77] Г.П.Джорджадзе, А.К.Погребков, М.К.Поливанов, *Сингулярные решения уравнения и динамика особенностей ТМФ.*, 1979, том **40**, No.2, 221-234
- [78] Б.М.Барбашов, В.В.Нестеренко, А.М.Червяков, *Солитоны в некоторых геометрических теориях поля*// ТМФ.,1979,40,No.1.,15-27
- [79] И.Р.Пийр, Э.Х.Кикас, *О гравитационном самодействии сферически-симметричного скалярного поля*// В книге: Современные проблемы общей теории относительности, Минск, Институт Физики АН СССР,1979,с.144-148
- [80] М.П.Коркина, *Влияние физических полей на метрику Шварцшильда*// В книге: Современные проблемы общей теории относительности,1979,с.149-158
- [81] T.Kodama, L.C.S.De Oliveira, F.S.Santos, *Properties of general relativistic kink solution*// Phys.Rev.,1979,v.**19**. No.12,p.3576.
- [82] T.F.Morris, *Classical confinement: field theories with spontaneously bounded domains*// Hadronic Journal, 1980, v.**3**,p.1333.
- [83] A.R.Chowdhury, *Inverse scattering equations for $g\phi^3 + h\phi^4$ theory in two dimensions*// J.Phys.A: Math.Gen., 1980, **13**, L387.
- [84] A.Kumar, *Exact Q-stable scalar gaussian solutions in confining models*// Physica Scripta, 1980, v.**22**,p.560.
- [85] A.O.Barut, Xu Bo-Wei *New type of vacuum solutions of nonlinear conformally covariant coupled field equations*// Phys.Rev.,1981, **D23**, No.12,p.3076.

- [86] J.K.Drohм, L.P.Kok, Yu.A.Simonov, J.A.Tjon, A.I.Veselov, *Collision and rotation of solitons in three space-time dimensions*// Phys.Lett.,1981,**В 101**,No.3,p.204.
- [87] Т.И.Белова, Н.А.Воронов, Н.Б.Конюхова, Б.С.Парийский, *Численные исследования устойчивости частицеподобных решений уравнений скалярного поля*// Журнал вычислительной математики и математической физики АН СССР, 1981, том **21**,No.1,c.89.
- [88] A.K.Pogrebkov, *Singular solutions:an example of a Sinh-Gordon equation*// Lett.Math.Phys., 1981, **5**, p.277.
- [89] E.A.Jeffery, *New classical solutions to ϕ^4 theory*// Aust.J.Phys., 1981, **34**, p.113.
- [90] Г.Г.Иванов, Известия вузов. Физика1980,23,No.12.,c.22-25
- [91] Г.Г.Иванов, В книге: Гравитация и теория относительности, Казань, издательство Казанского университета1981,вып **18**,с.54-60
- [92] Г.Г.Иванов, В книге: Гравитация и теория относительности, Казань, издательство Казанского университета1983,вып **20**,с.37-46
- [93] Г.Г.Иванов, *Симметрии, законы сохранения и точные решения в нелинейной сигма-модели*// ТМФ, 1983, т.**57**,N 1, с.45.
- [94] Г.Г.Иванов, *Симметрии и классические решения в гравитационной $SO(3)$ -инвариантной сигма-модели*// Гравитация и теория относительности,1984,v.**21**,No.,p.97
- [95] Г.Г.Иванов, *Полиномиальные законы сохранения и точные решения, связанные с изометрическими и гомотетическими симметриями в нелинейной сигма-модели*// ТМФ, 1985, т.**62**, N 1,c.144.
- [96] J.Goldstone, Nuovo Cim.,1961,**19**,p.154.
- [97] Дж.Тейлор, *Калибровочные теории слабых взаимодействий*// М.:Мир, 1978.-208 с.
- [98] J.Schwinger, *A theory of fundamental interactions*// Ann.Phys.,1957,**2**,p.407.
- [99] К.Ициксон, Ж.-Б.Зюбер, *Квантовая теория поля*// М.:Мир, 1984, т.2.-400 с.
- [100] Т.Н.Р.Скургме, *A nonlinear theory of strong inderactions*// Proc.Roy.Soc.,1958,v.**A247**,No.1249,p.260
- [101] V.De'Alfaro, S.Fubini, G.Furlan, *Nonlinear sigma models and classical solutions*// Preprint ICTP-Trieste,1978.
- [102] К.Pohlmeyer, *Integrable hamiltonian systems and interactions constraints*// Comm.Math.Phys.,1976,v.**46**,p.207
- [103] С.Адлер, Р.Дашен, *Алгебры токов и их применение в физике частиц*// М.:Мир, 1970.-436 с.

- [104] A.M.Polyakov, Phys.Lett.,1975,**59B**,p.79.
- [105] J.Eells, J.H.Sampson, *Harmonic mappings of riemannian manifolds*// American Journal of Mathematics,1964,v.**86**,No.1,p.109
- [106] В.А.Белинский, ЖЭТФ,1979,**77**,No.4, С.1239.
- [107] В.Е.Захаров, А.В.Михайлов, *Релятивистски-инвариантные двумерные модели теории поля, интегрируемые методом обратной задачи* ЖЭТФ,1978,v.**74**,No.,p.1953
- [108] M.Forger, *Instantons in nonlinear sigma-models gauge theories and general relativity*// Lect.Not.Phys.,1981,v.**139**,No.,p.110
- [109] G.Ghika, M.Visinescu, *Gribow vacuum copies in terms of harmonic maps*// Phys.Rev.1980,v.**D21**,No.6,p.1538
- [110] G.Ghika, M.Visinescu, *Four dimensional sigma model coupled to the metric tensor field*// Nuovo Cim., 1980, v.**59B**,No.1,p.59
- [111] G.Ghika, M.Visinescu, *Meron solution of the sigma model and singular harmonic maps*// Z.Physik ,1982,v.**C11**,No.,p.353
- [112] G.Ghika, *Harmonic maps and submersion in local euclidean gravity coupled to the sigma-model*// Rev.Roum.Phys.,1986,v.**31**,No.7,p.635
- [113] P.Tataru-Mihai, *Classical solutions for the 4-dimensional sigma-nonlinear model*// Nuovo.Cim.,1979,v.**A51**,No.2,p.169
- [114] А.М.Переломов, *Решения типа инстантонов в киральных моделях*// Успехи физических наук, **т.134**,N4, 1981, С.577.
- [115] А.М.Perelomov, *Chiral models: geometrical aspects*// Phys.Reports,v.**146**,No.3,p.136
- [116] R.A.Matzner and C.W.Misner, Phys.Rev.154(1967)1229.
- [117] Y.Nutku and M.Halil, Phys.Rev.Lett.39(1977)1379.
- [118] А.А.Белавин, А.М.Поляков, *Метастабильные состояния двумерного изотропного ферромагнетка*// Письма в ЖЭТФ, 1975, том **22**,No.10, с.503.
- [119] В.М.Barbashov, V.V.Nesterenko, *Differential geometry and nonlneear field models*// Fortsc. Physik, 1980, v.**28**,p.427.
- [120] D.Woo, *Pseudoparticle configuration in two-dimensional ferromagnets*// J.Math.Phys.,1977, v.**18**,No.6,p.1264
- [121] S.Weinberg, *Dynamical approach to current algebra*// Phys.Rev.Lett., 1967, v.**18**,No.5,p.188
- [122] M.Gell-Mann, M.Levy, *The axial vector current in beta decay*// Nuovo Cim., 1960, v.**26**,No.4,p.705

- [123] E.Gava, R.Jengo, *A four-dimensional nonlinear sigma-model*// Nucl.Phys, 1978, v.**140**,No.3,p.510
- [124] D.J.Gross, *Meron configurations in the two-dimensional $O(3)$ sigma-model*// Nucl.Phys.,1978, v.**B132**,p.439
- [125] V.De'Alfaro, S.Fubini, G.Furlan, *Gauge theories and strong gravity.*// Nuovo Cim., 1979, **50A**,No.4,p.523
- [126] P.B.Wiegmann, *Exact solution of the $O(3)$ nonlinear sigma-model*// Phys.Zett.,1985,v.**152B**,No.3,4; p.209
- [127] E.Gava, R.Jengo, C.Omero, *The $O(5)$ nonlinear sigma-model as a $SU(2)$ gage theory*// Physics Letters,1979,v.**B81**,No.2,p.187
- [128] E.V.Doktorov, A.N.Tarakanov, *Sigma model for Ernst equation: Lax representation Backlund transformation and divergence free currents*// Int.J.Phys, 1984,v.**23**,No.5,p.449
- [129] V.De'Alfaro, S.Fubini, G.Furlan, *Nonlinear sigma models and classical solutions*// Preprint ICTP-Trieste,1978.
- [130] В.Е.Захаров, А.В.Михайлов, *Пример нетривиального взаимодействия солитонов в двумерной классической теории поля*// Письма в ЖЭТФ,1978,v.**27**,No.1,p.47
- [131] A.Cass, *Topological properties of the $O(3)$ nonlinear sigma-model in two dimensions*// Phys.Rev.,1983,v.**D27**,No.4,p.932
- [132] S.Mukhi, *Finiteness of nonlinear sigma-models with parallerizing torsion*// Phys.Lett.,1985,v.**162B**,No.4,5,6,p.345
- [133] А.А.Славнов, Л.Д.Фадеев, *Инвариантная теория возмущений для нелинейных киральных лагранжианов*// ТМФ.,1971,v.**8**,No.3,p.297
- [134] C.Omero, R.Percacci, *Generalized nonlinear sigma-models in curved space and spontaneous compactification*// Nucl.Phys.,1980,v.**B165**,No.,p.351
- [135] T.Jaroszewicz, *Induced topological terms, spin and statistics $(2+1)$ dimension*// Phys.Lett.,1985,v.**159B**,No.4,5,6,p.299
- [136] A.H.Guth, *Inflationary universe: A possible solution to the horizon and flatness problems*// Phys.Rev.,**D23**,No.2,1981,p.347.
- [137] A.Linde, *Eternal extended inflation and graceful exit from old inflation without Jordan-Brans-Dicke*// Phys.Lett.,**249**,No.1,1990,p.18.
- [138] А.Д.Линде, *Физика элементарных частиц и инфляционная космология*// М.: Наука, 1990.-280 с.
- [139] D.La, P.J.Steinhardt, *Extended Inflationary Cosmology*// Phys.Rev.Lett.,**62**,No.4,1989,p.376.

- [140] R.H.Brandenberger, *Inflationary universe models and cosmic strings*// In: "Physics of the Early universe (ed. by J.A.Peacock, A.F.Heavens,A.T.Davies), Proc. of the 36th Scottish Universities Summer School in Physics, 1989, p.281.
- [141] J.D.Barrow, *String-driven inflationary and deflationary cosmological models*// Nucl.Phys.,**310**,1988, p.743.
- [142] J.D.Barrow, P.Saich, *Scalar-field cosmologies*// Class.Quantum Grav., 1993, **10**,p.279.
- [143] J.E.Lidsey, *Multiple and anisotropic inflation with exponential potentials*// Class.Quantum.Grav.,1992, **9**,p.1239.
- [144] Q.Shafi, A.Vilenkin, Phys.Rev.Lett.,1984, **v.52**, N 8, P.691.
- [145] A.A.Starobinskii, Pis'ma Zh.Eksp.Teor.Fiz. **42**, No.3 (1985) 124.
- [146] P.Peter, D.Polarski, A.A.Starobinsky. // Preprint, YITP/V-94-6,DAMTP-R-94/20,astro-ph/940 3037, april 1994. 23p.
- [147] J.P.Mücket, S.Göttlober. //Proc.of the 6th APRMA, 16-20 august, 1993,IUCAA, Puna,India. – Journal of Astrophysics and Astronomy, Suppl., 1995, v.**16**.
- [148] А.С.Сахаров, М.Ю.Хлопов, // Ядерная физика,1993, т.56,в.3, с.220.
- [149] A.Burd,J.D.Barrow, //Nuclear Phys., B308 (1988), 929.
- [150] K.A.Olive, Phys.Reports.**190**,N6 (1990)307-403.
- [151] T.Rothman, G.F.R.Ellis, Phys.Lett.**B180**.– 1986. – P19.
- [152] D.La, P.J.Steinhard and E.W.Bertshinger, Phys.Lett. **B231**.– 1989.– 231;
- [153] S.Kalara, N.Kaloper, K.A.Olive, Nucl. Phys. **B341**.–1990.– 252.
- [154] J.D.Barrow,K.Maeda, Nucl. Phys. **B341**.–1990.–294.
- [155] L.A.Kofman, A.D.Linde, A.A.Starobinsky, Phys.Lett.B175.(1985) 361.
- [156] J.Silk, M.S.Turner, Phys.Rev.**D35**.–1987.–419.
- [157] L.M.Widrow, Phys.Rev.**D44**.–1991.–2306.
- [158] F.S.Adams,K.Freese, Phys.Rev. **D43**.–1991.–353.
- [159] E.Abraham, Preprint DAMTP-R-91/19, 1991.–15p.
- [160] L.P.Chimento and A.E.Cossarini, Class. Quantum Grav., **11** 1177 (1994).
- [161] K.C.K.Chan and R.B.Mann, Class. Quantum Grav., **10** 913 (1993).
- [162] С.В.Червон, *О волновом нейтральном скалярном поле в ОТО*// В книге: Гравитация и теория относительности, Казань, издательство Казанского университета1983.–вып.**20**.–С.143

- [163] С.В.Червон, *Плоско-симметричные решения в $SO(4)$ -инвариантной самогравитирующей σ -модели*// Известия вузов. Физика. – 1983, N 8.–С.89.
- [164] С.В.Червон, *Плоско-симметричные решения в самогравитирующих $SO(N)$ -инвариантных нелинейных сигма-моделях*// В книге: Тезисы докладов VI советской гравитационной конференции, Москва, издательство Университета Дружбы Народов, 1984, С.145.
- [165] С.В.Червон, *Точные решения в самогравитирующих $SO(N)$ -инвариантных нелинейных сигма-моделях*// В книге: Гравитация и теория относительности, Казань, издательство Казанского университета 1986, вып. **23**, С.103.
- [166] Г.Г.Иванов, С.В.Червон, *Точные решения в $SO(3)$ -инвариантной нелинейной сигма модели, связанные с изометрическими и гомотетическими симметриями*// В книге: Гравитация и теория относительности, Казань, издательство Казанского университета 1987, вып. **24**, С.37.
- [167] С.В.Червон, *О редукции четырехмерной нелинейной сигма-модели к моделям с нарушенной киральной симметрией*// В книге: Гравитация и теория относительности, Казань, издательство Казанского университета 1988, вып. **25**, С.135.
- [168] S.V.Chervon, A.G.Muslimov, *The plane-symmetric gravitational field as a four-component nonlinear sigma model*// Preprint **LFTI-1347**, Ioffe Physical Technological Institute, Leningrad, 1989.-20p.
- [169] S.V.Chervon, A.G.Muslimov, *Plane-symmetric gravitational field as a four-component nonlinear sigma model*// Phys.Lett.**A142**, 1989, P.14.
- [170] Червон С.В. *О киральной модели нелинейных скалярных полей*// В книге: Гравитация и теория относительности, Казань, издательство Казанского университета 1992, вып. **29**, С.85.
- [171] S.V. Chervon, *Nonlinear sigma models for inflation scenarios*// IUCAA Preprint, **IUCAA- 15/92**, October 1992.- 16 p.
- [172] S.V.Chervon, *Nonlinear sigma model for inflation scenarios.II.*// IUCAA Preprint, **IUCAA-26/93**, October 1993.-14 p.
- [173] S.V.Chervon, *The massive chiral model on inflation arena*// In: International Conference on Astrophysics and Cosmology, December 20-23,1993, Saha Institute of Nuclear Physics, Calcutta, India. Abstracts, p.44.
- [174] S.V.Chervon, *Chiral nonlinear sigma models and cosmological inflation*// Gravitation & Cosmology, 1995, Vol.1, No.2,p.1
- [175] С.В.Червон, *О киральной модели космологической инфляции*// Известия вузов. Физика, 1995, No.5, С.114.
- [176] С.В.Червон, В.М.Журавлев, *Точные решения и тонкая настройка потенциала в моделях космологической инфляции*// Основания теории гравитации и космологии. Тезисы докладов международной школы-семинара. Одесса, 4-10 сентября 1995, с.67.

- [177] С.В.Червон, В.К.ЩигOLEV, *Киральные модели космологической инфляции с полями Янга-Миллса*// Основания теории гравитации и космологии. Тезисы докладов международной школы-семинара. Одесса, 4-10 сентября 1995, с.68.
- [178] С.В.Червон, В.М.Журавлев, *Точные решения в моделях космологической инфляции*// Известия вузов. Физика. N 8, 1996, 83.
- [179] С.В.Червон, В.К.ЩигOLEV, В.М.Журавлев, *Нелинейные поля в моделях космологической инфляции*// Известия вузов. Физика. N 2, 1996, 41.
- [180] С.В.Червон, *Нелинейные поля в теории гравитации и космологии*// Ульяновск: изд-во Средневолжского научного центра, 1997.-191с.
- [181] G.F.R Ellis, M.S. Madsen *Нелинейные поля в теории гравитации и космологии*// Classical and Quantum Gravity, V. 8, N 4, 1991, 667.
- [182] B.C.Paul, S.Mukherjee and A.Beesham, "Dissipative cosmology in (1+1) dimensions."// *University of Zululand Preprint*, 1996-22p.
- [183] С.В.Червон, *Точные решения для двухкомпонентной нелинейной сигма модели в пространствах инфляционного сценария*// В книге: Труды VIII Российской Гравитационной Конференции,
- [184] S.V.Chervon, *Cosmological solutions in two-component nonlinear sigma model*// Journal of Astrophysics and Astronomy, Supplement, v.16, p.65-68, 1995.

Часть II

Космологические возмущения в точнорешаемых моделях инфляции

Глава 6.

Космологическая инфляция

6.1. Предпосылки теории инфляции

Стандартная теория Большого Взрыва утверждает, что Вселенная была рождена приблизительно 13 миллиардов лет назад, в состоянии бесконечно большой плотности и температуры. С быстрым расширением Вселенной средняя энергия частиц быстро уменьшилась, и Вселенная стала холодной. Эта теория стала особенно популярной после открытия реликтового излучения.

Однако к концу 70-ых годов 20 века стало ясно, что эта теория не совместима с существующей теорией элементарных частиц и имеет много внутренних трудностей (проблема горизонта, проблема однородности и изотропности, и т.д.). К счастью, все эти проблемы могут быть решены одновременно в контексте относительно простого сценария развития Вселенной - инфляционного сценария [1].

Главная идея этого сценария состоит в том, что Вселенная в самых ранних стадиях ее развития расширилась экспоненциально (стадия инфляции) в состоянии с преобладанием потенциальной энергии $V(\phi)$ некоторого скалярного поля ϕ . Это быстрое расширение сделало Вселенную плоской, однородной и изотропной.

Впоследствии, потенциальная энергия скалярного поля преобразовалась в тепловую энергию, а в более поздний период, Вселенная описывается стандартной теорией горячей Вселенной, предсказывающей существование реликтового излучения.

Рассмотрение эволюции Вселенной начинается с точного энергетического масштаба называемого массой Планка

$$M_P = \sqrt{\frac{\hbar c}{8\pi G}}, \quad (6.1)$$

где G – постоянная Ньютона. Массу Планка $M_P = 4,342 \times 10^{-6}$ г. можно записать в энергетических единицах $2,435 \times 10^{20}$ ГэВ. В рамках теории Эйнштейна невозможно превысить этот масштаб. Посредством комбинации \hbar и c можно так же получить время Планка $T_P \equiv \hbar/(c^2 M_P) = 2,70 \times 10^{-43}$ сек. и длину Планка $L_P \equiv \hbar/(c M_P) = 8,10 \times 10^{-33}$ см..

Первые модели инфляции были сформулированы в контексте теории Большого Взрыва. Их успех в решении внутренних проблем (проблемы плоскостности, горизонта и т.д.) удалил последние сомнения относительно этой теории. Не смотря на это, инфляционная теория продолжает претерпевать значительные изменения. Таким образом, инфляционная теория отделяется от старой теории Большого Взрыва. Для описания наблюдаемой части нашей Вселенной все еще можно говорить о Большом Взрыве, так же, как можно все еще использовать теорию гравитации Ньютона, чтобы описать Солнечную систему с очень высокой точностью. Однако для осознания начала Вселенной, или ее конца, или ее глобальной структуры, некоторые из понятий теории Большого Взрыва становятся неадекватными. Например, один из главных принципов теории Большого Взрыва - однородность Вселенной. Утверждение однородности, казалось, было настолько важным, что это называлось "космологическим принципом".

Действительно, без использования этого принципа нельзя было доказать, что целая Вселенная появилась в единственный момент времени, который ассоциировался с Большим Взрывом. Пока, инфляция остается единственной теорией, которая объясняет, почему заметная часть Вселенной почти однородна. Однако почти все версии инфляционной космологии предсказывают, что в намного большем масштабе Вселенная должна быть чрезвычайно неоднородна, с плотностью энергии, изменяющейся от Планковской

плотности до почти нулевой. Таким образом, недавнее развитие инфляционной теории значительно изменило привычную космологическую парадигму.

Чтобы понимать лучше эту модификацию, мы должны вспомнить главные поворотные моменты в развитии инфляционной теории. Первая версия инфляционной космологии была предложена Старобинским [2]. Однако было не совсем ясно, в каком начальном состоянии должна находиться Вселенная в этом сценарии. Инфляции в этой модели не могло быть, если Вселенная была горячей с самого начала. Для решения этой проблемы Зельдович в 1981 предложил, что инфляционная Вселенная была создана "из ничего". Эта идея, в то время, казалась слишком экзотической, и большинство космологов предпочло изучать инфляцию в более традиционном контексте теории горячей Вселенной.

Одна из наиболее важных стадий развития инфляционной космологии была связана с инфляционным сценарием Вселенной Алана Гуса [1].

Главная идея этого инфляционного сценария Вселенной была очень проста и привлекательна, и его роль в развитии современной космологии была очень важна.

Инфляция является эпохой, в течении которой масштабный фактор Вселенной соответствует ускоренному расширению

$$\ddot{a} > 0$$

Эквивалентным путем определения инфляции является определение как эпохи, в течении которой сопутствующее расстояние Хаббла $(aH)^{-1}$ убывает со временем

$$\frac{d}{dt} \frac{1}{aH} < 0$$

что помогает решить проблему плоскостности.

Модели инфляции задаются видом эффективного потенциала $V(\phi)$. В этом случае, потенциал управляется скалярным полем ϕ , которое скатывается к минимуму $V(\phi)$. Конец инфляции приводит к нарушению условий медленного скатывания, поле осциллирует около минимума и начинается процесс постинфляционного нагрева. Этот процесс включает сразу несколько различных стадий, таких как распад инфлатонного конденсата, рождение частиц стандартной модели и их термализация [2].

Космологическое ускорение указывает на то, что в настоящее время во Вселенной доминирует равномерно распределенная медленно изменяющаяся космическая жидкость с отрицательным давлением, так называемая темная энергия [6].

Для спецификации различных типов космической жидкости обычно используется феноменологическое соотношение между давлением p и плотностью энергии ρ каждой из компонент жидкости $p = w\rho$, где w является параметром состояния. Современные эксперименты [2] свидетельствуют о том, что Вселенная является пространственно плоской и в настоящее время параметр состояния темной энергии $w = -1 \pm 0.2$.

Стандартным способом получения зависящего от времени параметра состояния является включение скалярных полей в космологическую модель. При достаточно общих предположениях в рамках четырехмерной модели с одним скалярным полем могут быть реализованы модели с квинтэссенцией $-1 < w < 1/3$ и фантомные модели $w < -1$ [6].

6.2. Динамика скалярного поля

Рассмотрим безмассовое скалярное поле, которое определяет плотность энергии во Вселенной на инфляционной стадии.

Действие запишем следующим образом:

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} L = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - V(\phi) \right] \quad (6.2)$$

Из уравнений Эйлера-Лагранжа

$$\partial^\mu \frac{\delta(\sqrt{-g}L)}{\delta \partial^\mu \phi} - \frac{\delta(\sqrt{-g}L)}{\delta \phi} = 0$$

получим следующее уравнение

$$\square \phi + V'(\phi) = 0,$$

где $V'(\phi) = \frac{dV(\phi)}{d\phi}$. Учитывая кривизну пространства-времени, запишем оператор д'Аламбера следующим образом

$$\square \phi = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \frac{\partial \phi}{\partial x^\nu} \right)$$

Окончательное уравнение, определяющее динамику инфляционного поля, будет

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} - \frac{\nabla^2 \phi}{a^2} + V'(\phi) = 0$$

Поскольку скалярное поле в силу равенства нулю недиагональных компонент тензора Эйнштейна зависит только от времени, можно отбросить третий член уравнения [7].

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + V'(\phi) = 0 \quad (6.3)$$

Уравнение (6.3) и уравнение Эйнштейна

$$H^2 = \frac{1}{3M_P^2} \left[\frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + V(\phi) \right] \quad (6.4)$$

определяют эволюцию скалярного поля [3].

6.3. Плотность энергии и давление

Варьируя действие (6.2) по метрике $g^{\mu\nu}$, получим следующее выражение для тензора энергии-импульса

$$T_{\mu\nu} = \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - g_{\mu\nu} L \quad (6.5)$$

Сравнивая с релятивистским тензором энергии-импульса идеальной жидкости

$$T_{\mu\nu} = (p + \rho) u^\mu u^\nu + g^{\mu\nu} p \quad (6.6)$$

получим следующие уравнения для плотности энергии ρ_ϕ и плотности давления p_ϕ

$$T_0^0 = \rho_\phi = \frac{\dot{\phi}^2}{2} + V(\phi)$$

$$T_i^i = p_\phi = \frac{\dot{\phi}^2}{2} - V(\phi)$$

Если $V(\phi) \gg \dot{\phi}^2$, получаем следующее условие

$$\rho_\phi \simeq -p_\phi$$

что является условием инфляционной стадии. Инфляция управляется вакуумной энергией инфляционного поля, которая приводит к быстрому расширению Вселенной на инфляционной стадии.

6.4. Приближение медленного скатывания

Приближение медленного скатывания основано на условиях возникновения инфляционной стадии эволюции Вселенной [3]:

- преобладание потенциальной энергии

$$V(\phi) \gg \dot{\phi}^2$$

- ограничение на вторую производную скалярного поля $\ddot{\phi} \ll 3H\dot{\phi}$.

Космологические уравнения динамики поля и расширения Вселенной, в таком случае, записываются следующим образом:

$$H^2 \simeq \frac{V(\phi)}{3M_P^2} \quad (6.7)$$

$$3H\dot{\phi} \simeq -V'_\phi(\phi) \quad (6.8)$$

6.5. Параметры медленного скатывания

Разделим уравнение (6.8) на $3H$ и возьмем производную по времени. В результате получим

$$\ddot{\phi} = -\frac{V''}{3H}\dot{\phi} + \frac{V'}{3H^2}\dot{H}$$

После деления обеих частей на $3H\dot{\phi}$ имеем

$$\frac{\ddot{\phi}}{3H\dot{\phi}} = -\frac{1}{3} \left(M_P^2 \frac{V''}{V} - \frac{\dot{H}}{H^2} \right)$$

Важно обратить внимание на то, что это соотношение было получено с использованием приближенного уравнения (6.7).

Теперь можно записать параметры медленного скатывания следующим образом

$$\epsilon(\phi) = -\frac{\dot{H}}{H^2} \simeq \frac{M_P^2}{2} \left(\frac{V'_\phi}{V} \right)^2 = \epsilon_V \quad (6.9)$$

где V'_ϕ означает производную потенциала $V(\phi)$ по полю ϕ .

$$\eta(\phi) = M_P^2 \frac{V''}{V} \quad (6.10)$$

Можно увидеть, что параметр ϵ показывает, насколько H изменилось со времени инфляции. Таким образом

$$\frac{\ddot{a}}{a} = \dot{H} + H^2 = (1 - \epsilon)H^2,$$

инфляция может быть достигнута только если $\epsilon < 1$. В общем случае, режим медленного скатывания может быть достигнут, если $\epsilon \ll 1$ и $\eta \ll 1$. Однако, эти условия ограничивают форму потенциала [3].

Впоследствии будет развиваться подход, основанный на рассмотрении моделей инфляции без ограничения на форму потенциала скалярного поля.

6.6. Времена Хаббла

Число е-фолдов или хаббловских времен характеризует инфляцию и обычно записывается как логарифм отношения масштабного фактора в конце инфляции к масштабному фактору в начале.

$$N(t) = \ln \frac{a(t_{end})}{a(t_i)} = \int_{t_i}^{t_{end}} H dt,$$

где t_i и t_{end} – время начала и завершения инфляционной стадии.

Преобразуем подинтегральное выражение, используя приближение медленного скатывания. В результате получим

$$H dt \simeq H \frac{d\phi}{\dot{\phi}} \simeq -\frac{3H}{V'_\phi} H d\phi \simeq -\frac{1}{\sqrt{\epsilon} V} \frac{d\phi}{M_P} \simeq -\frac{V}{V'_\phi} d\phi, \quad (6.11)$$

Таким образом

$$N(t) = \int_{t_i}^{t_{end}} H dt \simeq -\frac{1}{M_P^2} \int_{\phi_0}^{\phi_{end}} \frac{V}{V'_\phi} d\phi,$$

где ϕ_{end} можно определить из условия $\epsilon(\phi_{end}) = 1$.

Важной характеристикой космологической эпохи является пересечение радиуса Хаббла, для случая, когда сопутствующий волновой вектор $k = aH$, где значение H берется в момент пересечения горизонта. В течение инфляции сопутствующая хаббловская длина $(aH)^{-1}$ убывает. Следовательно, данный сопутствующий масштаб k^{-1} может быть меньше радиуса Хаббла перед инфляцией. В некоторое время, в течение инфляции, он будет пересекать горизонт, тот есть $k^{-1} = (aH)^{-1}$. И в последующее время, когда сопутствующая хаббловская длина станет вновь расти, данный масштаб будет пересекать горизонт снова в соответствии с теорией возмущений.

Разобьем эволюцию на следующие части:

- от $k^{-1} = (aH)^{-1}$ к концу инфляции
- стадия повторного нагревания
- стадия преобладания излучения
- стадия преобладания вещества

Обозначим сопутствующий волновой вектор при пересечении радиуса Хаббла k и запишем

$$\frac{k}{a_0 H_0} = \frac{a_k H_k}{a_0 H_0} \frac{a_k}{a_{end}} \frac{a_{end}}{a_{reh}} \frac{a_{reh}}{a_{eq}} \frac{a_{eq}}{a_0} \frac{H_k}{H_0}$$

Первое отношение в правой части является экспонентой числа e -фолдов $N(k)$ для данного k равное хаббловской длине до конца инфляции. Следуя [3], запишем

$$N(k) = 62 - \ln \frac{k}{a_0 H_0} - \ln \frac{10^{16} \Gamma \Theta B}{V_k^{1/4}} + \ln \frac{V_k^{1/4}}{V_{end}^{1/4}} - \ln \frac{V_k^{1/4}}{\rho_{reh}^{1/4}}$$

Последние три слагаемых вводятся ввиду неопределенности в различных энергетических масштабах, связанных с инфляцией. Таким образом, устанавливается связь между значениями e -фолдов в различные эпохи эволюции Вселенной.

6.7. Метод суперпотенциала

Уравнения (6.3) и (6.4) можно привести к виду [6]:

$$H^2 = \frac{1}{3M_P^2} W(\phi) \quad (6.12)$$

$$3H\dot{\phi} = -W'(\phi) \quad (6.13)$$

Для приведения уравнений динамики скалярного поля к виду (6.12) – (6.13) вводится суперпотенциал:

$$W(\phi) = V(\phi) + X(\phi), \quad X(\phi) = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2, \quad (6.14)$$

где $V(\phi)$ определяет потенциальную, а $X(\phi)$ кинетическую энергию скалярного поля.

Уравнения динамики поля принимают тот же вид, что и в случае приближения медленного скатывания.

Подставив параметр Хаббла из уравнения (6.12) в уравнение (6.13), получим:

$$\dot{\phi} = - \left(\frac{M_P}{\sqrt{3}} \right) \frac{W'_\phi}{\sqrt{W}} \quad (6.15)$$

Таким образом, задавая суперпотенциал $W = W(\phi)$, можно получать точные решения уравнений динамики скалярного поля и сравнивать полученные решения с приближенными для различных космологических моделей.

6.8. Хаббловские времена в случае точных решений

В рамках системы (6.12) – (6.13) можно поставить вопрос об уточнении важных для сравнения с наблюдательными данными величин, полученных в сценариях, основанных на режиме медленного скатывания. Первой работой в этом направлении явилась статья [6], где указывается на неправомочность ограничений на потенциал самодействия при рассмотрении точных моделей инфляции (то есть вне рамок приближения медленного скатывания). Там же предложен метод вычисления поправок к хаббловским временам (или количеству e -фолдов).

В работе [7] были рассмотрены с позиций точной инфляции те величины, которые предсказываются теоретически, но могут быть сопоставлены наблюдательным данным. Это спектр мощности тензорных и скалярных возмущений, спектральный индекс n , и

его “убегание” - производная спектрального индекса по логарифму от модуля волнового вектора $\frac{dn}{d(\ln k)}$. В отличие от других работ, где использовалось приближение медленного скатывания, в [7] получены точные формулы для вышеуказанных параметров, которые содержат зависимость от времени.

Рассмотрим эволюционное поведение скалярного поля и определим количество Хаббловских времен.

В данном случае рассматриваем точное количество e -фолдов:

$$N(\phi) = -\frac{1}{M_P^2} \int_{\phi_0}^{\phi_{end}} \frac{W}{W'_\phi} d\phi \quad (6.16)$$

где $W(\phi) = V(\phi) + \frac{1}{2}\dot{\phi}^2$, ϕ_0 - скалярное поле в начале инфляционной стадии, ϕ_{end} - поле в конце инфляции.

Различие между точным решением и решением, полученным из приближения медленного скатывания определяется следующим образом [43]:

$$\Delta_N = -\frac{1}{M_P^2} \int_{\phi_0}^{\phi_{end}} \left(\frac{W}{W'_\phi} - \frac{V}{V'_\phi} \right) d\phi \quad (6.17)$$

На основе полученного различия производится сравнение точных и приближенных оценок наблюдаемых космологических параметров. Так же возможно вычисление точного тензорно-скалярное отношение. Известно что, отношение амплитуд T и S мод космологических возмущений, родившихся квантово-гравитационным образом пропорционально γ , где параметр $\gamma = -\frac{\dot{H}}{H^2}$ берется в момент начала стадии параметрического усиления для возмущений данной длины волны [14].

Рассматривая эволюцию скалярных полей в рамках точного подхода, можно получить большие отношения амплитуд тензорной и скалярной мод возмущений, чем в случае приближения медленного скатывания.

6.9. Космологические возмущения

Рассмотрим возмущения в фиксированном масштабе, который задается сопутствующим волновым вектором k . На ранней стадии эволюции Вселенной все сопутствующие масштабы имели физическую длину больше чем радиус Хаббла, который определяется условием $k = aH$.

Космологические возмущения могут быть описаны или в обычном пространстве или в пространстве импульсов. В обычном пространстве нужно вычислить квадрат флуктуаций массы

$$\frac{\delta M}{M}(k, t_H(k)) = const \quad (6.18)$$

Такой спектр впервые был предложен Харрисоном и Зельдовичем для описания космологических возмущений. Можно представить спектральный индекс n космологических возмущений посредством соотношения

$$\left(\frac{\delta M}{M} \right)^2(k, t_H(k)) \sim k^{n-1}, \quad (6.19)$$

масштабно-инвариантный спектр соответствует $n = 1$.

Чтобы представить результат в пространстве импульсов, применим разложение Фурье

$$\delta_\varepsilon(x, t) = \int d^3k \tilde{\delta}_\varepsilon(k, t) e^{ik \cdot x} \quad (6.20)$$

Спектр мощности возмущений плотности определяется как

$$P_\delta(k) = k^3 \left| \tilde{\delta}_\varepsilon(k) \right| \quad (6.21)$$

Для упрощения примем распределение Гаусса возмущений, в котором амплитуда возмущений зависит только от k .

Также можно определить спектр мощности гравитационного потенциала φ

$$P_\varphi(k) = k^3 \left| \tilde{\delta}_\varphi(k) \right| \quad (6.22)$$

Эти два спектра мощности соотносятся посредством уравнения Пуассона

$$P_\varphi(k) \sim k^{-4} P_\delta(k) \quad (6.23)$$

Условия масштабной инвариантности, выраженные в пространстве импульсов в терминах спектра мощности, представляются посредством фиксированного времени. Используем зависимость плотности возмущений от времени, чтобы определить массу возмущений в фиксированное время $t > t_H$

$$\left(\frac{\delta M}{M} \right)^2(k, t) = \left(\frac{t}{t_H(k)} \right)^{4/3} \left(\frac{\delta M}{M} \right)^2(k, t_H(k))$$

Время пересечения радиуса Хаббла определяется как

$$a(t_H(k)) k^{-1} = 2t_H(k)$$

и, таким образом,

$$t_H(k)^{1/2} \sim k^{-1}$$

Подставляя этот результат в (6.19) и, используя (6.20), получаем

$$\left(\frac{\delta M}{M} \right)^2(k, t) \sim k^{n+3} \quad (6.24)$$

Таким образом, для контраста плотности с волновым числом k получаем, что

$$\left| \tilde{\delta}_\varepsilon \right| \sim k^n$$

или

$$P_\varphi(k) \sim k^{n-1}$$

Следует обратить внимание на то, что изначальный спектр мощности, полученный при пересечении радиуса Хаббла, отличается от наблюдаемого в современную эпоху.

$$P_{final}(k, t) = T(k, t) P_0(k, t), \quad (6.25)$$

где P_0 – изначальный спектр мощности, а $P_{final}(k, t)$ обозначает наблюдаемый спектр мощности возмущений.

Теория космологических возмущений Ньютона нарушается в масштабах больших хаббловского радиуса, поскольку в ней не учитываются возмущения метрики, которые преобладают на больших масштабах и определяют динамику [8].

6.10. Классификация возмущений

Первый шаг в анализе метрических возмущений заключается в их классификации в соответствии с изменениями свойств в результате плоских вращений. Существуют скалярные, векторные и тензорные возмущения [9, 10]. В линейной теории не существует взаимодействия между различными модами возмущений, и, следовательно, они развиваются независимо [8].

Начнем с расширяющейся метрики в ФРУ фоне $g_{\mu\nu}^{(0)}$

$$g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}^{(0)} + \delta g_{\mu\nu}$$

Фоновая метрика зависит только от времени, тогда как возмущения метрики $\delta g_{\mu\nu}$ зависят от пространства и времени. Так как метрика является симметричным тензором, существует 10 степеней свободы возмущений в $\delta g_{\mu\nu}$. Существует четыре степени свободы, соответствующих скалярным возмущениям метрики (только четыре пути конструирования метрики скалярными функциями)

$$\delta g_{\mu\nu} = a^2(\eta) \begin{pmatrix} 2\phi & -B_{,i} \\ -B_{,i} & 2(\psi\delta_{ij} - E_{,ij}) \end{pmatrix} \quad (6.26)$$

где четыре степени свободы возмущений обозначены ϕ , B , E и ψ , а запятая обозначает ковариантную производную по отношению к метрике пространства, и δ_{ij} – символ Кронекера.

Существуют также четыре векторные степени свободы возмущений метрики, состоящие из четырех путей конструирования возмущений метрики из трех векторов

$$\delta g_{\mu\nu} = a^2(\eta) \begin{pmatrix} 0 & -S_{,i} \\ -S_{,i} & F_{i,j} + F_{j,i} \end{pmatrix}, \quad (6.27)$$

где $S_{,i}$ и F_i – векторы, дивергенция которых равна нулю (в случае векторов с неисчезающей дивергенцией, дивергенция переходит в скалярные моды возмущений).

Существует две тензорные моды, которые соответствуют двум состояниям поляризации гравитационных волн.

$$\delta g_{\mu\nu} = a^2(\eta) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & h_{ij} \end{pmatrix} \quad (6.28)$$

где h_{ij} не содержит ни скалярных, ни векторных составляющих.

$$h_i^i = h_{ij}^i = 0$$

Гравитационные волны не связаны линейно с возмущениями материи.

6.11. Калибровочные преобразования

Теория космологических возмущений кажется сложной ввиду калибровочной инвариантности. Но координаты пространства-времени не несут независимого физического смысла. Это только метки для обозначения точек в пространственно-временном

многообразии. Выполняя преобразования пространственно-временных координат (впоследствии называемых "калибровочными преобразованиями") мы можем легко ввести "фиктивные" возмущения в однородную и изотропную Вселенную. Эти моды называются "калибровочными артефактами".

Рассмотрим два пространственно-временных многообразия, одно из них однородная и изотропная Вселенная M_0 , другое - физическая Вселенная M с неоднородностями. Выбор координат можно рассматривать как отображение D между многообразиями M_0 и M . Рассмотрим второе отображение \tilde{D} некоторой точки из M_0 в различные точки M . Используя инверсию этих отображений, можно определить два различных набора координат в точках M . Рассмотрим теперь физическую величину Q (например, скаляр Риччи) на M , и, соответственно, физическую величину Q_0 на M_0 . Затем, в первой системе координат, заданной отображением D , возмущение δQ в точке $p \in M$ будет определяться как

$$\delta Q(p) = Q(p) - Q^{(0)}(D^{-1}(p))$$

Аналогично, во второй системе координат, заданной \tilde{D} , возмущение будет определяться

$$\delta \tilde{Q}(p) = Q(p) - Q^{(0)}(\tilde{D}^{-1}(p))$$

Разница

$$\Delta Q(p) = \delta \tilde{Q}(p) - \delta Q(p)$$

является калибровочным артефактом и не несет физического смысла. Некоторые степени свободы метрических возмущений являются калибровочными артефактами. Для их устранения нужно узнать, как преобразования координат действуют на метрику.

Существует четыре независимых калибровочных степени свободы, соответствующих преобразованиям координат

$$x^\mu \rightarrow \tilde{x}^\mu = x^\mu + \xi^\mu$$

Нулевая компонента ξ^0 приводит к скалярным возмущениям метрики. Пространственные 3-векторы ξ^i могут быть разложены

$$\xi^i = \xi_{tr}^i + \gamma^{ij} \xi_{,j},$$

(где γ^{ij} – пространственная фоновая метрика) на поперечную часть γ_{tr}^{ij} , которая имеет две степени свободы, дающие векторные возмущения и вторую часть (задаваемую градиентом скаляра γ), дающую скалярные возмущения.

Таким образом, существует две скалярные калибровочные моды, заданные ξ^0 и ξ , и две векторные моды, данные тремя поперечными векторами ξ_{tr}^{ij} . Гравитационные волны калибровочно-инвариантны.

6.12. Квантовая теория космологических возмущений

Первоначальные неоднородности появляются из квантовых флуктуаций вакуума на очень малых масштабах (длина волны меньше, чем радиус Хаббла). Длина волны, впоследствии, увеличивается относительно радиуса Хаббла, который определяется условием $k = aH$, и становится больше этого радиуса в некоторое время и затем распространяется в больших масштабах.

Для понимания генерации и эволюции возмущений в ранней Вселенной, потребуются и квантовая механика и ОТО, то есть квантовая гравитация. Поскольку гравитационная сила имеет характер притяжения, в контексте космологии постоянно расширяющегося фона, в ранней Вселенной мало неоднородностей. Таким образом, линеаризованный анализ возмущений (в классическом космологическом фоне) является достаточно непротиворечивым [11].

Из классической теории космологических возмущений известно, что анализ метрических неоднородностей может быть упрощен - после избавления от калибровочных артефактов - для изучения одной возмущенной величины. Таким образом, можно заключить, что квантовая теория космологических возмущений должна быть переведена в квантовую теорию единичного свободного скалярного поля.

Поскольку фон, в котором развивается скалярное поле, зависит от времени, масса поля также будет зависеть от времени. Эта зависимость массы поля от времени будет приводить к появлению частиц, если эволюция начинается в вакуумном состоянии. Как мы увидим, это квантовое рождение частиц соответствует развитию и росту космологических возмущений. Таким образом, квантовая теория космологических возмущений обеспечивает последовательную систему взглядов для изучения генерации и эволюции космологических возмущений.

6.12.1. Уравнение гравитационных волн

Рассмотрим действие Эйнштейна-Гильберта для гравитации и скалярного поля

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{R}{2} + \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - V(\phi) \right], \quad (6.29)$$

где g - определитель метрики.

Рассмотрим метрику

$$ds^2 = a^2(\eta) [d\eta^2 - (\delta_{ij} + h_{ij}) dx^i dx^j], \quad (6.30)$$

где тензор второго ранга h_{ij} представляет гравитационные волны и может быть разложен

$$h_{ij}(\eta, x) = h_+(\eta, x) e_{ij}^+ + h_\times(\eta, x) e_{ij}^\times$$

в два состояния поляризации.

Здесь, e_{ij}^+ и e_{ij}^\times - два фиксированных тензора поляризации.

В контексте скалярного поля, квантовая теория космологических возмущений была развита Мухановым [11]. Результатом является действие

$$S^{(2)} = \frac{1}{2} \int d^4x \frac{a^2}{2} [h'^2 - (\nabla h)^2], \quad (6.31)$$

которое приводит к уравнениям

$$h_k'' + 2\frac{a'}{a} h_k' + k^2 h_k = 0 \quad (6.32)$$

Введем величину, в которой действие (6.31) имеет канонический вид

$$\mu_k = ah_k$$

Уравнения движения для μ_k будут иметь следующий вид

$$\mu_k'' + \left(k^2 - \frac{a''}{a} \right) \mu_k = 0 \quad (6.33)$$

Финальным шагом в квантовой теории космологических возмущений является определение начальных условий. Поскольку в инфляционной космологии все ранее существовавшие классические возмущения подвергнуты смещению ввиду ускоренного расширения пространства можно принять, что поле ϕ начинает свою эволюцию в начале инфляции t_i .

Незамедлительно возникают два вопроса: что представляет собой начальное время t_i и какое из многих возможных состояний вакуума должно быть выбрано. Обычно допускают, поскольку возмущения осциллируют только в масштабах меньше Хаббловского, что выбор начального времени t_i не важен до тех пор, пока они не пересекут радиуса Хаббла. Состояние обычно выбирается как вакуум Банча-Дэвиса, так как в этом состоянии при t_i отсутствуют частицы [8].

В линеаризованной теории, в некоторый начальный момент времени присутствуют возмущения. До тех пор, пока длина волны меньше радиуса Хаббла это состояние подвержено квантовым возмущениям вакуума. Ускоренное расширение фона смещает волновой вектор возмущений k за пределы радиуса Хаббла.

Гравитационные волны существуют в качестве квантовых флуктуаций вакуума в начальное время во всех масштабах. Они осциллируют до пересечения Хаббловского радиуса. В этой точке осцилляции замерзают и квантовое состояние гравитационных волн начинает замерзать таким образом, чтобы выполнялось условие

$$\mu_k(\eta) \sim a(\eta), \quad (6.34)$$

которое соответствует постоянной амплитуде h_k . Замерзание вакуумного состояния приводит к появлению классических свойств.

6.12.2. Спектр мощности тензорных мод космологических возмущений

Рассмотрим эволюцию скалярного поля в де Ситтеровскую эпоху с масштабным фактором [28]:

$$a(\eta) = -\frac{a}{H\eta(1-\epsilon)} \quad (6.35)$$

Перепишем уравнение (6.33) следующим образом

$$\mu_k'' + \left(k^2 - \frac{1}{\eta^2}(\nu_T - 1/4) \right) \mu_k = 0 \quad (6.36)$$

$$\nu_T = \sqrt{\frac{9}{4} + 3\epsilon} \approx \frac{3}{2} \left(1 + \frac{2}{3}\epsilon \right) = \frac{3}{2} + \epsilon \quad (6.37)$$

На масштабах, превышающих горизонт

$$|\mu_k| = \frac{aH}{\sqrt{2k^3}} \left(\frac{k}{aH} \right)^{3/2-\nu_T} \quad (6.38)$$

В таком случае, спектр мощности

$$P_g(k) = \frac{k^3}{2\pi^2} \sum_{\lambda} |h(k, \lambda)|^2 = \quad (6.39)$$

$$\frac{8}{M_{Pl}^2} \left(\frac{H}{2\pi}\right)^2 \left(\frac{k}{aH}\right)^{n_T} = A_T^2 \left(\frac{k}{aH}\right)^{n_T},$$

где спектральный индекс тензорных возмущений

$$n_T = \frac{d \ln P_T}{d \ln k} = 3 - 2\nu_T = -2\epsilon \quad (6.40)$$

Тензорные возмущения зависят только от значения параметра Хаббла в течение инфляции. Это дает связь с инфляционным потенциалом. Из этого следует, что наблюдение гравитационных волн позволит делать выводы об основных параметрах инфляции.

6.13. Наблюдательные данные

Наблюдаемая структура Вселенной есть результат произведения начальных условий и эволюции возмущений плотности. Современные наблюдательные данные позволили разделить информацию о начальных условиях и условиях развития. Это положило начало независимому исследованию физики ранней и поздней Вселенной.

На сегодняшний момент параметры Большого Взрыва неизвестны. Однако в рамках теории космологических возмущений, можно рассчитать спектры начальных возмущений плотности вещества и первичных гравитационных волн в зависимости от значений космологических параметров.

Достижением инфляционной космологии является возможность сопоставления наблюдательных данных с предсказаниями теории. Геометрия видимой Вселенной представима в рамках теории возмущений. Малым параметром 10^{-5} является амплитуда космологических возмущений [11].

В нулевом порядке Вселенная описывается единственной функцией времени - масштабным фактором $a(t)$. В первом порядке возмущения метрики являются суммой трех независимых мод - скалярной, векторной и тензорной (реликтовые гравитационные волны), каждая из которых характеризуется спектральной функцией волнового числа k [14].

В ходе космологического расширения возмущения метрики эффективно рождались параметрическим образом из вакуумных флуктуаций под действием внешнего переменного поля. Начальное квантовое состояние каждой моды возмущений трансформируется как результат квантово-механической эволюции в состояние «замороженного» вакуума. Причем, имея простую связь с фоновой метрикой, гравитационные волны несут прямую информацию об энергетическом масштабе начальной стадии эволюции Вселенной.

Данные о влиянии скалярных и тензорных мод можно получить из наблюдений анизотропии и поляризации реликтового излучения, которые возникли в результате совместного воздействия на распределение фотонов всех трех мод возмущений. Совместный анализ данных о распределении галактик и анизотропии реликтового излучения позволяет рассматривать начальные условия и эволюцию раздельно.

6.13.1. Анизотропия реликтового излучения

При расширении Вселенной происходит ее остывание. Темп расширения значительно медленнее характерного времени установления равновесия в горячей плазме, поэтому частицы в ней находятся в термодинамическом равновесии. Одними из таких частиц являются реликтовые фотоны [15].

Несмотря на то что в вакууме фотон распространяется со скоростью света, в горячей плотной плазме из-за рассеяния на электронах фотоны распространяются гораздо медленнее. Когда Вселенная расширяется настолько, что плазма остывает до температуры рекомбинации, электроны начинают соединяться с протонами, образуя нейтральный водород, а фотоны начинают распространяться свободно. Точки, из которых фотоны доходят до наблюдателя, образуют так называемую поверхность последнего рассеяния. Это единственный источник во Вселенной, окружающий нас со всех сторон.

Реликтовое излучение обладает уникальным свойством. Его температура изотропна с точностью 10^{-5} . Тем не менее, небольшая анизотропия существует. Анизотропия обусловлена разницей температуры в разных направлениях на небе. Ее величина равна примерно 3 мК. Это кинетическая составляющая анизотропии реликтового излучения, которая называется дипольной анизотропией.

Помимо кинетической составляющей, есть и потенциальные члены в анизотропии реликтового излучения, обязанные своим происхождением гравитационным полям очень больших масштабов, которые сравнимы с горизонтом частиц, другими словами, с расстоянием до окрестности последнего рассеяния.

Низшая мультипольная гармоника для гравитационного поля будет квадрупольной. Дипольная гармоника возникает только в тех полях, которые имеют заряды разных знаков. Степень неоднородности гравитационного поля характеризуется приливными силами, низшая гармоника в приливных силах — квадрупольная [15].

Рассмотрим основное уравнение, описывающее анизотропию реликтового излучения, и основные физические эффекты, которые ее вызывают. Уравнение изменения температуры в направлении вектора \mathbf{e} имеет вид

$$\frac{\delta T(\mathbf{e})}{T} = -\frac{1}{2} \int_{\eta}^{\eta_0} d\eta \frac{\partial h_{ij}(\eta, \mathbf{r}(\eta))}{\partial \eta} e^i e^j + \frac{1}{4} \frac{\delta \rho}{\rho} + \left(\mathbf{e} \frac{\mathbf{v}}{c} \right) \quad (6.41)$$

Первый член в этом уравнении описывает эффект Сакса-Вольфа, который был предсказан еще в начале 60-х годов Саксом и Вольфом и заключающийся в том, что фотоны, двигаясь в переменном потенциале, либо приобретают, либо теряют энергию [16].

Второй член обусловлен адиабатическим поджатием излучения до эпохи рекомбинации в зонах повышенной и пониженной плотности — эффектом Силка.

Третье слагаемое обязано своим происхождением эффекту Доплера, который представляет собой рассеяние квантов на движущихся адиабатических возмущениях свободных электронов до и после рекомбинации.

Поскольку поверхность последнего рассеяния есть сфера, то проще анализировать анализировать наблюдательные данные, разложив в ряд по сферическим функциям, которые являются полным и ортогональным набором функций на сфере:

$$\frac{\delta T(\mathbf{e})}{T} = \sum_{lm} a_{lm} Y_{lm}(\mathbf{e}) \quad (6.42)$$

где a_{lm} — мультипольные коэффициенты, а Y_{lm} — сферические гармоники.

Надо также отметить, что удобнее представлять и сравнивать результаты наблюдений и теоретические расчеты в терминах величин, которые являются вращательно-инвариантными и не зависят от частного выбора системы отсчета.

Коэффициенты a_{lm} не являются вращательно-инвариантными. Поэтому обычно выделяют так называемую вращательно-инвариантную величину

$$C_l = \frac{1}{2l+1} \sum_{l=-m}^{l=m} |a_{lm}|^2$$

Спектр строят для величины $\frac{l(l+1)C_l}{2\pi}$. Это связано с тем, что, если умножить C_l на $l(l+1)$, то образуется так называемое плато Харрисона-Зельдовича, которое на графике будет выглядеть горизонтальной линией. В такой нормировке представляется большинство экспериментальных данных по мультипольным спектрам.

Гравитационные волны являются источником крупномасштабной анизотропии реликтового излучения. Качественные отличия в характеристиках анизотропии, генерируемой адиабатическими возмущениями в эпоху до и после рекомбинации водорода, и гравитационными волнами можно понять, анализируя особенности их эволюции.

Прежде всего важнейшим отличием гравитационных волн от скалярных возмущений метрики, в силу тензорного характера первых, является независимость от распределения материи — гравитационные волны малой амплитуды не вызывают перераспределения плотности и скорости материи и эволюционируют независимо.

Из уравнения (6.33) можно получить асимптотики функции $\mu_k(\eta)$ в пределе длинных $k\eta \ll 1$ и коротких $k\eta \gg 1$ гравитационных волн. В первом случае зависимость μ_k даётся хорошо известным решением [18]

$$\mu_k \simeq C_1 a + C_2 a \int \frac{d\eta}{a^2} \quad (1.35)$$

В пределе коротких волн уравнение для амплитуды $\mu_k(\eta)$ соответствует уравнению для гармонического осциллятора и имеет простое аналитическое решение

$$\mu_k \simeq \tilde{C}_1 \sin k\eta + \tilde{C}_2 + \cos k\eta \quad (6.43)$$

Воспользовавшись этими выражениями, проследим как изменяется амплитуда возмущений метрики в каждой моде k в зависимости от соотношения между длиной гравитационной волны и масштабом космологического горизонта.

Итак, при $k\eta \gg 1$, в соответствии с уравнением (6.33), растущая мода дается выражением $\mu_k \sim C_1(k)\eta^2$, а убывающей модой можно пренебречь. Функция μ_k достигает максимума при $k\eta \sim 1$ и переходит от режима изменения (6.33) к режиму осцилляций (6.43). Эти осцилляции происходят с постоянной амплитудой:

$$\tilde{C}_1 = g_k k^2 \eta_H^2 \left(\sin k\eta_H + 2 \frac{\cos k\eta_H}{k\eta_H} \right)$$

$$\tilde{C}_2 = g_k k^2 \eta_H^2 \left(\cos k\eta_H - 2 \frac{\sin k\eta_H}{k\eta_H} \right)$$

Здесь $k\eta_H = 2\pi$ отвечает условию равенства длины гравитационной волны и горизонта. При этом возмущения метрики, создаваемые гравитационной волной, убывают по мере увеличения конформного времени η . Таким образом, основной вклад в возмущения гравитационного потенциала, а следовательно и анизотропию реликтового излучения вносят гравитационные волны с $k\eta_H = 2\pi$, когда μ_k достигает максимума.

При этом, распределение анизотропии реликтового излучения по углу полностью определяется заданием спектра гравитационных волн $P_T(k)$. В простейших моделях инфляции, предсказывающих масштабно инвариантный спектр возмущений метрики $P_a(k) \propto k^{-3}$, спектр гравитационных волн также является масштабно-инвариантным: $P_T(k) \propto k^{-3}$ [19]. Это означает, что для угловых масштабов $\theta \gg \theta_{rec}$, где θ_{rec} - угловая мера горизонта рекомбинации, мультипольная структура C_l^T будет близка к структуре C_l^S для скалярных мод.

Для любых инфляционных моделей, использующих приближение медленного скачивания, соотношение между вкладом гравитационных волн и скалярных возмущений в анизотропию реликтового излучения характеризуют в терминах T/S -соотношения [20].

$$\frac{T}{S} = \frac{C_l^T}{C_l^S} = k_l |n_T|, \quad (1.36)$$

где $k_l = 6.2$ при $l \gg 1$ и $|n_T| \ll 1$.

В настоящее время оценки тензорно-скалярного отношения различаются в зависимости от рассматриваемых моделей инфляции. Непосредственное наблюдение реликтовых гравитационных волн позволит точно определить вклад тензорных мод возмущений в анизотропию реликтового излучения.

Глава 7.

Квантовое рождение космологических возмущений

Прогресс, достигнутый в инфляционной космологии [1], позволяет сопоставить наблюдательные данные с предсказаниями теории: выбрав космологическую модель, описывающую эволюцию вселенной на инфляционной стадии можно определить спектр мощности возмущений плотности, спектральный индекс скалярного и тензорного возмущений и их отношение, а также отношение тензорных и скалярных мод по квадрату амплитуд. Основные теоретические выводы, как правило, получены в рамках приближения медленного скатывания [3]. Сравнительно недавно был предложен метод получения теоретических выводов на основе точных решений в моделях инфляции [6], который позволяет внести поправки при вычислении спектра возмущений при их уходе за горизонт. В работе [7] было найдено точное выражение для вычисления спектрального индекса через полную энергию скалярного поля для моделей степенной инфляции и экспоненциально-степенной модели.

В той же работе показано, как можно в духе метода точной настройки потенциала [29, 30] (см. также [31, 32, 33]) получать важные космологические параметры при их уходе за горизонт на основе выбранного масштабного фактора или, что то же самое, параметра Хаббла. Там же для моделей степенной, экспоненциально-степенной инфляции, а также для сингулярной и не сингулярной космологической модели де Ситтера вычисляются космологические параметры и сравниваются с аналогами, полученными в приближении медленного скатывания.

Космологические возмущения являются источником эволюции крупномасштабной структуры Вселенной. Генерация начальных возмущений имеет квантово-механическую природу. Длина волны возмущений сильно выросла со времени генерации, но другие физические характеристики возмущений все еще могут нести следы своего происхождения. Квантово-механическая генерация космологических возмущений зависит только от существования их квантовых флуктуаций в начальной точке и взаимодействия возмущений с переменным гравитационным полем однородной изотропной Вселенной.

Сильное переменное гравитационное поле очень ранней Вселенной играет роль поля накачки. Оно замещает энергию нулевых квантовых возмущений и увеличивает их. Начальное квантовое состояние каждой моды возмущений трансформируется как результат квантово-механической эволюции Шредингера в состояние "замороженного" вакуума.

Теория скалярных и тензорных мод возмущений во Вселенной ФРУ сводится к квантово-механической задаче о независимых осцилляторах $q_k(\eta)$ находящихся во внешнем параметрическом поле $\alpha(\eta)$. Действие и лагранжиан элементарных осцилляторов зависят от их пространственной частоты k [14].

Таким образом, для квантования скалярного поля будем считать, что уравнение динамики скалярных возмущений является уравнением Эйлера-Лагранжа для лагранжиана вида

$$\mathcal{L}_k = \frac{\alpha^2}{2k^3} (q'^2 - \omega^2 q^2)$$

где ω – частота осциллятора.

В дальнейшем, опираясь на полученные результаты, будет показана возможность расчета спектров мощности и спектральных индексов возмущений в случае точных решений уравнений динамики скалярного поля.

7.1. Возмущения инфляционного поля

Разделим инфлатон на глобальную фоновую часть ϕ_0 и локальную возмущенную часть $\delta\phi$

$$\phi(\mathbf{x}, t) = \phi_0(t) + \delta\phi(\mathbf{x}, t) \quad (7.1)$$

Фоновая часть описывается классически, квантуем только возмущенную часть. Запишем плотность лагранжиана инфляционного поля

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - V(\phi) \quad (7.2)$$

Включая (7.1) в (7.2) получим:

$$\frac{d^2}{dt^2}(\phi_0 + \delta\phi) + 3H \frac{d}{dt}(\phi_0 + \delta\phi) - \frac{1}{a^2}(\phi_0 + \delta\phi) + \frac{dV(\phi_0 + \delta\phi)}{d(\phi_0 + \delta\phi)} = 0 \quad (7.3)$$

Ввиду того, что возмущения малы, можно записать $\frac{V(\phi_0 + \delta\phi)}{d(\phi_0 + \delta\phi)} \approx \frac{d}{d\phi_0}$.

Разложим возмущения поля в Фурье-моды

$$\delta\phi(\mathbf{x}, t) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}} \delta\phi(\mathbf{k}, t) e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}}, \quad (7.4)$$

где \mathbf{k} и \mathbf{x} – сопутствующий волновое число и координаты. Физическое волновое число и физические координаты записываются как $k_{phis} = k/a$ и $x_{phis} = ax$. Уравнение поля в терминах фурье-мод записывается следующим образом:

$$\ddot{\phi}(\mathbf{k}, t) + 3H \dot{\phi}(\mathbf{k}, t) + \frac{k^2}{a^2} \delta\phi(\mathbf{k}, t) V''(\phi_0) = 0 \quad (7.5)$$

Поскольку уравнения записаны в искривленном пространстве, следует учитывать взаимодействие между возмущениями и потенциалом поля $V(\phi_0)$.

Обозначим Σ пространственноподобную гиперповерхность с единичным нормальным вектором n^μ . Производная в направлении, нормальном вектору n^μ будет $\delta\dot{\phi} = n^\mu \partial_\mu \delta\phi$ и канонический импульс определяется как

$$\pi = \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta(\delta\dot{\phi})} \quad (7.6)$$

Запишем канонические коммутационные соотношения

$$[\delta\phi(\mathbf{x}, t), \pi(\mathbf{x}', t)] = i\delta(\mathbf{x}, \mathbf{x}'), \quad (7.7)$$

где $\delta(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ – дельта-функция на гиперповерхности Σ

$$\int \delta(\mathbf{x}, \mathbf{x}') d\Sigma = 1 \quad (7.8)$$

Пусть f_i – полный набор действительных решений уравнения (1), а f_i^* – полный набор мнимых решений и, таким образом, f_i, f_i^* – полный набор решений волновых уравнений. Запишем полевой оператор $\delta\phi$ как сумму операторов рождения и уничтожения

$$\delta\phi = \sum_i (a_i f_i + a_i^+ f_i^*), \quad (7.9)$$

где $[a_i, a_j^+] = \delta_{ij}$.

Это выражение определяет вакуумное состояние

$$a_i|0\rangle = 0 \quad (7.10)$$

В плоском пространстве-времени положительные решения будут выглядеть следующим образом $f_i \propto e^{-i\omega t}$. Уравнение (7.10) определяет вакуумное состояние. Следует отметить, что оно не является единственным возможным выбором вакуумного состояния [8].

7.2. Гауссовость и спектр мощности возмущений

В рамках исследования генерации и эволюции возмущений необходим формализм статистической природы вакуумных возмущений. Он имеет ключевое значение при сравнении заданной модели с наблюдательными данными. В развитии этого формализма будем следовать работе [3].

В соответствии с квантовой теорией поля действительная и мнимая части каждой компоненты $\delta\phi_k$ связаны с гармоническим осциллятором, что можно легко показать, рассматривая лагранжиан свободного массивного скалярного поля

$$L = \frac{1}{2} \int d^3r (\dot{\phi}^2 - (\nabla\phi)^2 - m^2\phi^2) \quad (7.11)$$

Запишем фурье-моды в объеме V

$$\phi = \sqrt{1/V} \sum_n \phi_{p_n} e^{i\mathbf{p}\mathbf{n}}, \quad (7.12)$$

где импульс имеет только дискретные значения.

Подставляя поле в лагранжиан, получаем

$$L = \frac{1}{2} \sum_n (|\dot{\phi}_{p_n}|^2 - E_{p_n}^2 |\phi_{p_n}|^2), \quad (7.13)$$

где $E_{p_n}^2 = p_n^2 + m^2$. Здесь использовалось соотношение

$$\frac{1}{V} \int d^3r e^{ik_n r} e^{-ik_m r} = \delta_{nm} \quad (7.14)$$

и условие $\phi_{\mathbf{p}}^* = \phi_{-\mathbf{p}}$.

Запишем скалярное поле через его действительную и мнимую части $\phi_{p_n} = R_n + iI_n$. Таким образом, лагранжиан будет определяться следующим образом

$$L = \sum_n [(\dot{R}_n^2 - E_n^2 R_n^2) + (\dot{I}_n^2 - E_n^2 I_n^2)] \quad (7.15)$$

Рассматривая действительную часть, получаем лагранжиан $(\dot{q}_n^2 - E_n^2 q_n^2)/2$, где $q_n = \sqrt{2}R_n$.

Далее запишем уравнения движения

$$\ddot{q}_n = -E_n q_n \quad (7.16)$$

Вероятность нахождения R_n в заданном интервале равна $P(R_n)d(R_n)$, где

$$P(R_n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_n} e^{-\frac{1}{2}\frac{R_n^2}{\sigma_n^2}}, \quad (7.17)$$

а дисперсия распределения Гаусса $\sigma_n^2 = \langle R_n^2 \rangle$.

Для мнимой части σ_n^2 определяется аналогично.

$$\sigma_n^2 = \langle R_n^2 \rangle = \langle I_n^2 \rangle = \frac{1}{2} \langle |\phi_{p_n}|^2 \rangle \quad (7.18)$$

Фаза ϕ_{p_n} случайна с одинаковым распределением вероятности, поэтому запишем

$$\frac{1}{2} \langle \phi_{p_n}^* \phi_{p'_n} \rangle = \delta_{n,n'} \sigma_n^2 \quad (7.19)$$

В пределах объема V , σ_n^2 предсказывается независимо от направления импульса. Более удобно использовать величину \mathcal{P}_ϕ – спектр мощности скалярного поля ϕ , которая определяется следующим образом

$$\mathcal{P}_\phi = \frac{1}{(2\pi)^3} 4\pi p^3 \langle |\phi_{p_n}|^2 \rangle \quad (7.20)$$

Также удобно взять предел, в котором Фурье-суммы становятся интегралом Фурье

$$\phi(\mathbf{x}) = \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^{3/2}} \phi(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} \quad (7.21)$$

Спектр мощности задается следующим образом:

$$\langle \phi^*(\mathbf{k}) \phi(\mathbf{k}') \rangle = \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \frac{2\pi^2}{k^3} \mathcal{P}_\phi(\mathbf{k}) \quad (7.22)$$

Корреляционная функция поля выражается через спектр мощности

$$\langle \phi^2(x) \rangle = \int_0^\infty \frac{dk}{k} \mathcal{P}_\phi(k) \quad (7.23)$$

Запись полевых уравнений для возмущенного поля $\delta\phi$ в первом порядке, при условии, что возмущения малы, приводит к отсутствию взаимодействий различных мод возмущений.

Таким образом, мы можем определять спектр и корреляционную функцию, что позволяет полностью описать статистические свойства возмущений инфляционного поля.

7.3. Квантовые флуктуации в течение де Ситтеровского расширения

Для решения полевых уравнений будем основываться на работе [28].

На де Ситтеровской стадии расширения

$$a(t) = e^{Ht} \quad (7.24)$$

$$a(\eta) = -\frac{1}{H\eta} (\eta < 0), \quad (7.25)$$

где $d\eta = \frac{dt}{a}$ – конформное время.

Вторая производная потенциала постоянная

$$V''(\phi_0) = m_\phi^2, \quad (7.26)$$

которая называется массой поля.

Уравнение динамики возмущенного скалярного поля имеет вид

$$\delta\ddot{\phi} + 3H\delta\dot{\phi} - \frac{1}{a^2}\nabla^2(\delta\phi) + m_\phi^2\delta\phi = 0 \quad (7.27)$$

Запишем выражение для полевого оператора:

$$\delta\phi = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}} \sqrt{\frac{1}{2k}} [a_k\phi e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} + a_k^\dagger e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x}}], \quad (7.28)$$

где значение $k^2 = \mathbf{k}^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2$ и $\delta\phi_k$ удовлетворяет следующему уравнению, записанному в конформном времени

$$\delta\phi_k'' + 2\frac{a'}{a}\delta\phi_k' + k^2\delta\phi_k + a^2m_\phi^2\delta\phi_k = 0 \quad (7.29)$$

Поскольку уравнение (7.29) не зависит от направления вектора \mathbf{k} , индекс поля будем записывать k .

Дальнейшее упрощение связано с новой переменной χ_k

$$\delta\phi_k(\eta) = \frac{\chi_k(\eta)}{a(\eta)} \quad (7.30)$$

Уравнение переписется в виде

$$\chi_k'' + [k^2 + M^2(\eta)]\chi_k = 0, \quad (7.31)$$

где

$$M^2(\eta) = a^2(\eta)(m_\phi^2 - 2H^2) = \frac{1}{\eta^2} \left(\frac{m_\phi^2}{H^2} - 2 \right) \quad (7.32)$$

Уравнение (7.31) запишем в следующей форме

$$\chi_k'' + \left[k^2 - \frac{1}{\eta^2} \left(\nu_\phi^2 - \frac{1}{4} \right) \right] \chi_k = 0, \quad (7.33)$$

где $\nu_\phi^2 = \left(\frac{9}{4} - \frac{m_\phi^2}{H^2}\right)$.

Для действительного ν_ϕ решением уравнения является линейная комбинация функций Ханкеля первого и второго рода

$$\chi_k = \sqrt{-\eta}[c_1(k)H_{\nu_\phi}^{(1)}(-k\eta) + c_2(k)H_{\nu_\phi}^{(2)}(-k\eta)] \quad (7.34)$$

Внутри горизонта решение представляет собой плоские волны $e^{-ik\eta}/\sqrt{2k}$. В случае $k \gg aH$:

$$H_{\nu_\phi}^{(1)} \sim \sqrt{\frac{2}{x}} e^{i(x - \frac{\pi}{2}\nu_\phi - \frac{\pi}{4})} \quad (7.35)$$

$$H_{\nu_\phi}^{(2)} \sim \sqrt{\frac{2}{x}} e^{-i(x - \frac{\pi}{2}\nu_\phi - \frac{\pi}{4})} \quad (7.36)$$

Выбираем условия $c_2(k) = 0$ и $c_1(k) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{i(\nu_\phi + \frac{\pi}{2})\frac{\pi}{2}}$.

Тогда точное решение записывается следующим образом

$$\chi_k = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{i(\nu_\phi + \frac{1}{2})\frac{\pi}{2}} \sqrt{-\eta} H_{\nu_\phi}^{(1)}(-k\eta) \quad (7.37)$$

За горизонтом $k \ll aH$

$$H_{\nu_\phi}^{(1)} \sim \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-i\frac{\pi}{2}} 2^{\nu_\phi - \frac{3}{2}} \frac{\Gamma(\nu_\phi)}{\Gamma(\frac{3}{2})} x^{-\nu_\phi}, \quad (7.38)$$

и флуктуации имеют вид

$$\chi_k = e^{i(\nu_\phi) - \frac{1}{2}\frac{\pi}{2}} 2^{(\nu_\phi - \frac{3}{2})} \frac{\Gamma(\nu_\phi)}{\Gamma(3/2)} \frac{1}{\sqrt{2k}} (-k\eta)^{\frac{1}{2} - \nu_\phi} \quad (7.39)$$

Возвращаясь к первоначальным возмущениям поля $\delta\phi = \frac{\chi_k}{a}$ по модулю получаем

$$|\delta\phi_k| = 2^{(\nu_\phi - \frac{3}{2})} \frac{\Gamma(\nu_\phi)}{\Gamma(3/2)} \frac{H}{\sqrt{2k^3}} \left(\frac{k}{aH}\right)^{(\frac{3}{2} - \nu_\phi)} \quad (7.40)$$

Определим новый параметр $\alpha = \frac{m_\phi^2}{3H^2}$ (учитываем, что $\alpha \ll 1$), можно написать в первом порядке этого параметра

$$\frac{3}{2} - \nu_\phi \simeq \alpha_\phi, \quad (7.41)$$

таким образом, спектр мощности возмущений после выхода за горизонт имеет вид

$$\mathcal{P}_\phi(k) = \left(\frac{2^{(\nu_\phi - \frac{3}{2})}\Gamma(\nu_\phi)}{\Gamma(3/2)}\right)^2 \left(\frac{H}{2\pi}\right)^2 \left(\frac{k}{aH}\right)^{2\alpha_\phi} \quad (7.42)$$

В случае практически безмассового поля или $m_\phi^2 \ll H^2$ можно записать $\nu_\phi \simeq \frac{3}{2}$ и получить масштабно-инвариантный спектр мощности

$$\mathcal{P}_\phi(k) = \left(\frac{H}{2\pi}\right)^2, \quad (7.43)$$

являющийся хорошо известным результатом [3].

В противоположном случае ν_ϕ мнимое, то есть $m_\phi > \frac{3}{2}H$. Спектр мощности в этом случае [28] будет

$$\mathcal{P}_\phi(k) \simeq \left(\frac{H}{2\pi}\right)^2 \left(\frac{H}{m_\phi}\right) \left(\frac{k}{aH}\right)^3 \quad (7.44)$$

Спектр мощности уменьшается с увеличением длины волны, что выражается множителем $\left(\frac{k}{aH}\right)^3$. Это так называемая модель Линде-Муханова, которая задает эволюцию изопотенциальных возмущений и гравитационного потенциала.

7.4. Адиабатичность возмущений

Адиабатичность означает, что возмущение любой скалярной величины X может быть описано единственным возмущением в расширяющемся пространстве-времени по отношению к фону, например для гиперповерхностей постоянного времени [17]

$$\delta t = \frac{\delta X}{\dot{X}}$$

для любого X . В частности, это справедливо для плотности энергии и давления

$$\frac{\delta \rho}{\dot{\rho}} = \frac{\delta p}{\dot{p}},$$

что подразумевает $p = p(\rho)$.

С другой стороны, существуют изопотенциальные возмущения для которых

$$\frac{\delta X}{\dot{X}} \neq \frac{\delta Y}{\dot{Y}},$$

для некоторых скалярных функций X и Y .

Космологические возмущения, полученные в течение инфляции адиабатические, если инфляция управляется только одним полем. Если же инфляция управляется более чем одним полем (например, случай гибридной инфляции), то можно ожидать генерации изопотенциальных возмущений [28].

В дальнейшем будут рассматриваться только адиабатические возмущения.

7.5. Пересечение горизонта

Связь между возмущениями кривизны и гравитационным потенциалом нетривиальна. Формально, наиболее корректным подходом является нахождение этого отношения путем решения уравнений Эйнштейна, используя калибровочно-инвариантные величины. Здесь будет использоваться подход, развитый в работе [3].

Введем понятие пекулярной скорости. Рассматривая возмущение пространства, запишем

$$r(t) = a(t) \cdot x(t),$$

где r – физическое, а x – координатное расстояние.

Далее введем скорость сопутствующего наблюдателя

$$u(x, t) = H(t)r + v(x, t)$$

Пекулярная скорость сопутствующего наблюдателя является скоростью, измеряемой неподвижным наблюдателем в той же точке. Так же можно определить локальный параметр Хаббла

$$H(x, t) = \frac{1}{3} \nabla \cdot u,$$

который характеризует скорость расширения Вселенной в случае однородного расширения.

Запишем закон сохранения массы

$$\frac{d\rho(x, t)}{dt} = -3H(x, t) \rho(x, t)$$

В пространственно плоской Вселенной

$$H^2(x, t) = \frac{8\pi G}{3} \rho(x, t) + K(x, t), \quad (7.45)$$

где $K(x, t)$ – локальная кривизна пространства. В плоской Вселенной $K(x, t) = 0$, но есть возможность определить инфинитезимальные возмущения кривизны

$$\delta K(x, t) = \frac{2}{3} \frac{1}{a^2} \nabla^2 R(x, t) \quad (7.46)$$

Вводя возмущения в уравнение (7.46) и применяя преобразование Фурье, получаем

$$2H\delta H_k = \frac{8\pi G}{3} \delta \rho_k - \frac{2}{3} \left(\frac{k}{a}\right)^2 R_k$$

Запишем уравнение непрерывности

$$\delta \dot{\rho}_k = -3(\rho + p)\delta H_k - 3H\delta \rho_k \quad (7.47)$$

Используя уравнение непрерывности, приходим к уравнению

$$2H \frac{\delta \dot{\rho}_k}{\rho} = -3(1+w) \left[\frac{8\pi G}{3} \delta \rho_k - \frac{2}{3} \left(\frac{k}{a}\right)^2 R_k \right] - 6H^2 \frac{\delta \rho_k}{\rho}$$

Относительную плотность $\delta_k = \frac{\delta \rho_k}{\rho}$ можно получить из уравнения Пуассона

$$\nabla^2 \Phi = 4\pi G \delta \rho_k$$

$$\Phi_k \frac{k^2}{a^2} = -4\pi G \delta \rho_k = -4\pi G \rho \frac{\delta \rho_k}{\rho} = -\frac{3}{2} H^2 \delta_k$$

$$\delta_k = -\frac{2}{3} \left(\frac{k}{aH}\right)^2 \Phi_k$$

Найдем производную $\dot{\delta}_k$

$$\dot{\delta}_k = -\frac{2}{3} \left(\frac{k}{aH}\right)^2 \dot{\Phi}_k + \frac{4}{3} \left(\frac{k}{aH}\right)^2 \frac{1}{H} \frac{\ddot{a}}{a} \Phi_k = \frac{\delta \dot{\rho}_k}{\rho} - \delta_k \frac{\dot{\rho}}{\rho}$$

И, используя уравнение Фридмана

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{1}{2} \frac{8\pi G}{3} (\rho + 3p), \quad (7.48)$$

получаем

$$\begin{aligned} \frac{\delta \dot{\rho}_k}{\rho} &= -\frac{2}{3} \left(\frac{k}{aH} \right)^2 \left[\dot{\Phi}_k + (1 + 3w) H \Phi_k \right] - 3H (1 + w) \delta_k \\ &= -\frac{2}{3} \left(\frac{k}{aH} \right)^2 \left[\dot{\Phi}_k - 2H \Phi_k \right] \end{aligned} \quad (7.49)$$

Включая это уравнение в уравнение непрерывности, запишем

$$-\frac{2}{3} \frac{1}{H} \dot{\Phi}_k - \frac{5 + 3w}{3} \Phi_k = (1 + w) R_k \quad (7.50)$$

В эпоху, когда параметр состояния w постоянный, уравнение имеет следующее решение:

$$\Phi_k = -\frac{3 + 3w}{5 + 3w} R_k \quad (7.51)$$

с учетом различных эпох

$$\Phi_k = \begin{cases} -\frac{2}{3} R_k & \text{стадия преобладания излучения} \\ -\frac{3}{5} R_k & \text{стадия преобладания вещества} \end{cases} \quad (7.52)$$

То есть, на разных стадиях эволюции, изменяется амплитуда возмущений.

В рамках оценок возмущений плотности можно записать:

$$\begin{aligned} \delta_k(t) &= \frac{4}{9} \left(\frac{k}{aH} \right)^2 R_k \propto \left(\frac{k}{aH} \right)^2 \propto t \propto a^2 & \text{стадия преобладания излучения} \\ \delta_k(t) &= \frac{2}{5} \left(\frac{k}{aH} \right)^2 R_k \propto \left(\frac{k}{aH} \right)^2 \propto t^{2/3} \propto a & \text{стадия преобладания вещества} \end{aligned}$$

$$\delta_H^2 = \frac{4}{25} P_R(k) = \frac{1}{150\pi^2 M_P^2} \frac{V}{\epsilon}, \quad (7.53)$$

где ϵ – параметр медленного скатывания.

Cosmic Background Explorer (COBE) оценивает эту величину следующим образом

$$\delta_H(k = 7,5a_0H_0) = 1,91 \times 10^{-5} \quad (7.54)$$

для $\Omega_m = 1$, $\Omega_\Lambda = 0$ и без учета вклада гравитационных волн.

Так же оценивается верхний предел для инфляции

$$\frac{V^{1/4}}{\epsilon^{1/4}} = (150)^{1/4} \sqrt{\pi} M_P \sqrt{1,91 \times 10^{-5}} = 0,027 M_P$$

После пересечения горизонта возмущения эволюционируют и дают масштабнo-инвариантный спектр.

7.6. Фоновые уравнения

Рассмотрим невозмущенную метрику ФРУ, которая описывается масштабным фактором $a(t)$ и однородным скалярным полем $\phi(t)$.

$$ds^2 = a^2(\eta)[d\eta^2 - \psi_{ij}dx^i dx^j] \quad (7.55)$$

где $\eta = \int dt/a(t)$, а ψ_{ij} – метрика пространства постоянной кривизны.

Уравнения динамики, в таком случае, можно записать следующим образом [23]:

$$\phi'' + 2\mathcal{H}\phi' + a^2V'(\phi) = 0 \quad (7.56)$$

$$\mathcal{H}^2 + \frac{K}{a^2} = \frac{1}{3M_P^2} \left[\frac{1}{2}\phi'^2 + a^2V(\phi) \right], \quad (7.57)$$

где $\mathcal{H} = aH$, $\phi' = a\dot{\phi}$ и штрих означает производную по конформному времени η .

Уравнения (7.56) и (7.57) определяют поведение динамических переменных $a(\eta)$ и $\phi(\eta)$. Далее будем рассматривать случай плоской Вселенной $K = 0$.

Дифференцируя уравнение (7.57) и, используя (7.56), получим

$$\mathcal{H}' - \mathcal{H}^2 = \frac{\phi'^2}{2M_P^2} \quad (7.58)$$

На основе уравнения (7.58) будет определяться фоновая динамика скалярного поля $\phi(\eta)$ и масштабного фактора $a(\eta)$. В течение инфляции квантовые флуктуации скалярного поля будут создавать возмущения метрики, которые, в свою очередь, действуют на поле.

7.7. Возмущения метрики

Запишем в линейном приближении метрику с учетом скалярных и тензорных возмущений и возмущения поля [11]

$$ds^2 = a^2(\eta)[-(1 + 2A)d\eta^2 - 2B_{,i}dx^i d\eta + ((1 + 2D_{ij})\psi_{ij} + 2E_{|ij} + 2h_{ij})dx^i dx^j] \quad (7.59)$$

$$\phi = \phi(\eta) + \delta\phi(\eta, x^i) \quad (7.60)$$

Функции скалярных возмущений $A(\eta, x^i)$, B , D , E зависят от калибровки, $|ij$ – ковариантные производные в ψ_{ij} . Калибровочно-инвариантным тензорным возмущениям соответствуют поперечные бесследовые гравитационные волны $\nabla_i h_{ij} = h^i_i = 0$. В линейном приближении векторные возмущения в течение инфляции не генерируются.

Используем преобразования координат [12]:

$$\tilde{\eta} = \eta + \xi^0(\eta, x^i) \quad (7.61)$$

$$\tilde{x}^i = x^i + \psi_{ij}\xi_{|j}(\eta, x^i) \quad (7.62)$$

с произвольными функциями (ξ^0, ξ) .

В таком случае, скалярные и тензорные возмущения записываются следующим образом:

$$\tilde{A} = A - (\xi^0)' - \mathcal{H}\xi^0, \tilde{B} = B + \xi^0 - \xi', \tilde{D} = D - \mathcal{H}\xi^0, \tilde{E} = E - \xi \quad (7.63)$$

$$\tilde{h}_{ij} = h_{ij}, \quad (7.64)$$

где штрих означает производную по конформному времени, а $\mathcal{H} = a'/a$.

Из них возможно сконструировать калибровочно-инвариантные потенциалы Бардина [11]:

$$\Psi = A + \frac{1}{a}[a(B + E)'] \quad (7.65)$$

$$\Phi = D + \mathcal{H}(B + E) \quad (7.66)$$

Запишем $\Phi = \Psi$.

В течение инфляции плотность энергии определяется скалярным полем и, таким образом, калибровочно-инвариантные уравнения для возмущенной метрики:

$$\Phi'' + 3\mathcal{H}\Phi' + (\mathcal{H}' + \mathcal{H}^2)\Phi = \frac{1}{3M_p^2} [\phi'\delta\phi' - a^2V(\phi)\delta\phi] \quad (7.67)$$

$$-\nabla^2\Phi + 3\mathcal{H}\Phi' + (\mathcal{H}' + \mathcal{H}^2)\Phi = -\frac{1}{3M_p^2} [\phi'\delta\phi' + a^2V(\phi)\delta\phi] \quad (7.68)$$

$$\Phi' + \mathcal{H}\Phi = \frac{1}{3M_p^2}\phi'\delta\phi' \quad (7.69)$$

$$\delta\phi'' + 2\mathcal{H}\delta\phi' - \nabla^2\delta\phi = 4\phi'\Phi' - 2a^2V'(\phi)\Phi - a^2\Phi - a^2V''(\phi)\delta\phi \quad (7.70)$$

Определим переменные, позволяющие решить эту систему уравнений [11]:

$$u = a\delta\phi + z\Phi \quad (7.71)$$

$$z = a\frac{\phi'}{\Phi} \quad (7.72)$$

В этих переменных система (7.67)-(7.70) выглядит следующим образом:

$$u'' - \nabla^2u - \frac{z''}{z}u = 0 \quad (7.73)$$

$$\nabla^2\Phi = \frac{8\pi}{3M_p^2}\frac{\mathcal{H}}{a^2}(zu' - z'u) \quad (7.74)$$

$$\left(\frac{a^2\Phi}{\mathcal{H}}\right) = \frac{zu}{3M_p^2} \quad (7.75)$$

Эта система уравнений позволяет найти $\delta\phi$.

7.8. Квантование скалярного поля

Для квантования скалярного поля запишем, что уравнение динамики скалярных возмущений (7.73) является уравнением Эйлера-Лагранжа для действия [24]:

$$S = \frac{1}{2} \int d^3x d\eta \left[(u')^2 - (\nabla u)^2 + \frac{z''}{z} u^2 \right] \quad (7.76)$$

Лагранжиан для u

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left[(u')^2 - (\nabla u)^2 + \frac{z''}{z} u^2 \right] \quad (7.77)$$

Канонический импульс

$$\pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u'} = u' \quad (7.78)$$

и канонические коммутационные соотношения

$$[\hat{u}(\eta, x), \hat{u}(\eta, x')] = [\hat{\pi}(\eta, x), \hat{\pi}(\eta, x')] = 0, \quad (7.79)$$

$$[\hat{u}(\eta, x), \hat{\pi}(\eta, x')] = i\delta^{(3)}(x - x') \quad (7.80)$$

Представим оператор $\hat{u}(\eta, x)$ в виде $u_k(\eta)e^{ikx}$. В таком случае, уравнение (7.73) будет:

$$u_k'' + \left(k^2 + \frac{z''}{z} \right) u_k = 0 \quad (7.81)$$

Не зависящую от времени нормировку выбираем следующим образом:

$$u_k^* u_k' - u_k u_k'^* = -i \quad (7.82)$$

В разложении

$$\hat{u}(\eta, x) = (2\pi)^{-3/2} \int d^3k \left[u_k(\eta) \hat{a}_k e^{ikx} + u_k^*(\eta) \hat{a}_k^\dagger e^{-ikx} \right] \quad (7.83)$$

коэффициенты \hat{a}_k и \hat{a}_k^\dagger – операторы рождения и уничтожения с обычными коммутационными соотношениями.

$$[\hat{a}_k, \hat{a}_{k'}] = [\hat{a}_k^\dagger, \hat{a}_{k'}^\dagger] = 0, [\hat{a}_k, \hat{a}_k^\dagger] = \delta^{(3)}(k - k') \quad (7.84)$$

Моды $u_k(\eta)$ выбраны таким образом, что на очень малых масштабах ($k/aH \rightarrow \infty$) они представляют собой плоские волны

$$u_k(\eta) = \frac{1}{\sqrt{2k}} e^{-ik\eta}, k/aH \gg 1 \quad (7.85)$$

В длинноволновом режиме где k исчезающе мало мы получаем решение в виде растущей моды

$$u_k = z, k/aH \ll 1 \quad (7.86)$$

таким образом u_k/z и скалярные возмущения метрики \mathcal{R} постоянны на масштабах, превышающих горизонт.

Спектр мощности удобно выражать в терминах \mathcal{R}

$$\mathcal{R}(\eta, x) = (2\pi)^{-3/2} \int \mathcal{R}_k(\eta) e^{ikx} d^3k \quad (7.87)$$

с

$$\mathcal{R}(\eta) = \left[\frac{u_k(\eta)}{z} a_k + \frac{u_k^*(\eta)}{z} \hat{a}_{-k}^\dagger \right] \quad (7.88)$$

Спектр мощности определяется как [24]:

$$\langle 0 | \mathcal{R}_k \mathcal{R}_{k'}^\dagger | 0 \rangle = \frac{2\pi^2}{k^3} P_{\mathcal{R}}(k) \delta^{(3)}(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \quad (7.89)$$

В итоге, получаем следующий вид спектра мощности возмущений кривизны

$$P_{\mathcal{R}}(k) = \frac{k^3}{2\pi^2} \frac{|u_k(\eta)|^2}{z^2} \quad (7.90)$$

7.9. Точные решения уравнений эволюции скалярного поля

Исходными уравнениями космологической модели инфляции является самосоглашенная система уравнений Эйнштейна и самодействующего скалярного поля в пространстве Фридмана-Робертсона-Уокера с пространственно-плоским сечением. Выбираем представление этой системы уравнений в терминах потенциала полной энергии $W(\phi)$ [26]:

$$W(\phi) = 3M_P^2 H^2 \quad (7.91)$$

$$3H\dot{\phi} = -\frac{d}{d\phi} W(\phi) \quad (7.92)$$

$$[\dot{\phi}(t)]^2 = -2M_P^2 \dot{H} \quad (7.93)$$

Напомним, что потенциал полной энергии был определен как величина, зависящая от скалярного поля

$$W(\phi) = V(\phi) + \frac{1}{2} X, \text{ где } X(\phi) = \dot{\phi}^2 \quad (7.94)$$

Легко убедиться, что одно из уравнений Эйнштейна (7.93) может быть получено как следствие уравнений (7.91)-(7.92).

Определим параметры, являющиеся аналогами параметров медленного скатывания

$$\gamma = \frac{M_P^2}{2} \left(\frac{W'}{W} \right)^2 \quad (7.95)$$

$$\delta = M_P^2 \frac{W''}{W} \quad (7.96)$$

Таким образом, в рамках точного подхода можно использовать инфляционные параметры γ и δ в качестве альтернативы параметрам ϵ и η в приближении медленного скатывания.

Таким образом, исходя из вида потенциала полной энергии $W(\phi)$ можно получить точные решения системы уравнений динамики скалярного поля.

7.10. Спектральные характеристики космологических возмущений

Вначале рассмотрим степенную эволюцию масштабного фактора $a(t) = a_s t^m$. Параметр Хаббла, в таком случае, будет $H = m/t$.

Из уравнения (7.93) следует

$$\dot{\phi} = \sqrt{\frac{m}{4\pi}} M_P \frac{1}{t} \quad (7.97)$$

$$\phi(t) = \sqrt{\frac{m}{4\pi}} M_P \ln(t) + const \quad (7.98)$$

таким образом

$$H \propto \left(-\sqrt{\frac{4\pi}{m}} \frac{\phi}{M_P} \right) \quad (7.99)$$

Рассмотрим спектр мощности для степенной инфляции. Для этого нужно в уравнении (7.73) определить z''/z .

Из масштабного фактора получаем $t \propto \eta^{1/1-m}$, так $a(\eta) \propto \eta^{m/1-m}$.

Запишем уравнение

$$\frac{z''}{z} = \left(\nu^2 - \frac{1}{4} \right) \frac{1}{\eta^2} \quad (7.100)$$

где

$$\nu^2 - \frac{1}{4} = \frac{m(2m-1)}{(m-1)^2} \quad (7.101)$$

Уравнение (7.73) заменяем на уравнение

$$u_k'' + \left(k^2 - \frac{\nu^2 - 1/4}{\eta^2} \right) u_k = 0 \quad (7.102)$$

Запишем предварительно два соотношения. Первое, из $H = m/t$ и $a(t) = a_0 t^m$ получим

$$\eta = -\frac{1}{aH} \frac{1}{1-1/m} \quad (7.103)$$

Второе

$$\frac{z}{a} = \frac{\dot{\phi}}{H} = \sqrt{\frac{m}{4\pi}} \frac{M_P/t}{(m/t)} = \frac{1}{\sqrt{4\pi m}} M_P \quad (7.104)$$

Таким образом

$$\gamma = -\frac{\dot{H}}{H^2} = \frac{1}{m} = \frac{4\pi}{M_P^2} \frac{z^2}{a^2} \quad (7.105)$$

Решением уравнения (7.102) является [24]:

$$u_k(\eta) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{i(\nu+\frac{1}{2})\frac{\pi}{2}} (-\eta)^{1/2} H_\nu^{(1)}(-k\eta) \quad (7.106)$$

Рассмотрим моды, находящиеся за горизонтом ($k/aH \ll 1$)

В этом пределе мы получаем

$$iH_\nu^{(1)}(z) \sim \frac{1}{\pi} \Gamma(\nu) \left(\frac{1}{2}z\right)^{-\nu} \quad (z \rightarrow 0) \quad (7.107)$$

Таким образом, находим

$$u_k(\eta) \simeq 2^{\nu-3/2} e^{i(\nu-1/2)\pi/2} \frac{\Gamma(\nu)}{\Gamma(3/2)} \frac{1}{\sqrt{2k}} (-k\eta)^{-\nu+1/2} \quad (7.108)$$

Следовательно, используя (7.105), получим:

$$|u_k| = 2^{\nu-3/2} \frac{\Gamma(\nu)}{\Gamma(3/2)} (1-\gamma)^{\nu-1/2} \frac{1}{\sqrt{2k}} \left(\frac{k}{aH}\right)^{-\nu+1/2} \quad (7.109)$$

Перепишем уравнение (7.109) в виде:

$$|u_k| = C(\nu) \frac{1}{\sqrt{2k}} \left(\frac{k}{aH}\right)^{-\nu+1/2} \quad (7.110)$$

с функцией

$$C(\nu) = 2^{\nu-3/2} \frac{\Gamma(\nu)}{\Gamma(3/2)} (1-\gamma)^{\nu-1/2} \quad (7.111)$$

Спектр мощности, в таком случае

$$P_{\mathcal{R}}(k) = \frac{k^3}{2\pi^2} \left| \frac{u_k(\eta)}{z^2} \right|^2 = \frac{k^3}{2\pi^2} \frac{1}{z^2} C(\nu)^2 \frac{1}{2k} \left(\frac{k}{aH}\right)^{1-2\nu} \quad (7.112)$$

Исходя из соотношения (7.72) получим [24]

$$z = -\frac{M_p^2}{4\pi} \frac{a}{H} \frac{dH}{d\phi} \quad (7.113)$$

Подставляя это выражение в предыдущее уравнение получим спектр мощности на масштабах, превышающих горизонт

$$P_{\mathcal{R}}(k) = C^2(\nu) \frac{4}{M_p^4} \frac{H^4}{(H'_\phi)^2} \left(\frac{k}{aH}\right)^{3-2\nu} \quad (7.114)$$

Сравнивая, в случае степенной инфляции, формулы (7.108) и (7.113), получим

$$\frac{M_p^4}{4\pi} \frac{(dH/d\phi)^2}{H^2} = \frac{1}{m} = \gamma \quad (7.115)$$

Выражение (7.114), полученное для $k/aH \ll 1$, остается постоянным во времени. Следовательно, мы можем записать его на пересечении радиуса Хаббла $k = aH$

$$P_{\mathcal{R}}(k) = C^2(\nu) \frac{4}{M_p^4} \frac{H^4}{(dH/d\phi)^2} \Big|_{k=aH} \quad (7.116)$$

Теперь рассмотрим спектральные характеристики космологических возмущений для произвольных моделей инфляции.

7.10.1. Спектр мощности скалярных возмущений

Запишем определение используемых параметров

$$\gamma = -\frac{\dot{H}}{H^2} = \frac{M_P^2}{4\pi} \left(\frac{dH/d\phi}{H} \right)^2 \quad (7.117)$$

$$\delta = -\frac{\ddot{\phi}}{H\dot{\phi}} = \frac{M_P^2}{4\pi} \frac{d^2H/d\phi^2}{H} \quad (7.118)$$

Используем их для нахождения z''/z .

Перепишем выражения для параметров γ и δ , исходя из z [24]

$$\gamma = 1 - \frac{\mathcal{H}'}{\mathcal{H}^2} = \frac{4\pi}{M_P^2} \frac{z^2}{a^2} \quad (7.119)$$

$$\delta = 1 - (\phi''/\phi'\mathcal{H}) = 1 + \gamma - \frac{z'}{\mathcal{H}z} \quad (7.120)$$

С помощью этих параметров можно записать выражения для конформного времени η и эффективного потенциала z''/z

$$\eta = -\frac{1}{\mathcal{H}} + \int \frac{\gamma}{a\mathcal{H}} da \quad (7.121)$$

$$\frac{z''}{z} = \mathcal{H}^2 \left[\frac{\gamma' - \delta'}{\mathcal{H}} + (1 + \gamma + \delta)(2 - \delta) \right] \quad (7.122)$$

Параметры γ и δ можно считать постоянными во втором порядке

$$\gamma' = 2\mathcal{H}\gamma(\gamma - \delta) = \mathcal{O}(\gamma^2) \quad (7.123)$$

$$\delta' = \mathcal{H}\delta \left(\gamma + \delta + \frac{\ddot{\phi}}{H\dot{\phi}} \right) = \mathcal{O}(\gamma^2) \quad (7.124)$$

В результате можно записать спектр мощности в случае точного решения аналогично случаю степенной инфляции. Для значения $\nu = 3/2$ получаем $C(\nu) = 1$.

$$P_{\mathcal{R}}(k) = C^2(\nu) \frac{4}{M_P^4} \frac{H^4}{(dH/d\phi)^2} \Big|_{k=aH} = \frac{1}{\pi M_P^2} \frac{H^2}{\gamma} \left(\frac{k}{aH} \right)^{3-2\nu} \quad (7.125)$$

Найдем спектральный индекс

$$n_S(k) - 1 = \frac{d \ln P_{\mathcal{R}}(k)}{d \ln k} = 3 - 2\nu = 2 \left(\frac{\delta - 2\gamma}{1 - \gamma} \right) \quad (7.126)$$

Подставляя значения γ и δ получаем

$$n_S(k) - 1 = \frac{4\dot{H} - \frac{H\ddot{H}}{H}}{\dot{H} + H^2} \quad (7.127)$$

спектральный индекс скалярных возмущений для точных решений уравнений эволюции скалярного поля.

7.10.2. Спектр мощности тензорных возмущений

Рассмотрим тензорные возмущения метрики, которые появляются на инфляционной стадии. Возмущенное действие для тензорных мод запишем следующим образом

$$\delta S = \frac{1}{2} \int d^3x d\eta \frac{4a^2}{3M_P^4} [(h'_{ij})^2 - \nabla(h_{ij})^2] \quad (7.128)$$

с тензорным полем h_{ij} , определенным следующим образом

$$\hat{h}_{ij}(\eta, \mathbf{x}) = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^{3/2}} \sum_{\lambda=1,2} [h_k(\eta) e_{ij}(\mathbf{k}, \lambda) \hat{a}_{\mathbf{k},\lambda} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} + \text{эрм. сопр.}] \quad (7.129)$$

где $e_{ij}(\mathbf{k}, \lambda)$ – два тензора поляризации, удовлетворяющие условиям симметричности, поперечности и бесследовости

$$e_{ij} = e_{ji}, e_{ii} = 0 \quad (7.130)$$

$$e_{ij}(-\mathbf{k}, \lambda) = e_{ij}^*(\mathbf{k}, \lambda), \sum_{\lambda} e_{ij}^*(\mathbf{k}, \lambda) e^{ij}(\mathbf{k}, \lambda) = 4 \quad (7.131)$$

операторы рождения и уничтожения удовлетворяют условиям (31).

Переопределим калибровочно-инвариантную амплитуду тензорных мод следующим образом

$$v(\eta) = \frac{a}{\sqrt{2k}} h(\eta) \quad (7.132)$$

Получаем уравнение для каждой моды $v(\eta)$

$$v_k'' + \left(k^2 + \frac{a''}{a} \right) v_k = 0 \quad (7.133)$$

Уравнение (7.133) можно рассматривать как уравнение Шредингера с потенциалом a''/a , аналогично z''/z для скалярных возмущений.

В случае постоянных параметров γ и δ потенциал становится

$$\frac{a''}{a} = 2\mathcal{H}^2 \left(1 - \frac{\gamma}{2} \right) = \frac{1}{\eta^2} \left(\mu^2 - \frac{1}{4} \right) \quad (7.134)$$

$$\mu = \frac{1}{1-\gamma} + \frac{1}{2} \quad (7.135)$$

Уравнение (7.133) можно решить в двух асимптотических режимах:

$$v_k = \frac{1}{\sqrt{2k}} e^{ik\eta}, k \gg aH \quad (7.136)$$

$$v_k = Ca, k \ll aH \quad (7.137)$$

В пределе $k \ll aH$ на масштабах, превышающих радиус Хаббла, квантовые возмущения "замерзают" то есть их амплитуды становятся постоянными.

Запишем решение, аналогичное (7.109). Получим на пересечении радиуса Хаббла

$$|v_k| = \frac{C(\mu)}{\sqrt{2k}} \left(\frac{k}{aH} \right)^{\mu - \frac{1}{2}} \quad (7.138)$$

Определим спектр мощности

$$\begin{aligned} \sum_{\lambda} \langle 0 | \hat{h}_{\mathbf{k},\lambda}, \hat{h}_{\mathbf{k},\lambda}^{\dagger} | 0 \rangle &= \frac{2\pi^2}{k^3} \mathcal{P}_G(k) \delta^{(3)}(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \\ &= \frac{M_P^2 a^2}{8\pi} \frac{k^3}{2\pi^2} \mathcal{P}_G(k) \delta^{(3)}(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \end{aligned} \quad (7.139)$$

$$\mathcal{P}_G(k) = \frac{4H^2}{\pi M_P^2} \left(\frac{k}{aH} \right)^{3-2\mu} = A_T^2 \left(\frac{k}{aH} \right)^{n_T} \quad (7.140)$$

Спектральный индекс тензорных возмущений:

$$n_T = \frac{d \ln \mathcal{P}_R(k)}{d \ln k} = 3 - 2\mu = - \left(\frac{2\gamma}{1 - \gamma} \right) \quad (7.141)$$

Следует отметить, что поставив выражение для γ в (7.141) получим

$$n_T = \frac{H^2}{\dot{H} + H^2} \quad (7.142)$$

Таким образом, мы нашли спектр мощности и спектральный индекс тензорных возмущений в случае точного решения уравнений эволюции скалярного поля.

7.11. Метод вычисления космологических параметров

На основе уравнений (7.91)-(7.92), принимая во внимание точную формулу для дифференциала от логарифма волнового вектора при выходе возмущений с волновым вектором k за горизонт $k = aH$ [27]

$$d(\ln k) = H dt + \frac{\dot{H}}{H} dt = H dt + \frac{3U^3(\phi)}{2M_P^2 W'} dt \quad (7.143)$$

можно внести поправку в формулу вычисления спектра мощности скалярных возмущений, заменив физический потенциал $V(\phi)$ на потенциал полной энергии $W(\phi)$, а затем, используя уравнения (7.125), получить представление спектра мощности через H на пересечении радиуса Хаббла:

$$\mathcal{P}_R(k) = \frac{1}{12M_P^6} \frac{W^3}{W'^2} = \frac{H^4}{8\pi^2 M_P^2 \dot{H}} \Big|_{k=aH} \quad (7.144)$$

Для спектрального индекса скалярных возмущений аналогично получаем

$$n_S(k) - 1 = \frac{d \ln \mathcal{P}_R(k)}{d \ln k} = \frac{4\dot{H} - \frac{H\ddot{H}}{H}}{\dot{H} + H^2} \Big|_{k=aH} \quad (7.145)$$

На основе этих соотношений очевидным образом можно получить формулы для "убегания" спектральных индексов.

Аналогичная вычислению спектра мощности скалярных возмущений процедура позволяет вывести точную формулу для спектра мощности тензорных возмущений $\mathcal{P}_G(k)$ в виде

$$\mathcal{P}_G(k) = \frac{W}{6M_P^4} = \frac{H^2}{2\pi^2 M_P^2} \Big|_{k=aH} \quad (7.146)$$

и записать формулу для спектрального индекса тензорных возмущений

$$n_G = M_P^2 \frac{(W')^2}{W(\frac{3}{2}U^2 - W)} = \frac{2\dot{H}}{\dot{H} + H^2} \Big|_{k=aH} \quad (7.147)$$

Отметим специфический результат для отношения спектральных индексов тензорного и скалярного возмущений

$$r := \frac{n_G}{n_S} = 2\dot{H} \left[5\dot{H} + H^2 - \frac{H\ddot{H}}{\dot{H}} \right]^{-1} \quad (7.148)$$

Так как уточнение в формулах (7.145)-(7.147) заключается в том, что в знаменателе стоит не H^2 , как в приближении медленного скатывания, а $(\dot{H} + H^2)$, то при рассмотрении этого отношения уточнение себя не проявляет.

В дальнейшем мы будем рассматривать тензорно-скалярное отношение по квадратам амплитуд [14]:

$$\frac{T}{S} = \frac{A_T^2}{A_S^2} = -4 \frac{\dot{H}}{H^2} \quad (7.149)$$

Используя тензорно-скалярное отношение, можно определить амплитуду тензорных мод космологических возмущений и оценить ее вклад в анизотропию реликтового излучения, исходя из наблюдаемого вклада скалярных возмущений.

7.12. Пост-инфляционная эволюция космологических возмущений

Рассмотрим последовательность событий при переходе от инфляционной стадии к стадии преобладания излучения и вещества.

Инфляционная стадия завершается распадом скалярного поля и образованием частиц с последующим нуклеосинтезом и дальнейшей эволюцией согласно стандартному сценарию. При этом космологические возмущения различных длин волн (с различным волновым числом k) в течении нескольких e -фолдов после выхода за горизонт становятся классическими величинами. Это время принято отмечать как время t_* .

При уходе за горизонт космологические возмущения остаются "вмороженными" в гравитационный фон и не меняют своей амплитуды в сопутствующей системе координат. При вхождении под горизонт (в эпоху преобладания излучения), обозначим это время t_{pr} , амплитуда возмущений эволюционирует известным образом. Считается, что теория космологических возмущений применима в начальную эпоху, которая начинается до вхождения, интересующих нас космологических масштабов, под горизонт. Начальная эпоха начинается гораздо позже нуклеосинтеза, поэтому материальные составляющие вселенной, за исключением небарионной темной материи, известны. Теоретически

установлено, каким образом эволюционируют возмущения всех составляющих вселенной после начальной эпохи, если известна плотность энергии каждой из составляющих в это время. Начальный спектр возмущений можно получить посредством функции переноса из вакуумных флуктуаций в момент времени t_* . Известно, как эта функция может быть вычислена. Причем возмущение любой из составляющих вычисляется через возмущение кривизны \mathcal{R}_k при помощи функции переноса

$$g_k(t) = T_g(t, k)\mathcal{R}_k \quad (7.150)$$

где $\mathcal{R}_k(t)$ определяется в момент времени t_*

$$\mathcal{R}_k = - \left[\frac{H}{\dot{\phi}} \delta\phi_k \right]_{t=t_*} \quad (7.151)$$

Уточнение связано именно с вычислением возмущения кривизны на основе точных решений уравнений Эйнштейна (в нулевом приближении), без использования режима медленного скатывания. Так как точные выражения получены для космологических параметров при выходе за горизонт, для сопоставления с наблюдательными данными требуется выполнить перерасчет космологических параметров на современную эпоху. Для этого рассмотрим пост-инфляционную эволюцию космологических возмущений и найдем поправки на космологические параметры.

Воспользуемся стандартным методом пересчета космологических возмущений на фридмановские эпохи. Известно [28], что в течение стадии преобладания излучения $a \sim t^n$ при $n = 1/2$ и стадии преобладания вещества $a \sim t^n$ при $n = 2/3$ гравитационные возмущения (гравитационный потенциал Φ_k) преобразуются следующим образом:

В случае преобладания излучения

$$\Phi_k = \frac{2}{3}\mathcal{R}_k \quad (7.152)$$

Для преобладания вещества

$$\Phi_k = \frac{3}{5}\mathcal{R}_k \quad (7.153)$$

Из этих соотношений заключаем, что эволюция возмущений после вхождения под горизонт сводится просто к изменению их амплитуды.

Таким образом, спектр мощности гравитационных возмущений на стадии преобладания материи определяется через спектр возмущений кривизны

$$\mathcal{P}_\Phi(MD) = \frac{9}{25}\mathcal{P}_\mathcal{R} \quad (7.154)$$

Это, в свою очередь, позволяет определить контраст плотности и спектр мощности скалярных возмущений

$$\delta_k = \frac{2}{3} \left(\frac{k}{aH} \right)^2 T_g(t, k)\Phi_k \quad (7.155)$$

$$\mathcal{P}_\delta(k, t) = \frac{4}{25} \left(\frac{k}{aH} \right)^4 T_g(t, k)^2 \mathcal{P}_\mathcal{R}, \quad (7.156)$$

которые можно сопоставить с наблюдательными данными.

В случае произвольных длин волн возмущений, функция переноса может быть найдена численно. Значение функции переноса определяется из соотношения между темной материей, барионным веществом и излучением в эпоху наблюдения [66].

Таким образом, уточнение полученное на стадии выхода из инфляции, в конечном итоге, приводит к уточнению соотношения с наблюдательными данными.

7.13. Космологические параметры для точных решений

Определим параметры космологических возмущений различных моделей космологической инфляции, задавая масштабный фактор. Все космологические параметры определяются в момент времени t , который является временем пересечения радиуса Хаббла.

7.13.1. Степенная инфляция

Рассмотрим, прежде всего степенную инфляцию. Масштабный фактор в такой модели определяется следующим образом

$$a(t) = a_s t^m, \quad a_s = \text{const} \quad (7.157)$$

Для спектрального индекса скалярных и тензорных возмущений получаем

$$n_S - 1 = \frac{2}{1 - m} = n_G \quad (7.158)$$

Считая $m > 1$ и $|n_S - 1| < 0.2$, получаем вполне разумное ограничение на степень расширения: $m > 9$.

Отношение тензорного спектрального индекса к скалярному

$$r = \frac{2}{3 - m} \quad (7.159)$$

критическим образом связан с $m = 3$. При $m = 3$ $r \rightarrow \infty$. Для $1 \leq m < 3$ $1 \leq r < \infty$, при $m > 3$ $-\infty < r < 0$. При этом, когда $m \geq 9$ $r \geq -1/3$, то есть $|r| < 0.333$ и при росте m спектральный индекс тензорных возмущений становится по модулю все меньше скалярного.

7.13.2. Де Ситтеровские решения

Решение де Ситтера описывает сингулярную и несингулярную Вселенную с масштабным фактором

$$a(t) = a_s \sinh(h_* t), \quad a_s = \text{constant} \quad (7.160)$$

и

$$a(t) = a_s \cosh(h_* t) \quad (7.161)$$

соответственно. Спектральные индексы и их отношение вычисляются по общим формулам и имеют вид:

Для сингулярной Вселенной

$$n_S - 1 = \frac{2[2 + \cosh^2(h_*t)]}{\sinh^2(h_*t)}, \quad (7.162)$$

$$n_G = -\frac{2}{\sinh^2(h_*t)}, \quad r = \frac{2}{5 + \cosh^2(h_*t)} \quad (7.163)$$

$$\mathcal{P}_R = \frac{cth^4(h_*t)}{8\pi^2 M_p^2 h_* [1 - cth^2(h_*t)]}, \quad (7.164)$$

$$\mathcal{P}_G = \frac{cth^2(h_*t)}{2\pi^2 M_p^2}, \quad \frac{T}{S} = 4 \frac{h_* [1 - cth^2(h_*t)]}{cth^2(h_*t)} \quad (7.165)$$

В случае несингулярного решения де Ситтера

$$n_S - 1 = \frac{2[2 - \sinh^2(h_*t)]}{\cosh^2(h_*t)}, \quad (7.166)$$

$$n_G = \frac{2}{\cosh^2(h_*t)}, \quad r = \frac{2}{5 - \sinh^2(h_*t)} \quad (7.167)$$

$$\mathcal{P}_R = \frac{th^4(h_*t)}{8\pi^2 M_p^2 h_* [1 - th^2(h_*t)]}, \quad (7.168)$$

$$\mathcal{P}_G = \frac{th^2(h_*t)}{2\pi^2 M_p^2}, \quad \frac{T}{S} = 4 \frac{h_* [1 - th^2(h_*t)]}{th^2(h_*t)} \quad (7.169)$$

Скалярное поле в данном случае должно быть мнимым.

7.13.3. Обобщенная экспоненциальная инфляция

Рассмотрим масштабный фактор, определяемый следующим образом

$$a = a_s e^{(Ae^{\lambda t} + Bt)} \quad (7.170)$$

Параметр Хаббла будет

$$H(t) = A\lambda e^{\lambda t} + B \quad (7.171)$$

Рассчитаем спектральные индексы скалярной и тензорной мод возмущений, а так же определим спектры мощности

$$n_S - 1 = \frac{4A\lambda e^{\lambda t} - \lambda(A\lambda e^{\lambda t} + B)}{A\lambda^2 e^{\lambda t} + (A\lambda e^{\lambda t} + B)^2}, \quad (7.172)$$

$$n_G = \frac{2A\lambda^2 e^{\lambda t}}{A\lambda^2 e^{\lambda t} + (A\lambda e^{\lambda t} + B)^2} \quad (7.173)$$

$$\mathcal{P}_R = \frac{(A\lambda e^{\lambda t} + B)^4}{8\pi^2 A\lambda^2 M_p^2 e^{\lambda t}}, \quad \mathcal{P}_G = \frac{(A\lambda e^{\lambda t} + B)^2}{2\pi M_p^2} \quad (7.174)$$

Отношение спектральных индексов и тензорно-скалярное отношение на пересечении Хаббловского радиуса

$$r = \frac{A\lambda^2 e^{\lambda t}}{5A\lambda^2 e^{\lambda t} + (\lambda e^{\lambda t} + B)^2 - \lambda(\lambda e^{\lambda t} + B)}, \quad (7.175)$$

$$\frac{T}{S} = 4 \frac{A\lambda^2 e^{\lambda t}}{(A\lambda e^{\lambda t} + B)^2} \quad (7.176)$$

7.13.4. Экспоненциально-степенная инфляция

Эволюция масштабного фактора в такой модели определяется следующим образом

$$a(t) = a_s t^n \exp(h_* t), \quad n = \frac{A^2}{2M_p^2}, \quad a_s = \text{const} \quad (7.177)$$

Космологические параметры в этом случае записываются

$$n_S - 1 = \frac{2(h_* t - n)}{(h_* t + n)^2 - n}, \quad n_G = \frac{2n}{n - (h_* t + n)^2} \quad (7.178)$$

$$\mathcal{P}_{\mathcal{R}} = \frac{t^4}{8\pi^2 M_p^2 (h_* t + n)^2 [1 - t(h_* t + n)]}, \quad (7.179)$$

$$\mathcal{P}_{\mathcal{G}} = \frac{t^2}{2\pi^2 M_p^2 (h_* t + n)^2} \quad (7.180)$$

Отношение спектральных индексов и тензорно-скалярное отношение также легко подсчитываются

$$r = \frac{2n}{(h_* t + n)^2 + 2h_* t - 3n}, \quad \frac{T}{S} = 4 \frac{t^2}{1 - t(h_* t + n)} \quad (7.181)$$

Рассчитаем космологические параметры для эволюции масштабного фактора

$$a = a_s e^{\lambda(t-t_0)^\mu} \quad (7.182)$$

Путем вычислений, аналогичных предыдущим, получаем

$$n_S - 1 = \frac{3\mu + 1}{\mu(t - t_0)^\mu + \mu - 1}, \quad n_G = \frac{2}{1 + \left(\frac{\mu}{\mu-1}\right)(t - t_0)^\mu} \quad (7.183)$$

$$\mathcal{P}_{\mathcal{R}} = \frac{\lambda^3 \mu^3}{8\pi^2 M_p^2} \frac{(t - t_0)^{3\mu-2}}{\mu - 1}, \quad \mathcal{P}_{\mathcal{G}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\mu\lambda}{M_p^2}\right)^2 (t - t_0)^{2\mu-2} \quad (7.184)$$

$$r = \frac{2\lambda t(\mu - 1)}{5\lambda\mu(\mu - 1) + \lambda^2 \mu^2 t^{\mu+1} - \mu + 2}, \quad \frac{T}{S} = \frac{4(\mu - 1)}{\mu\lambda(t - t_0)^\mu}$$

7.14. Различие между параметрами ϵ и γ

Определим различие между параметром медленного скатывания ϵ и инфляционным параметром γ , который является аналогом ϵ для точных решений.

Определим параметр медленного скатывания следующим образом [3]

$$\epsilon = \frac{M_P^2}{2} \left(\frac{V'_\phi}{V} \right) \quad (7.185)$$

Параметр γ , в таком случае, определим из системы уравнений (7.91) – (7.93)

$$\gamma = \frac{M_P^2}{2} \left(\frac{W'_\phi}{W} \right) \quad (7.186)$$

Вычислим их отношение

$$\left[\frac{\gamma(t)}{\epsilon(t)} \right]^{1/2} = \frac{W'_\phi V}{W V'_\phi} = \left(\frac{W'_\phi}{W} \right) \frac{W - \frac{1}{2}\dot{\phi}^2}{W'_\phi - \frac{1}{2}(\dot{\phi}^2)'_\phi} \quad (7.187)$$

Исходя из уравнений эволюции скалярного поля (7.91) – (7.93), это отношение можно переписать в виде

$$\left[\frac{\gamma(t)}{\epsilon(t)} \right]^{1/2} = \left[1 + \frac{1}{3} \frac{\dot{H}}{H^2} \right] \left[1 + \frac{\ddot{H}}{H\dot{H}} \right]^{-1} \quad (7.188)$$

Рассматривая $\gamma = -\dot{H}/H^2$, получаем

$$\frac{1}{3 - \gamma(t)} \left[\frac{\gamma(t)}{\epsilon(t)} \right]^{1/2} = \frac{1}{3} \left[1 + \frac{\ddot{H}}{H\dot{H}} \right]^{-1}, \quad (7.189)$$

Обозначим $f(t) = \frac{1}{3} \left[1 + \frac{\ddot{H}}{H\dot{H}} \right]^{-1}$ и в результате получим выражение для параметра медленного скатывания ϵ через параметр инфляции γ

$$\epsilon(t) = \frac{\gamma(t)}{f^2(t)[3 - \gamma(t)]^2} \quad (7.190)$$

Также можно найти параметр инфляции γ из параметра медленного скатывания ϵ

$$\gamma(t) = \frac{1 + 6\epsilon(t)f^2(t) \pm \sqrt{1 + 12f^2(t)\epsilon(t)}}{2\epsilon(t)f^2(t)} \quad (7.191)$$

Уравнения (7.188), (7.190), (7.191) позволяют найти взаимосвязь между параметром медленного скатывания ϵ и инфляционным параметром γ .

Таким образом, можно перейти от оценок тензорно-скалярного отношения, основанных на приближении медленного скатывания к точному значению и определить различие.

Глава 8.

Построение моделей инфляции

При построении моделей инфляции стоит учитывать, что различные модели дают различные предсказания для спектральных индексов возмущений и наблюдения анизотропии реликтового излучения будут удовлетворять многим из них.

Будем рассматривать инфляцию, обусловленную эволюцией одного самодействующего скалярного поля и рассчитаем основные космологические параметры во время, когда возмущения пересекают радиус Хаббла. В это время $V^{1/4}$ по меньшей мере на два порядка меньше планковских масштабов.

Модели инфляции задаются видом эффективного потенциала V . В этом случае, потенциал $V(\phi)$ управляется скалярным полем ϕ , которое скатывается к минимуму $V(\phi)$. Конец инфляции приводит к нарушению условий медленного скатывания, поле осциллирует около минимума и начинается процесс повторного нагревания инфлатона и образование элементарных частиц.

Измерения спектральных индексов космологических возмущений позволяют определить применимость тех или иных моделей. Значения спектральных индексов обычно связаны с числом e -фолдов инфляции или времен Хаббла.

8.1. Основные уравнения и точные решения

Запишем уравнения динамики скалярного поля в следующей системе единиц $M_P = c = 1$ для случая приближения медленного скатывания

$$3H^2 \simeq V(\phi) \quad (8.1)$$

$$3H\dot{\phi} \simeq -V'_\phi(\phi) \quad (8.2)$$

и для точных решений

$$3H^2 = W(\phi) \quad (8.3)$$

$$3H\dot{\phi} = -W'_\phi(\phi) \quad (8.4)$$

$$\dot{\phi} = -\frac{W'_\phi}{\sqrt{3W}} \quad (8.5)$$

Различие между точными и приближенными решениями, выраженное через число e -фолдов, запишем следующим образом:

$$\Delta_N(\phi) = -\int_{\phi_0}^{\phi} \left(\frac{W}{W'_\phi} - \frac{V}{V'_\phi} \right) d\phi \quad (8.6)$$

Учитывая, $W = V + X$, где $X = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2$ получим

$$\frac{W}{W'_\phi} - \frac{V}{V'_\phi} = \frac{W}{W'_\phi} - \frac{W - X}{W'_\phi - X'_\phi} = \frac{W'_\phi X - W X'_\phi}{W'_\phi(W'_\phi - X'_\phi)} \quad (8.7)$$

Из уравнения (8.5) выразим $X(\phi) = W'_\phi(\phi)/6W(\phi)$ и определим Δ_N

$$\Delta_N(\phi) = - \int_{\phi_0}^{\phi} \frac{2W(W'_\phi{}^2 - W''_\phi W)}{W'_\phi(6W^2 - 2W'_\phi W + W'_\phi{}^2)} d\phi \quad (8.8)$$

$$\Delta_N(t) = \Delta_N(\phi(t)) \quad (8.9)$$

Таким образом, различие числа e -фолдов в случае точных и приближенных решений на выходе из инфляции равно $\Delta_N(\phi = \phi_{end})$, где ϕ_{end} – время завершения инфляционной стадии.

8.2. Модели космологической инфляции

Рассмотрим модели космологической инфляции, которые будем определять посредством суперпотенциала $W = W(\phi)$, а также определим различие между точными и приближенными решениями.

Вначале определим вид потенциала скалярного поля $V(\phi)$, для которого $\Delta_N = 0$, то есть число e -фолдов в случае приближенных и точных решений одинаково.

Суперпотенциал $W(\phi)$ для данного случая определим из условия

$$W'_\phi{}^2 - W''_\phi W = 0 \quad (8.10)$$

В результате получим $W(\phi) = Ae^{\pm B\phi}$, где $A > 0, B > 0$.

Из определения $W = V + X$ и уравнений (8.3), (8.5) найдем вид скалярного поля $\phi(t)$, его потенциал $V(\phi)$ и масштабный фактор $a(t)$.

$$V(\phi) = A \left(1 - \frac{B^2}{6}\right) e^{\pm B\phi} \quad (8.11)$$

$$\phi(t) = \pm \frac{2}{B} \ln \left(1 + \frac{B^2}{6} \sqrt{\frac{A}{3}} t\right) \quad (8.12)$$

$$a(t) = a_0 \left(1 + \frac{B^2}{6} \sqrt{\frac{A}{3}} t\right)^{2/B^2} \quad (8.13)$$

Теперь рассмотрим модель космологической инфляции, задаваемую суперпотенциалом $W(\phi) = A\phi^2$.

Для данной модели

$$\phi(t) - \phi_0 = \pm 2\sqrt{\frac{A}{3}}(t - t_0) \quad (8.14)$$

$$V(\phi) = A\phi^2 - 2\frac{A}{3} \quad (8.15)$$

$$a(t) = a_0 e^{-\frac{A}{3}t^2} \quad (8.16)$$

$$\Delta_N(\phi) = \frac{1}{3} \ln \left(\frac{\phi_0}{\phi} \right) \quad (8.17)$$

Завершение инфляционной стадии определяется условием $\gamma(\phi_{end}) = 1$, где

$$\gamma = -\frac{\dot{H}}{H^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{W'_\phi}{W} \right) \quad (8.18)$$

Отсюда получаем на завершении стадии космологической инфляции $\phi_{end} = 0.5$ (в массах Планка $\phi_{end} = 0.5 M_P$) и, полагая $\phi_0 = 1$, из уравнения (8.8) найдем $\Delta_N(\phi_{end}) = 0.23$.

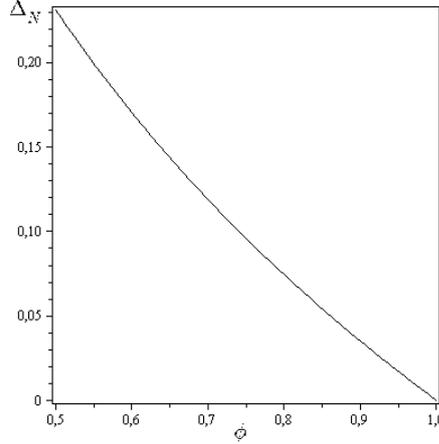


Рис. 8.1. Зависимость различия числа e -фолдов для точных и приближенных решений Δ_N от скалярного поля ϕ для потенциала $V(\phi) = A\phi^2 - 2\frac{A}{3}$.

Теперь рассмотрим модель космологической инфляции, задаваемую суперпотенциалом $W(\phi) = A[\cosh(B\phi) - 1]$.

$$\phi(t) = \frac{-2}{B} \operatorname{arcsinh} \left(\tan \left(\sqrt{\frac{A}{6}} B^2 t \right) \right) \quad (8.19)$$

$$V(\phi) = A (\cosh(B\phi) - 1) - A \frac{B^2}{6} (\cosh(B\phi) + 1) \quad (8.20)$$

$$a(t) = a_0 \cos^{\frac{2}{B^2}} \left(\sqrt{\frac{A}{6}} B^2 t \right) \quad (8.21)$$

$$\Delta_N(\phi) = \frac{2}{B^2 - 6} \ln \left[\frac{\tanh(\frac{B}{2}\phi)}{\tanh(\frac{B}{2}\phi_0)} \right] \quad (8.22)$$

Скалярное поле в начале инфляции $\phi_0 = 2/B$, в конце инфляции:

$$\phi_{end} = \frac{1}{B} \ln \left(\frac{\sqrt{2} + B}{\sqrt{2} - B} \right) \quad (8.23)$$

Учитывая выражения для $\Delta_N(\phi)$, ϕ_0 и ϕ_{end} получаем $-\sqrt{2} < B < \sqrt{2}$. Для $B = 1$ получаем $\phi_0 = \sqrt{2}$, $\phi_{end} = \ln 3$ и $\Delta_N(\phi_{end}) = 0.17$.

8.2.1. Выбор потенциала

Точные решения уравнений динамики скалярного поля также можно получать задавая потенциал. Рассмотрим потенциал скалярного поля вида $\phi = A \ln[\tan(\lambda t)]$.

Выразим производную потенциала по времени $\dot{\phi}$ через потенциал.

$$\dot{\phi} = A\lambda \frac{1 + \tan^2(\lambda t)}{\tan(\lambda t)} = A\lambda \cosh\left(\frac{\phi}{A}\right) \quad (8.24)$$

Из уравнения (8.5) найдем суперпотенциал

$$W(\phi) = \frac{3A^2\lambda^2}{4} \sinh^2\left(\frac{\phi}{A}\right) \quad (8.25)$$

Далее определим потенциал скалярного поля и $\Delta_N(\phi)$

$$V(\phi) = \frac{3A^2\lambda^2}{4} \sinh^2\left(\frac{\phi}{A}\right) - \frac{A^2\lambda^2}{2} \cosh^2\left(\frac{\phi}{A}\right) \quad (8.26)$$

$$\Delta_N(\phi) = \frac{A^2}{3A^2 - 2} \ln \left[\frac{\tanh\left(\frac{\phi}{A}\right)}{\tanh\left(\frac{\phi_0}{A}\right)} \right] \quad (8.27)$$

Запишем $\phi_0 = A$, $\phi_{end} = \frac{A}{2} \ln\left(\frac{1+A}{A-1}\right)$. Задавая $A = 1/2$, получим $\Delta_N(\phi_{end}) = 0.05$.

8.2.2. Сопоставление с космологическими параметрами

Рассмотрим отношение квадратов амплитуд тензорных и скалярных возмущений (T/S) в контексте точных и приближенных решений уравнений динамики скалярного поля. Для этого вновь определим число хаббловских времен.

Число e -фолдов в случае приближения медленного скатывания N_{sr} :

$$N_{sr} = - \int \frac{d\phi}{\sqrt{2\epsilon}} \quad (8.28)$$

$$\epsilon = - \frac{\dot{H}_{sr}}{H_{sr}^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{V'_\phi}{V} \right)^2 \quad (8.29)$$

для точных решений N_{ex}

$$N_{ex} = - \int \frac{d\phi}{\sqrt{2\gamma}} \quad (8.30)$$

$$\gamma = - \frac{\dot{H}_{ex}}{H_{ex}^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{W'_\phi}{W} \right)^2 \quad (8.31)$$

где H_{sr} – параметр Хаббла, полученный из приближения медленного скатывания, H_{ex} – параметр Хаббла в случае точных решений.

Из уравнений (8.28) и (8.31) получим

$$dN_{ex}\sqrt{\gamma} = dN_{sr}\sqrt{\epsilon} = (dN_{ex} - d\Delta_N)\sqrt{\epsilon} \quad (8.32)$$

Таким образом

$$\frac{d\Delta_N}{dN_{ex}} = 1 - \frac{\sqrt{\gamma}}{\sqrt{\epsilon}} \quad (8.33)$$

Используя уравнения (8.29) – (8.31) (в выбранной системе единиц $M_P = 1$) и (8.8) запишем

$$\frac{\gamma}{\epsilon} = \left[1 + \frac{2(W''_\phi W - W'^2_\phi)}{(6W^2 - 2W'_\phi W + W'^2_\phi)} \right]^2 \quad (8.34)$$

Учитывая, что $T/S = -4\dot{H}/H^2$, окончательно получаем

$$\frac{(T/S)_{ex}}{(T/S)_{sr}} = \left[1 + \frac{2(W''_\phi W - W'^2_\phi)}{6W^2 - 2W'_\phi W + W'^2_\phi} \right]^2 \quad (8.35)$$

Тензорно-скалярное отношение в случае точных решений увеличивается при условии $W''_\phi W - W'^2_\phi > 0$.

Ограничение на значение γ дают косвенные оценки отношения квадратов амплитуд тензорной и скалярной мод возмущений $(T/S) = 4\gamma$ на основе наблюдений анизотропии реликтового излучения. Они составляют $\gamma < 0.027$.

8.3. Скалярные поля в конформно-плоских пространствах

Запишем метрику пространственно плоской Вселенной Фрийдмана–Робертсона–Уокера

$$ds^2 = a^2(\eta)[-d\eta^2 + (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2] \quad (8.36)$$

Уравнения динамики скалярного поля

$$3H^2 = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V \quad (8.37)$$

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + \frac{dV}{d\phi} = 0 \quad (8.38)$$

$$\dot{H} = -\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 \quad (8.39)$$

в терминах конформного времени ($d\eta = dt/a$) записываются следующим образом

$$3\mathcal{H}^2 = \frac{1}{2}\phi'^2 + a^2V(\phi) \quad (8.40)$$

$$\phi'' + 2\mathcal{H}\phi' + a^2\frac{dV(\phi)}{d\phi} = 0 \quad (8.41)$$

$$\mathcal{H}' - \mathcal{H}^2 = -\frac{1}{2}\phi'^2 \quad (8.42)$$

Здесь и далее штрих означает производную по конформному времени.

Из уравнения (8.42) получим

$$\mathcal{H}' - \mathcal{H}^2 = \frac{a''}{a} - \left(\frac{a'}{a}\right)^2 - \left(\frac{a'}{a}\right)^2 = \frac{a''}{a} - 2\left(\frac{a'}{a}\right)^2 \quad (8.43)$$

$$\frac{1}{2}\phi'^2 = -\frac{a''}{a} + 2\left(\frac{a'}{a}\right)^2 \quad (8.44)$$

Подставим (8.44) в уравнение (8.40) и запишем

$$3\left(\frac{a'}{a}\right)^2 = -\frac{a''}{a} + 2\left(\frac{a'}{a}\right)^2 + a^2V(\phi) \quad (8.45)$$

$$V(\phi(\eta)) = \frac{a''}{a^3} + \frac{a'^2}{a^4} \quad (8.46)$$

Класс метрик Фрийдмана–Робертсона–Уокера принадлежит к классу конформно-плоских пространств, поэтому рассмотрим пространства с линейным элементом

$$ds^2 = A(x^3, x^4)[-(dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2 + (dx^4)^2] \quad (8.47)$$

В силу того, что космологическое скалярное поле зависит только от времени и не зависит от пространственных координат $\phi = \phi(\eta)$, имеем

$$ds^2 = A(\eta)[d\eta^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2], \quad (8.48)$$

то есть конформный множитель $A(\eta)$ записывается через масштабный фактор $A(\eta) = -a^2(\eta)$.

Подставив в уравнения (8.44) и (8.46) соотношение $a(\eta) = \sqrt{-A(\eta)}$, получим выражения для потенциала и скалярного поля через конформный множитель

$$V(\phi(\eta)) = -\frac{A''}{2A^2} \quad (8.49)$$

$$(\phi')^2 = -\frac{A''}{A} + \frac{3}{2}\left(\frac{A'}{A}\right)^2 \quad (8.50)$$

Для удобства вычислений рассмотрим метрику (8.48) с сигнатурой $(-, +, +, +)$, что означает замену $A(\eta)$ на $-A(\eta)$. В таком случае, $A(\eta) = a^2(\eta)$, метрика

$$ds^2 = A(\eta)[-d\eta^2 + (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2] \quad (8.51)$$

и выражения (8.49) – (8.50) записываются в следующем виде

$$V(\phi(\eta)) = \frac{A''}{2A^2} \quad (8.52)$$

$$(\phi')^2 = -\frac{A''}{A} + \frac{3}{2}\left(\frac{A'}{A}\right)^2 \quad (8.53)$$

$$\mathcal{H} = \frac{A'}{2A}, \quad (8.54)$$

что позволяет получать точные решения уравнений динамики скалярного поля, задавая $A(\eta)$.

8.3.1. Космологические параметры

Опираясь на результаты, полученные в работах [7, 27], запишем точные значения космологических параметров на пересечении Хаббловского радиуса ($k = aH = \mathcal{H}$) через конформный множитель, учитывая, что

$$d\eta = \frac{dt}{a}, \mathcal{H} = \frac{a'}{a}, H = \frac{\mathcal{H}}{a}, \dot{H} = \frac{\mathcal{H}'}{a^2} - \frac{\mathcal{H}^2}{a^2} \quad (8.55)$$

В результате получим:

- спектры мощности скалярных и тензорных возмущений

$$\mathcal{P}_{\mathcal{R}}(k) = -\frac{\mathcal{H}^4 a^2}{8(\mathcal{H}' - \mathcal{H}^2)} = \frac{A^4}{32\pi^2 A^3 (3A'^2 - 2A''A)} \quad (8.56)$$

$$\mathcal{P}_{\mathcal{G}}(k) = \frac{\mathcal{H}^2}{2\pi^2 a^2} = \frac{A^2}{8\pi^2 A^3} \quad (8.57)$$

- спектральные индексы скалярных и тензорных возмущений

$$\begin{aligned} n_S(k) - 1 &= \frac{a^2}{\mathcal{H}'} \left[4 \left(\frac{\mathcal{H}' - \mathcal{H}^2}{a^2} \right) - \frac{\mathcal{H}}{\mathcal{H}' - \mathcal{H}^2} \left(\frac{\mathcal{H}' - \mathcal{H}^2}{a^2} \right)' \right] \\ &= \frac{9A'^4 + 8A''^2 A^2 - 14A'' A'^2 A - 2A''' A' A^2}{(2A'' A - 3A'^2)(A'' A - A'^2)} \end{aligned} \quad (8.58)$$

$$n_G(k) = \frac{2(\mathcal{H}' - \mathcal{H}^2)}{\mathcal{H}'} = \frac{2A'' A - 3A'^2}{A'' A - A'^2} \quad (8.59)$$

- тензорно-скалярное отношение

$$\frac{T}{S} = -4 \left(\frac{\mathcal{H}' - \mathcal{H}^2}{\mathcal{H}^2} \right) = \frac{12A'^2 - 8A'' A}{A'^2} \quad (8.60)$$

Конформное время, при расчете космологических параметров, является временем пересечения радиуса Хаббла.

8.3.2. Космологические модели

Рассмотрим конформный множитель $A(\eta) = A_0 e^{\beta(\eta)}$.

Из выражений (8.52) – (8.54) получим точные решения уравнений динамики скалярного поля

$$V(\phi(\eta)) = \frac{e^{-\beta(\eta)}}{2A_0} [\beta''(\eta) + \beta'^2(\eta)] \quad (8.61)$$

$$\phi(\eta) = \pm \int \sqrt{\frac{\beta'^2(\eta)}{2} - \beta''(\eta)} d\eta + \phi_0 \quad (8.62)$$

$$\mathcal{H}(\eta) = \frac{\beta'(\eta)}{2} \quad (8.63)$$

$$a(\eta) = \sqrt{A_0} e^{\beta(\eta)/2} \quad (8.64)$$

Рассчитаем по формулам (8.56) – (8.60) основные космологические параметры для выбранного конформного множителя на пересечении радиуса Хаббла

$$\mathcal{P}_{\mathcal{R}}(k) = \frac{\beta'^4}{32\pi^2 A_0 e^{\beta} (\beta'^2 - 2\beta'')} \quad (8.65)$$

$$\mathcal{P}_{\mathcal{G}}(k) = \frac{\beta'^2}{8\pi^2 A_0 e^{\beta}} \quad (8.66)$$

$$n_S(k) - 1 = \frac{\beta'^4 + 8\beta''^2 - 4\beta''\beta'^2 - 2\beta''' \beta'}{\beta''(2\beta'' - \beta'^2)} \quad (8.67)$$

$$n_{\mathcal{G}}(k) = \frac{2\beta'' - \beta'^2}{\beta''} \quad (8.68)$$

$$\frac{T}{S} = \frac{4\beta'^2 - 8\beta''}{\beta'^2} \quad (8.69)$$

Таким образом, задавая функцию $\beta = \beta(\eta)$, получим точные решения для конкретных космологических моделей.

Конформное время пересечения радиуса Хаббла η_H для возмущений заданной длины волны (волнового числа) определим из условия $k = \mathcal{H}$, что эквивалентно условию $2k = \beta'(\eta)|_{\eta=\eta_H}$ для рассматриваемого конформного множителя.

8.3.3. Степенная инфляция

Запишем конформный множитель в виде $A(\eta) = A_0 e^{m \ln(\alpha\eta)} = A_0 (\alpha\eta)^m$, $\beta(\eta) = m \ln(\alpha\eta)$.

Из уравнений (8.61) – (8.64) получим

$$\phi(\eta) = \pm \sqrt{\frac{m(m+2)}{2}} \ln(\alpha\eta) + \phi_0 \quad (8.70)$$

$$\eta = \frac{1}{\alpha} e^{\pm \sqrt{\frac{2}{m(m+2)}} (\phi - \phi_0)} \quad (8.71)$$

$$V(\phi) = \frac{m(m-2)}{4A_0} e^{\mp \sqrt{\frac{2(m+2)}{m}} (\phi - \phi_0)} \quad (8.72)$$

$$a(\eta) = \sqrt{A_0} \alpha^{m/2} \eta^{m/2} = \tilde{a}_0 \eta^{m/2} \quad (8.73)$$

Рассчитаем космологические параметры для данной модели

$$\mathcal{P}_{\mathcal{R}}(k) = \frac{m^3 (\alpha\eta_H)^{-m}}{32\pi^2 A_0 \eta_H^2 (m+2)} \quad (8.74)$$

$$\mathcal{P}_{\mathcal{G}}(k) = \frac{m^2 (\alpha\eta_H)^{-m}}{8\pi^2 A_0 \eta_H^2} \quad (8.75)$$

$$n_S(k) - 1 = m + 2 \quad (8.76)$$

$$n_{\mathcal{G}}(k) = m + 2 \quad (8.77)$$

$$\frac{T}{S} = \frac{4(m+2)}{m}, \quad (8.78)$$

где конформное время пересечения радиуса Хаббла $\eta_H = m/2k$.

Для соответствия полученных космологических параметров наблюдаемым должно выполняться условие $-2,04 < m < -2$ [90].

8.3.4. Экспоненциальная зависимость масштабного фактора

Рассмотрим конформный множитель $A(\eta) = A_0 e^{\beta(\eta)}$, где $\beta(\eta) = \frac{c_1}{2}\eta^2 + c_2\eta + c_3$.
Решения () запишем в виде:

$$V(\phi(\eta)) = \frac{e^{-\beta}}{2A_0} [c_1 + (c_1\eta + c_2)^2] \quad (8.79)$$

$$\phi(\eta) = \pm \frac{\sqrt{2}}{c_1} \left[\frac{\tilde{\eta}}{2} \sqrt{\tilde{\eta}^2 - c_1} - \frac{c_1}{2} \ln |\tilde{\eta} + \sqrt{\tilde{\eta}^2 - c_1}| \right], \quad (8.80)$$

где $\tilde{\eta} = \frac{c_1\eta + c_2}{\sqrt{2}}$.

Определим масштабный фактор

$$a(\eta) = \sqrt{A_0} e^{\frac{c_1}{4}\eta^2 + \frac{c_2}{2}\eta + \frac{c_3}{2}} \quad (8.81)$$

и параметры космологических возмущений

$$\mathcal{P}_{\mathcal{R}}(k) = \frac{(c_1\eta_H + c_2)^4}{32\pi^2 A_0 (c_1^2\eta_H^2 + 2c_1^2c_2\eta_H + c_2^2 - 2c_1)} e^{-(\frac{c_1}{2}\eta_H^2 + c_2\eta_H + c_3)} \quad (8.82)$$

$$\mathcal{P}_{\mathcal{G}}(k) = \frac{(c_1\eta_H + c_2)^2}{8\pi^2 A_0} e^{-(\frac{c_1}{2}\eta_H^2 + c_2\eta_H + c_3)} \quad (8.83)$$

$$n_S(k) - 1 = \frac{4c_1^3\eta_H^2 + 8c_1^2c_2\eta_H + 4c_1c_2^2}{c_1(c_1^2\eta_H^2 + 2c_1^2c_2\eta_H + c_2^2 - 2c_1)} - \frac{4c_1^3c_2\eta_H^3 + 6c_1^2c_2^2\eta_H^2 + 4c_1c_2^3\eta_H + c_1^4\eta_H^4 + c_2^4 + 8c_1^2}{c_1(c_1^2\eta_H^2 + 2c_1^2c_2\eta_H + c_2^2 - 2c_1)} \quad (8.84)$$

$$n_{\mathcal{G}}(k) = -c_1\eta_H^2 - 2c_2\eta_H - \frac{c_2^2}{c_1} + 2 \quad (8.85)$$

$$\frac{T}{S} = 4 \frac{c_1^2\eta_H^2 + 2c_1^2c_2\eta_H + c_2^2 - 2c_1}{(c_1\eta_H + c_2)^2}, \quad (8.86)$$

где $\eta_H = \frac{c_2 - 2k}{c_1}$.

Для функции $\beta(\eta) = \frac{b_1}{12}\eta^4 + b_3$ получим

$$V(\phi(\eta)) = \frac{e^{-\beta}}{2A_0} \left(b_1\eta^2 + \frac{b_1^2}{9}\eta^6 \right) \quad (8.87)$$

$$\phi(\eta) = \pm \frac{3}{2\sqrt{2}b_1} \left[\frac{\tilde{\eta}}{2} \sqrt{\tilde{\eta}^2 - b_1} - \frac{b_1}{2} \ln |\tilde{\eta} + \sqrt{\tilde{\eta}^2 - b_1}| \right], \quad (8.88)$$

$$a(\eta) = \sqrt{A_0} e^{\frac{b_1}{24}\eta^4 + \frac{b_3}{2}} \quad (8.89)$$

где $\tilde{\eta} = \frac{b_1\eta^2}{3}$.

Космологические параметры для этой модели инфляции

$$\mathcal{P}_{\mathcal{R}}(k) = \frac{b_1^3\eta_H^{10}}{288\pi^2 A_0 (b_1\eta_H^4 - 18)} e^{-(\frac{b_1}{12}\eta_H^4 + b_3)} \quad (8.90)$$

$$\mathcal{P}_{\mathcal{G}}(k) = \frac{b_1^2 \eta_H^6}{72\pi^2 A_0} e^{-(\frac{b_1}{12} \eta_H^4 + b_3)} \quad (8.91)$$

$$n_S(k) - 1 = \frac{540 - 38b_1 \eta_H^4 + b_1^2 \eta_H^8}{9(b_1 \eta_H^4 - 18)} \quad (8.92)$$

$$n_{\mathcal{G}}(k) = 2 - \frac{b_1}{9} \eta_H^4 \quad (8.93)$$

$$\frac{T}{S} = 4 \frac{b_1 \eta_H^4 - 18}{b_1 \eta_H^4}, \quad (8.94)$$

где $\eta_H = (6k/b_1)^{1/3}$.

8.4. Тензорно-скалярное отношение в различных моделях инфляции

Сравнение параметров γ и ϵ приводит к зависимости (8.35), определяющей тензорно-скалярное отношение в случае точных решений ($T/S = 4\gamma$) и приближения медленного скатывания ($T/S = 4\epsilon$). Причем, ввиду того, что инфляционный параметр γ не ограничен условием $|\gamma| \ll 1$ (что, по сути, ограничивает форму потенциала), (T/S) может иметь достаточно большие значения. В связи с этим возникает проблема построения инфляционных моделей с большим отношением квадратов амплитуд тензорных и скалярных мод возмущений.

Аргументы против теорий с большим тензорно-скалярным отношением основаны на том условии, что амплитуда тензорных возмущений может быть большой только когда инфляция происходит при $\phi \geq M_P$ [62, 63]. То есть инфляция должна происходить в больших энергетических масштабах.

Рассмотрим оценки тензорно-скалярного отношения для следующих моделей инфляции [64]:

- Степенная инфляцию, характеризующуюся потенциалом $V(\phi) = V_0 e^{\phi/\mu}$. Значение тензорно-скалярного отношения T/S (в статье обозначено r) составляет $T/S = 0.16 \pm 0.04$;

- Хаотическая инфляцию с потенциалом $V(\phi) = V_0 \left(\frac{\phi}{\mu}\right)^p$. Для $p = 8$ тензорно-скалярное отношение $T/S = 0.14 \pm 0.07$;

- Модель инфляции Колемана-Вайнберга, основанной на квадратичном потенциале $V(\phi) = V_0 \phi^4 \ln(\phi^2/M_*^2)$, где $M_* \sim M_P$ – нормировочная масса. Здесь $T/S = 0.052_{-0.026}^{+0.013}$;

- Модель спонтанного нарушения симметрии с потенциалом $V = V_0 [1 - (\phi/\nu)^2]^2$. Тензорно-скалярное отношение составляет $T/S = 0.042_{-0.014}^{+0.010}$.

Видно, что различные модели космологической инфляции предсказывают различные значения тензорно-скалярного отношения. Вклад тензорных возмущений в анизотропию реликтового излучения также может варьироваться посредством введения в лагранжиан нетривиальной кинетической части [78, 79].

8.5. Модели с нетривиальной кинетической частью

Действие, описывающее скалярное поле, взаимодействующее с гравитационным

$$S = S_g + S_\phi = \int d^4x \sqrt{-g} \left(\frac{R}{2} + p(\phi, X) \right), \quad (8.95)$$

где R – скаляр Риччи и $p(\phi, X)$ – функция скалярного поля ϕ , $X = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2$.

В случае обычного скалярного поля зависимость X от p тривиальна, именно $p = X + V(\phi)$, в то время как k -инфляция основана на нетривиальной зависимости p от X . Вариация действия дает тензор энергии-импульса для скалярного поля в форме тензора энергии-импульса идеальной жидкости

$$T_\nu^\mu = (\rho + p)u^\mu u_\nu + p\delta_\nu^\mu \quad (8.96)$$

Здесь лагранжиан играет роль давления, а плотность энергии равна

$$\rho = 2Xp_{,X} + p, \quad (8.97)$$

где $p_{,X} = \partial p / \partial X$.

Изменение масштабного фактора $a(t)$ описывается уравнением

$$3H^2 = \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = \rho \quad (8.98)$$

В случае однородного скалярного поля закон сохранения энергии записывается в виде

$$\dot{\rho} = -3H(\rho + p), \quad (8.99)$$

В результате получим уравнения динамики скалярного поля для рассматриваемой модели инфляции с нетривиальной кинетической частью [82]

$$3H^2 = p(X) + Xp_{,X} \quad (8.100)$$

$$\dot{H} = -\frac{1}{2}Xp_{,X} \quad (8.101)$$

$$\ddot{\phi} + 3Hp_{,X}\dot{\phi} + V'_\phi = 0 \quad (8.102)$$

Также определим скорость распространения космологических возмущений через лагранжиан [78]

$$c_S^2 = \frac{p_{,X}}{\rho_{,X}} = \left[1 + 2X \frac{p_{,XX}}{p_{,X}} \right]^{-1} \quad (8.103)$$

В инфляционных моделях медленного скатывания скорость распространения космологических возмущений $c_S = 1$.

8.5.1. Обобщение инфляционных моделей медленного скатывания

Из уравнения (8.97) следует, что инфляция может происходить, если условие $p \gg p_{,X}$ соблюдается достаточно долгое время. Это может быть достигнуто двумя путями. Рассматривая скалярное поле с $p = X - V(\phi)$, можно выбрать плоский потенциал $V(\phi)$, такой, что $X \ll V$ более чем для 75 e -фолдов, что является условиями инфляции медленного скатывания.

Другую возможность предоставляет k -инфляция, где p – функция X , такая, что $p_{,X}$ мало. Здесь инфляция полностью основана на кинетической части и может происходить даже если поле эволюционирует очень быстро (X велико). Для k -инфляции $c_S^2 \ll 1$ [82].

Рассмотрим эволюцию скалярного поля в режиме медленного скатывания с плоским потенциалом, но нетривиальной кинетической частью. В таких моделях допускается $c_S^2 > 1$ в течение инфляции и, таким образом, тензорно-скалярное отношение увеличивается.

Лагранжиан $p(\phi, X)$ лоренц-инвариантный и скорость космологических возмущений, превышающая световую, не противоречит принципу относительности. Фактически, сверхсветовое распространение космологических возмущений возможно только в присутствии однородного скалярного поля, которое определяет предпочтительные временные рамки. Только в этих рамках скорость распространения возмущений может превышать скорость света.

Рассмотрим модели космологической инфляции с лагранжианом

$$p = K(X) + V(\phi) \quad (8.104)$$

В этом случае

$$\rho = 2XK_{,X} + K(X) + V(\phi), \quad (8.105)$$

Условия медленного скатывания

$$XK_{,X} \ll V, \quad K \ll V, \quad |\ddot{\phi}| \ll \frac{V_{,\phi}}{\rho_{,X}} \quad (8.106)$$

сохраняются по крайней мере для 75 e -фолдов, так что для потенциала $V(\phi)$ происходит обычный режим медленного скатывания.

Например, для кинетической части лагранжиана

$$K(X) = \alpha X^\beta \quad (8.107)$$

получаем скорость распространения возмущений скалярного поля

$$c_S^2 = 1/(2\beta - 1) \quad (8.108)$$

Следовательно, посредством рассмотрения нетривиальной кинетической части $K(X)$, можно получить произвольную скорость c_S , которая становится свободным параметром теории.

Тензорно-скалярное отношение можно определить следующим образом [78]

$$\frac{T}{S} \simeq 27 \left(c_S \left(1 + \frac{p}{\varepsilon} \right) \right)_{k=aH} \quad (8.109)$$

В соотношении (8.109) все величины вычисляются в тот момент, когда возмущения с волновым числом k пересекают радиус Хаббла $k = aH$. Амплитуда скалярных возмущений является свободным параметром теории и может быть взята из наблюдений. Следовательно, в моделях, в которых $c_S > 1$ масштабы энергий должны быть выше, чем в инфляции медленного скатывания.

8.5.2. Построение модели

Вначале получим точные решения уравнений (8.100) – (8.102) в терминах конформного множителя $A(\eta)$ в пространстве (8.51).

Запишем уравнения (8.100) – (8.101) через конформное время

$$3\frac{\mathcal{H}^2}{a^2} = p(X) + Xp_{,X} \quad (8.110)$$

$$\frac{\mathcal{H}' - \mathcal{H}^2}{a^2} = -\frac{1}{2}Xp_{,X} \quad (8.111)$$

Подставляя правую часть уравнения (8.111) в уравнение (8.110), с учетом $a^2(\eta) = A(\eta)$, получим

$$p(X) = K(X) + V(\phi) = -\frac{A'^2}{4A^3} + \frac{A''}{2A^2} \quad (8.112)$$

Таким образом, для построения инфляционного сценария необходимо задать конформный множитель $A(\eta)$ и кинетическую часть лагранжиана $K(X)$

$$V(\phi(\eta)) = \frac{A''}{2A^2} \quad (8.113)$$

$$K(X) = -\frac{A'^2}{4A^3} \quad (8.114)$$

Рассмотрим лагранжиан [89]

$$p(\phi, X) = \frac{1}{\alpha} [1 - e^{-\alpha X}] + V(\phi), \quad (8.115)$$

где α – некоторая постоянная.

Вычислим $p_{,X}$ и $p_{,XX}$.

$$p_{,X} = e^{-\alpha X}, p_{,XX} = -\alpha e^{-\alpha X} \quad (8.116)$$

Таким образом, скорость распространения космологических возмущений

$$c_S^2 = \left[1 + 2X \frac{p_{,XX}}{p_{,X}} \right]^{-1} = \frac{1}{1 - 2\alpha X} \quad (8.117)$$

Видно, что в предельном случае $X \rightarrow 0$ скорость распространения возмущений c_S равна скорости света.

Из уравнения (8.114) получим

$$X = -\frac{1}{\alpha} \ln \left(1 + \frac{\alpha A'^2}{4A^3} \right) \quad (8.118)$$

$$(\phi')^2 = -\frac{2A}{\alpha} \ln \left(1 + \frac{\alpha A'^2}{4A^3} \right) \quad (8.119)$$

Скорость распространения возмущений

$$c_S = \left[1 + 2 \ln \left(1 + \frac{\alpha A'^2}{4A^3} \right) \right]^{-1/2} \quad (8.120)$$

Для $A(\eta) < 0$ скорость распространения возмущений $c_S > 1$.

В случае конформного множителя вида $A = A_0 e^{\beta(\eta)}$ скорость распространения космологических возмущений в моделях с нетривиальной кинетической частью будет записываться следующим образом

$$c_S = \left[1 + 2 \ln \left(1 + \frac{\alpha(\beta'(\eta))^2}{4A_0} e^{-\beta(\eta)} \right) \right]^{-1/2} \quad (8.121)$$

Посредством выбора $\beta(\eta)$ можно определять характерное изменение тензорно-скалярного отношения.

Увеличение тензорно-скалярного отношения приводит к большей B -компоненте поляризации реликтового излучения. Другим важным следствием таких моделей является более высокие энергии инфляции и, таким образом, более высокая температура повторного нагревания чем в случае инфляции медленного скатывания.

8.6. Ограничения на значения параметров гравитационных волн

Ограничение на значение амплитуды тензорных возмущений определяется верхним пределом тензорно-скалярного отношения, следующим из наблюдений анизотропии реликтового излучения $(T/S) < 0.11$ [90].

Частота и плотность энергии реликтовых гравитационных волн ограничивается условиями [91]:

• Значение плотности энергии реликтовых гравитационных волн $\Omega_{GW} = k^2 \mathcal{P}_G(k)/12H_0^2$, которые могут повлиять на темп первичного нуклеосинтеза, не должно превышать

$$\int_{f_0}^{\infty} \Omega_{GW} d \ln f < 1, 1 \cdot 10^{-5}, \quad (8.122)$$

где H_0 – параметр Хаббла в эпоху наблюдения, $f_0 \approx 10^{-9}$ Гц.

• Значение температуры скалярного поля T_* и частоты гравитационных волн f на пересечении горизонта событий:

$$T_* = 5,85 \cdot 10^6 \left(\frac{f}{\text{Гц}} \right) \left(\frac{g_*}{106,75} \right)^{1/6} \text{ ГэВ} \quad (8.123)$$

$$f = 1,71 \cdot 10^{-7} \left(\frac{T_*}{\text{ГэВ}} \right) \left(\frac{g_*}{106,75} \right)^{-1/6} \text{ Гц} \quad (8.124)$$

где g_* – эффективное число степеней свободы (в Стандартной модели $g_* = 106,75$).

Литература

- [1] A.A. Starobinskiy, Phys. Lett. **1**, 24; A. H. Guth, Phys. Rev. **D 23**, p.347, A.D. Linde, Phys. Lett. **B 108**, p.389; A. Albrecht. P.J. Steinhardt, Phys. Rev. Lett. **17**, p.1220.
- [2] A.A. Starobinsky, JETP Lett. **30**, p.682.
- [3] A. R. Liddle and D. H. Lyth. *Cosmological Inflation and Large-Scale Structure*// Cambridge University Press, 2000. - 412p.
- [4] A.D. Linde, *Chaotic inflation*// Phys. Lett., **B 129**, p.177.
- [5] A.D. Linde, *A New Inflationary Universe Scenario: A Possible Solution Of The Horizon, Flatness, Homogeneity, Isotropy And Primordial Monopole Problems*// Phys. Lett., **B 108**, p.389.
- [6] S.V. Chervon, Gen. Relat. Grav., **7**, p.1547.
- [7] S.V. Chervon, M. Novello and R. Triay, *Exact Cosmology and Specification of an Inflationary Scenario*// Gravitation and Cosmology, **11**, No.4, p.329.
- [8] Robert H. Brandenberger, *Lectures on the theory of cosmological perturbations*, Lect. Notes Phys., **646**, p.127.
- [9] Е.М. Лифшиц, ЖЭТФ, том **16**, с.587.
- [10] Е.М. Лифшиц, И.М. Халатников, ЖЭТФ, том **39**, с.149.
- [11] V. F. Mukhanov, H. A. Feldman, and R. H. Brandenberger, *Theory of cosmological perturbations*, Phys. Rept. **215**, p.203.
- [12] H. Kodama and M. Sasaki, *Cosmological Perturbations Theory*// Prog. Theor. Phys. Suppl. **78**, p.1
- [13] M. Sasaki, *Large Scale Quantum Fluctuations in the Inflationary Universe*// Prog. Theor. Phys. **76**, p.1036.
- [14] В.Н. Лукаш, *О соотношении тензорной и скалярной мод возмущений в космологии Фридмана*// УФН, том **176**, No.1, с.113.
- [15] М.В. Сажин, *Анизотропия и поляризация реликтового излучения. Последние данные*// УФН, том **174**, No.2, с.197.
- [16] R.K. Sachs and A.M. Wolfe, Astrophys. J. **147**, p.73.

- [17] П.Д. Насельский, Д.И. Новиков, И.Д. Новиков, *Реликтовое излучение Вселенной*//М.:Наука, 2003.-390с.
- [18] Л.П. Грищук, *ЖЭТФ*, том **67**, С.825.
- [19] А.А. Старобинский, *Письма в ЖЭТФ*. том **30**, С.719.
- [20] D. Polarski, A.A. Starobinsky, *Phys. Rev.*,**50**, p.6123.
- [21] M. Zaldarriaga, D. Narari, *Phis.Rev.*, **52**, P.3276
- [22] L.Kofman, A.Linde and A. Starobinsky, *Phis. Rev.***56**, p.3258.
- [23] А.Д. Линде, *Физика элементарных частиц и инфляционная космология*//М.:Наука, 2003.-278с.
- [24] N. Straumann, *From primordial quantum fluctuations to the anisotropies of the cosmic microwave background radiation*// *Ann. Phys.(Leipzig)*,**15**, No. 10-11, p.701.
- [25] S.V. Chervon, *Gravitation and Cosmology* **3**, p.151.
- [26] В.М. Журавлев, С.В. Червон, *ЖЭТФ*, т.118, с.259.
- [27] S.V. Chervon, I.V. Fomin, *About the calculation of cosmological parameters in exact models of inflation*// *Gravitation and Cosmology*, **14**, No. 2, p.163.
- [28] A.Riotto, *Inflation and the Theory of Cosmological Perturbations*// Lectures delivered at the "ICTP Summer School on Astroparticle Physics and Cosmology 2002
- [29] С.В. Червон. *Нелинейные поля в теории гравитации и космологии*//"Ульяновский государственный университет – Средне-Волжский Научный Центр 1997.-191с.
- [30] S.V. Chervon , V.M. Zhuravlev and V.K. Shchigolev, *Phys.Let.*, **В 398**, p.269.
- [31] G.F.R. Ellis and M.S. Madsen, *Clas. Quantum Grav.*, **8**, p.667.
- [32] J.D. Barrow, *Phys. Rev.*, **D49**, p.3055.
- [33] R. Maartens, D.R. Taylor and N. Roussos, *Phys. Rev.*, **D 52**, p.3358.
- [34] J.D. Barrow, P. Saich, *Class.Quantum Grav.*,**10**, p.279.
- [35] J.D. Barrow, P. Parsons, *Phis. Rev.*, **D 52**, p.5576.
- [36] P. Parsons, J.D. Barrow, *Phis. Rev.*, **D 51**, p.6757.
- [37] P.J. Steinhardt, M.S. Turner, *Phis. Rev.*, **D 29**, p.2162.
- [38] E.D. Stewart, *The spectrum of density perturbations produced during inflation to leading order in a general slow-roll approximation*// *Phys.Rev.*, **D 65**, p.103508.
- [39] P. Binetruy, M.K. Gaillard, *Phys.Rev.*,**D 34**, p.3069.

- [40] C.A. Terrero-Escalante, *Tensor to scalar ratio of perturbations amplitudes and inflation dynamics*, Phys.Lett. **B 563**, p.15.
- [41] D.J. Schwarz, C.A. Terrero-Escalante and A.A.Garsia, Phys.Lett. **B 517**, p.243.
- [42] И.В. Фомин, С.В. Червон, *Отношение спектральных индексов космологических возмущений в случае точных и приближенных решений*// 13-я Российская гравитационная конференция, RUSGRAV-13, С.125., 2008
- [43] И.В. Фомин, *Погрешность приближения медленного скатывания на инфляционной стадии эволюции Вселенной*// Российская летняя школа-семинар "Современные теоретические проблемы гравитации и космологии". Труды семинара, С.166, 2008
- [44] И.В. Фомин, С.В. Червон, *Соотношения тензорной и скалярной мод возмущений в точных моделях космологической инфляции*// Российская летняя школа-семинар "Современные теоретические проблемы гравитации и космологии". Труды семинара, С.168-170, 2008
- [45] E.J. Copeland, M.Sami, S.Tsujikawa, Int. J. Mod. Phys. **D 15**, p.1753.
- [46] B. Ratra, P. J. E. Peebles, Phys. Rev., **D 37**, p.3406.
- [47] A. R. Liddle, L. A. Urena-Lopez, Phys. Rev. Lett., **97**, p.161301.
- [48] James M. Bardeen, *Gauge invariant cosmological perturbations*// Phys. Rev., **D22**, p.1882.
- [49] D.J. Fixsen et. al., *The cosmic microwave background spectrum from the full COBE/FIRAS data set*// Astrophysical Journal, **436**, p.576.
- [50] K.M. Gorski et al., *Power spectrum of primordial inhomogeneity determined from the 4-year coBE dmr sky maps*// Astrophysical Journal, **464**, p.11.
- [51] F.Lucchin and S.Mattarrese, *Power law inflation*// Phys. Rev., **D32**, p.1316.
- [52] L. P. Chimento, A. S. Jakubi, Int. J. Mod. Phys. **D5**, p.71.
- [53] F. Cannata, A. Y. Kamenschchik and D. Regoli, *Scalar field cosmological models with finite scale factor singularities*// Phys. Lett., **B670**, p.241.
- [54] B. Mielnik, M. A. Reyes, J. Phys. **A29**, p.6009.
- [55] B. Gumjudpai, *Scalar field exact solutions for non-flat FLRW cosmology with barotropic fluid: A novel technique from non-linear Schrödinger-type formulation*// Gen.Rel.Grav., **41**, p.249.
- [56] A. H. Mueller, Phys. Rev. **D9**, p.963.
- [57] T. J. Zhang and Y. G. Shen, Int. J. Theor. Phys., **38**, p.1969.
- [58] E. Brézin, J. C. Le Guillou and J. Zinn-Justin, Phys. Rev., **D15**, p.1544.

- [59] T. Matos, L. A. Urena-Lopez, *Int. J. Mod. Phys.*, **D13**, p.2287.
- [60] Jerome Martin and Dominic J. Schwarz, *The precision of slow-roll predictions for the cmb anisotropies*// *Phys. Rev.*, **D62**,p.103520.
- [61] Martin J. White, *Contribution of long wavelength gravitational waves to the cosmic microwave background anisotropy*// *Phys. Rev.*, **D46**, p.4198.
- [62] N. Bartolo, E.W. Kolb and A. Riotto, *Post-inflation increase of the cosmological tensor-to-scalar perturbation ratio*// *Mod. Phys. Lett. A* **20**, p.3077.
- [63] D.H. Lith, *What would we learn by detecting a gravitational wave signal in the cosmic microwave background anisotropy?*// *Phys. Rev. Lett.* **78**, p.1861.
- [64] E. Komatsu et al, *Seven-Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations: Cosmological Interpretation*// *Astrophys. J. Suppl.*, **192**, p.18.
- [65] T.L. Smith, E. Pierpaoli, M. Kamionkowski, *A new cosmic microwave background constraint to primordial gravitational waves*// *Phys. Rev. Lett.* **97**, p.021301.
- [66] S. Weinberg *Cosmological Fluctuations of Short Wavelength*//*Astrophys.J.* **581**, p.810.
- [67] D.S. Salopek, J.R. Bond, *Nonlinear evolution of long wavelength metric fluctuations in inflationary models*, *Phys. Rev.*,**D 42**, p.3936.
- [68] A.G. Riess et.al, *Astrophys. J.* **607**, p.665.
- [69] G.F. Lewis and R.A. Ibata, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, **L 25**, p.324.
- [70] R. Kantowski and R.C. Tomas *Astrophys. J.* **561**, p.491.
- [71] J. Hwang, *Astrophys. J.* **375**, p.443.
- [72] M.S. Turner, M. White, J.E. Lidsey, *Phys. Rev. D* **48**, p.4613.
- [73] U. Seliak and M. Zaldarriaga *Astrophys. J.* **469**, p.437.
- [74] M. Bastero-Gil, *Phys. Lett. B* **678**, p.157.
- [75] E. Piedipalumbo, P. Scudellaro, G. Esposito, C. Rubano, *General Relativity and Gravitation*, **44**, Issue 10, p.2611.
- [76] Ruth Durrer, *J. Phys. Conf. Ser.* **222**, p.012021.
- [77] J. Aasi, et al. *Phys. Rev. Lett.* **112**, 131101 (2014)
- [78] V. Mukhanov and A. Vikman, *Enhancing the tensor-to-scalar ratio in simple inflation*, *JCAP*, **0602**, p.004.
- [79] H. Nakano, T. Tanaka, T. Nakamura, *Possible golden events for ringdown gravitational waves*, *Phys. Rev.*, **D 92**, p.064003.
- [80] V.F. Mukhanov and G.V. Chibisov, *JETP Lett.* **33**, p.532.

- [81] H.V. Peris et al., *Astrophys. J. Suppl.*, **148**, p.213.
- [82] J. M. Aguirregabiria, L. P. Chimento, R. Lazkoz, *Phys.Lett.*, **B 631**, p.93.
- [83] C.J. MacTravish et al. *Cosmological Parameters from the 2003 flight of BOOMERANG*// *Astrophys. J.*, **647**, p.799.
- [84] C. Armendariz-Picon, T.Damour, V. Mukhanov, *Phys. Lett. B* **458**, p.209.
- [85] M.S. Sloth, *Suppressing Super-Horizon Curvature Perturbations?*// *Mod. Phys. Lett.*, **A 21**, p.961.
- [86] J.Garriga, V.F. Mukhanov, *Phys. Lett.*, **B 458**, p.219.
- [87] A.D. Rendall, *Dynamics of k-essence*//*Class. Quant. Grav.* **23**, p.1557.
- [88] M. Baldi, F. Finelli, S. Matarrese, *Phys. Rev.*, **D 72**, p.083504.
- [89] И.В.Фомин, *Модели с нетривиальной кинетической частью в контексте точных решений уравнений динамики скалярного поля*, Вестник МГТУ, Естественные науки, No.4, С.37.
- [90] Planck Collaboration: P. A. R. Ade et al., Planck 2015 results. XIII. Cosmological parameters, *Astronomy & Astrophysics manuscript No. planck parameters*
- [91] M. Maggiore, *Gravitational Wave Experiments and Early Universe Cosmology*// *Phys. Rep.* **331**, p.283.

Часть III

Киральные космологические модели с фантомными полями

Введение

До 1998 года полагалось, что Вселенная расширяется с замедлением. Однако наблюдения за сверхновыми типа Ia ([1], [2]), обладающими узким диапазоном светимости и находящихся на значительном удалении от нас, показало, что убывание яркости сверхновых с расстоянием происходит заметно быстрее, в среднем, чем этого следовало бы ожидать при замедляющемся расширении. Это открытие стало неожиданностью для научного сообщества.

Эксперименты в космологии последних двух десятилетий уточнили ряд параметров и дали пищу к размышлению теоретикам.

Обсерватория COBE (Cosmic Background Explorer) была запущена 18 ноября 1989 (отчет миссии опубликован в [3]), в ее состав входило несколько аппаратов FIRAS (Far-InfraRed Absolute Spectrophotometer) - спектрофотометр микроволнового и далекого инфракрасного диапазона для измерения абсолютного спектра реликтового фона, DIRBE (Diffuse InfraRed Background Experiment) - многоканальный фотометр инфракрасного диапазона, DMR (Differential Microwave Radiometer) - высокочувствительный радиометр для измерения анизотропии яркости реликтового излучения на небе. Благодаря этой миссии, в частности благодаря измерению аппарата FIRAS, была показана отличная согласованность излучения Вселенной с моделью абсолютно черного тела с температурой около 2,7К. Еще одной важной ступенью стало получение спектральной карты микроволнового излучения (эксперимент DMR), которая показала, что вариация реликтового излучения на небе – крайне мала (всего 1/100000 от среднего значения яркости неба). Полученный результат дает понятие о распределении начальных возмущений плотности первичного вещества ранней Вселенной, которые позже развились в результате гравитационной неустойчивости в наблюдаемую крупномасштабную структуру – скопления галактик и пустоты.

WMAP (Wilkinson Microwave Anisotropy Probe) – космическая лаборатория НАСА, запущенная в 2001 году и передававшая данные сканирования небесной сферы по 2009 год (отчеты миссии опубликованы в [4],[5]). В результате была составлена радиокарта неба на нескольких длинах волн: от 1.4 см до 3 мм. Разрешение WMAP было существенно выше спутника COBE, что дало возможность составить более детальную карту микроволнового излучения. Полученные данные в ходе эксперимента согласовались с моделью Вселенной, состоящей из:

- обычного (барионного) вещества – 4,6%
- темной материи – 22,4%
- темной энергии – 73%.

Данные WMAP показали, что темная материя является холодной (т.е. состоит из тяжелых частиц), т.к. легкие частицы типа нейтрино, движущиеся с релятивистскими скоростями, размывали бы малые флуктуации плотности в ранней Вселенной. Миссия WMAP уточнила ряд параметров исходя из Λ CDM – модели: возраст Вселенной $(13.772 \pm 0.059) * 10^9$ лет, постоянную Хаббла 69.32 ± 0.80 км/с/Мпк, плотность барионов в настоящее время $(2.5 \pm 0.1) * 10^{-7} \text{ cm}^{-3}$, параметр плоскостности Вселенной (отношение общей плотности к критической) 1.02 ± 0.02 , и др.

Космическая обсерватория Planck была запущена в 2009 и в 2013 получена последняя команда на выключение телескопа (отчет миссии опубликован в [6]). Planck имел

систему зеркал, фокусирующих поток фотонов на два прибора: Низкочастотный приемник (LFI) (примерно 4-10 мм) и Высокочастотный приемник (HFI) (примерно 0.35-1 мм). Благодаря этой миссии были получены следующие результаты:

- Состав вещества во Вселенной: барионное вещество – 4,9%, темная материя – 26,8%, темная энергия – 68,3%
- уточнена постоянная Хаббла: $H = 68 \frac{km/c}{Mpc}$,
- Planck подтвердил наличие небольшого отличия спектра первоначальных возмущений материи от однородного (спектральный индекс 0,96).

BICEP (Background Imaging of Cosmic Extragalactic Polarization) и Keck Array – серия экспериментов по исследованию реликтового излучения. В ходе этих экспериментов измеряется поляризация реликтового излучения, в частности, измерения В-моды излучения. Эксперименты велись на нескольких поколениях аппаратуры, состоящей из BICEP1, BICEP2 и Keck Array. В настоящее время строится BICEP3. Результаты миссии BICEP2 приведены в отчете [7].

17 марта 2014 года ученые Гарвард-Смитсоновского центра астрофизики объявили о обнаружении В-моды на уровне $r = 0,2$. В настоящее время исследуется достоверность полученных результатов и выводов.

В расчетах, основанных на измерениях миссии Planck, принимается во внимание только одно скалярное поле. Однако существуют модели, объединяющие в себе несколько полей. Яркий пример - нелинейная сигма модель (НСМ), в которой взаимодействие вводится чисто геометрическим способом [51]. Г.Г. Иванов (независимо от Де'Альфара с соавторами [52]) предложил самогравитирующую нелинейную сигма модель как обобщение теории с несколькими скалярными полями [8]. В этой работе были получены базовые уравнения НСМ и предложены методы их решения. Было показано, что полученные методы могут быть применимы для сферически-симметричного, плоско-симметричного пространства-времени и для космологической метрики. Были получены примеры точных решений. В работах [9], [10], [11] Червоном С.В. получены точные решения для плоско-симметричных и космологических пространств.

Приложение НСМ с потенциалом самодействия для космологической инфляции были предложены в работах [12], [13], [14]. Так же в этих работах приведены примеры точных решений. В монографии [15] представлены точные решения в космологии и для плоско-симметричных пространств.

Мы рассматриваем модель с двумя скалярными полями с кинетическим взаимодействием между ними – киральную космологическую модель (ККМ) [12].

Точные решения для 2-х компонентной ККМ при исследовании полей темного сектора на фоне космологической инфляции рассматривались в работе [16].

Точные решения использовались при рассмотрении ККМ с темной энергией и темной материей в работе [17].

Обзор точных решений и приложение ККМ для вычисления космологических возмущений представлен в [18].

Стандартный алгоритм современных исследований в космологии подразумевает прохождение следующих этапов: отыскание точных решений классических уравнений гравитации и полей, расчет космологических возмущений для полученных решений, вы-

числение спектральных параметров (может быть выполнено по точным решениям), сравнение теоретических вычислений с наблюдательными данными.

В третьей части монографии главным образом получен ряд новых результатов по точным решениям для 2-компонентной киральной космологической модели (ККМ) плоской, замкнутой и открытой вселенной, с заданным видом эволюции масштабного фактора $a(t)$.

Авторы

Глава 9.

Модели инфляционной космологии

9.1. Инфляционные модели

Идея инфляционного сценария эволюции Вселенной – сверх быстрого расширения была выдвинута в начале 80-х годов прошлого века. Эта парадигма позволила объяснить ряд закономерностей в наблюдательной и теоретической космологии, и в настоящее время мало у кого вызывает сомнения в необходимости включения данного этапа в общий сценарий развития Вселенной – теории Большого Взрыва. За время, прошедшее от первых инфляционных сценариев Алексея Старобинского [19], Алана Гуса [21], Андрея Линде [22], [23], Андреаса Альбрехта и Пауля Стейнхардта [24], было разработано большое разнообразие инфляционных моделей и их число продолжает увеличиваться. Рассмотрим основные классы моделей ранней инфляции, с которыми связывается прогресс в наблюдательной космологии.

9.2. Точные решения в моделях космологической инфляции

Наиболее простой способ описания космологической инфляции заключается в следующем. Предполагается существование некоторого скалярного поля (инфлатона), которое эволюционирует совместно с гравитационным полем, им порождаемым. Проследим основные положения данной модели. Действие системы, состоящий из скалярного поля и гравитации имеет вид

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left(\frac{1}{16\pi G} R + \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi - V(\varphi) \right), \quad (9.1)$$

где $g = \det(g_{\mu\nu})$, G – гравитационная постоянная Ньютона.

Тензор энергии-импульса принимает вид:

$$T_{\mu\nu} = \varphi_{,\mu} \varphi_{,\nu} - g_{\mu\nu} \left(\frac{1}{2} \varphi_{,\alpha} \varphi_{,\beta} g^{\alpha\beta} - V(\varphi) \right). \quad (9.2)$$

Полевое уравнение, соответствующее (9.1), записывается в следующем виде:

$$\partial_\mu (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\nu \varphi) + \sqrt{-g} V'(\varphi) = 0 \quad (9.3)$$

Уравнение Эйнштейна представим через след ТЭИ

$$R_{\mu\nu} = \kappa \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T \right) \quad (9.4)$$

Метрику пространства-времени в силу однородности и изотропности Вселенной запишем в форме ФРУ (сигнатура метрики выбрана в форме + - - -)

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = dt^2 - a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - \epsilon r^2} + r^2 d\Omega^2 \right] \quad (9.5)$$

где $d\Omega^2$ – элемент длины на единичной сфере, $\epsilon = \pm 1, 0$. Также предполагают, что скалярное поле распределено однородно в пространстве, т.е. $\varphi = \varphi(t)$. В этом случае уравнение (9.3) принимает вид:

$$\ddot{\varphi} + 3H\dot{\varphi} + V'(\varphi) = 0. \quad (9.6)$$

Уравнения Эйнштейна для метрики ФРУ (9.5) приводятся к виду:

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} \left(\frac{1}{2} \dot{\varphi}^2 + V(\varphi) \right) - \frac{\epsilon}{a^2} \quad (9.7)$$

$$\dot{H} = -8\pi G \left(\frac{1}{2} \dot{\varphi}^2 \right) + \frac{\epsilon}{a^2} \quad (9.8)$$

Таким образом, система уравнений (9.6)–(9.8) описывает самогравитирующее скалярное поле φ с потенциалом самодействия $V(\varphi)$.

Следует отметить, что система уравнений (9.6)–(9.8) переопределена: любое из трех уравнений может быть получено как (дифференциальное) следствие двух оставшихся [15].

Существует несколько вариантов постановки задачи (исследования) и подходов к решению системы уравнений (9.6)–(9.8), описывающих инфляционную стадию ранней эволюции Вселенной [20].

В моделях «старой» [21] и «новой» [22], [23], [24] рассматривается фазовый переход, который характеризуется заданной формой потенциала $V(\varphi)$. В этом подходе система (9.6)–(9.8) решается относительно неизвестных функций $a(t)$ и $\varphi(t)$. На этом пути первоначально проводились исследования в рамках двух основных приближений: быстрых осцилляций ($3H\dot{\varphi} \cong 0$) и медленного скатывания ($\ddot{\varphi} \cong 0$, $\dot{\varphi}^2 \cong 0$). Эти приближения позволяли получать результаты, которые можно сопоставить наблюдательным данным. В частности, используя параметры медленного скатывания $\epsilon = \frac{1}{2\kappa} \left(\frac{V'}{V} \right)^2$, $\eta = \frac{1}{\kappa} \frac{V''}{V}$ можно находить спектральные параметры скалярных и тензорных возмущений n_S , n_T .

Поиски точных решений системы уравнений (9.6)–(9.8) в рамках космологической инфляции были предприняты, начиная с работ [25], [35], где рассматривался экспоненциальный тип потенциала $V(\varphi) \propto e^{-A\phi/\sqrt{2}}$, который соответствует степенной инфляции $a(t) \propto t^A$, $A = const$.

Отметим, что широкий класс решений для различного рода нелинейностей для космологического скалярного поля был получен в работах Иванова Г.Г. [36], [37], [38]. В частности, были получены точные решения для:

- 1) нелинейности Хиггса ($V(\varphi) = \frac{\mu}{2}\varphi^2 - \frac{\lambda}{4}\varphi^4$, $\mu < 0$, $\lambda < 0$, $3\kappa\mu = 4\lambda$);
- 2) для нелинейности, соответствующей уравнению Син-Гордона, ($V(\phi) = -\mu \cos\left(2\sqrt{\frac{3}{2}\kappa}\varphi\right)$, 0);
- 3) для массивного скалярного поля с отрицательной постоянной, ($V(\phi) = \frac{1}{2}m^2\varphi^2 - \frac{m^2}{3\kappa}$);
- 4) для массового скалярного поля с кубической нелинейностью, ($V(\phi) = \frac{m^2\varphi^2}{2} - \frac{\lambda}{4}\varphi^4 - U_0$, $\lambda < 0$).

Кроме того, в работе [37] впервые было представлено уравнение скалярного поля в форме типа Гамильтона-Якоби при зависимости параметра Хаббла от скалярного поля φ :

$$\frac{2}{3\kappa}(H')^2 - H^2 = -\frac{\kappa}{3}V(\varphi), \quad H = H(\varphi), \quad H' = \frac{dH}{d\varphi} \quad (9.9)$$

Подход Г. Иванова нахождения точных космологических решений получил дальнейшее развитие в работе [39]. Там, кроме обобщенного экспоненциального потенциала, был предложен новый тип потенциала $V(\varphi) = \frac{m^2}{\varphi^\beta} \left(1 - \frac{1}{6}\frac{\beta^2}{\varphi^2}\right)$, $\beta > 0$, приводящий к точному решению в элементарных функциях для $\varphi(t)$ и $a(t)$. На основе представления системы уравнений (9.6)–(9.8) в форме типа Гамильтона-Якоби в работе [39] найдено новое точное решение с эволюцией масштабного фактора $a(t) = \sinh^{1/3}(\sqrt{3\lambda}(t - t_*))$, $t_* = const$.

Другие примеры точных решений при заданном потенциале $V(\varphi)$ были получены в работе [25].

Отметим, что в этой работе было задано уравнение состояния с параметром для идеальной жидкости, что эквивалентно выбору формы потенциала $V(\varphi)$ в представлении $\rho = \frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 + V$, $p = \frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 - V$.

Другие подходы к решению системы уравнений (9.6)–(9.8) можно определить, как методы конструирования точных решений по заданному масштабному фактору $a(t)$ [26], [27], [28], [29], [30] или по заданной эволюции скалярного поля $\varphi(t)$ [31], [32], [33]. Здесь можно выделить также подход, основанный на генерировании зависимости потенциала $V(\varphi)$ при заданном параметре Хаббла, как функции от скалярного поля $H(\varphi)$ на основе представления типа Гамильтона-Якоби [34].

Исследования, проведенные в диссертационной работе, имеют прямое отношение к точным решениям с взаимодействующими скалярными полями двух типов: каноническими и фантомными.

Важным понятием, характеризующим инфляцию, является число е-фолдов (e-folds), N , определяемое как

$$N \equiv \ln \left[\frac{a(t)}{a(t_{in})} \right] \quad (9.10)$$

Другими словами, к моменту времени t , начиная с момента t_{in} , Вселенная расширяется в e^N раз.

9.3. Космологические параметры в точнорешаемых моделях инфляции

9.3.1. Метод вычисления космологических параметров

Достоверность той или иной модели ранней космологической инфляции проверяется сопоставлением ее параметров с наблюдательным данным. Ключевыми зависимостями, позволяющими проводить подобные сопоставления, являются: спектр мощности возмущений плотности, отношение тензорных и скалярных мод по квадрату амплитуд, спектральные индексы скалярного и тензорного возмущений и их отношение. В работе [40] были представлены основные теоретические выкладки в случае приближения медленного скатывания. Позже, в работе [41], обходя приближение медленного скатывания, наряду с другими величинами, были записаны спектр мощности и спектральный индекс скалярных возмущений в зависимости от суперпотенциала. В той же работе на точных решениях был получен спектральный индекс скалярных возмущений для модели степенной инфляции $a(t) = At^n$. Далее, в совместной работе С.В. Червона и И.В. Фомина [42], опираясь на результаты работы [41], удалось выразить ключевые космологические параметры в зависимости от параметра Хаббла, при выходе возмущений за горизонт.

Проследим вывод формул для космологических параметров, в зависимости от параметра Хаббла по статье [42].

Будем исходить из записи полевых уравнений и уравнений Эйнштейна для метрики ФРУ с привлечением суперпотенциала для одного скалярного поля

$$W(\phi) = \frac{3}{\kappa} H^2, \quad (9.11)$$

$$3H\dot{\phi} = -\frac{d}{d\phi}W(\phi), \quad (9.12)$$

$$(\dot{\phi})^2 = \frac{-2}{\kappa} \dot{H}, \quad (9.13)$$

где суперпотенциал имеет вид:

$$W(\phi) = V(\phi) + \frac{1}{2}U^2(\phi), \quad U(\phi) = \dot{\phi}. \quad (9.14)$$

Точная формула для дифференциала от логарифма волнового вектора при выходе возмущений с волновым вектором k за горизонт:

$$d(\ln k) = H dt + \frac{\dot{H}}{H} dt = H dt + \frac{3\kappa U^3(\phi)}{2W'} dt. \quad (9.15)$$

Формула для спектра мощности скалярных возмущений имеет вид:

$$\mathcal{P}_{\mathcal{R}}(k) = \frac{\kappa^3}{12\pi^2} \frac{W^3}{W'^2} = \frac{H^4 \kappa^2}{8\dot{H}} \Big|_{k=aH}. \quad (9.16)$$

Используя предыдущие две формулы, можно получить выражение для спектрального индекса скалярных возмущений:

$$n_S(k) - 1 = \frac{d \ln \mathcal{P}_{\mathcal{R}}(k)}{d \ln k} = \frac{W'}{\kappa \left(\frac{3}{2}U^2 - W\right)} \left(3 \frac{W'}{W} - 2 \frac{W''}{W'}\right) = \frac{4\dot{H} - \frac{H\ddot{H}}{\dot{H}}}{\dot{H} + H^2} \Big|_{k=aH}. \quad (9.17)$$

Формула для точного вычисления спектра мощности тензорных возмущений:

$$\mathcal{P}_G(k) = \frac{\kappa^2 W}{6\pi^2} = \frac{\kappa H^2}{2\pi^2} \Big|_{k=aH}. \quad (9.18)$$

Формула для спектральных индексов тензорных возмущений:

$$n_G = \frac{(W')^2}{\kappa W \left(\frac{3}{2}U^2 - W\right)} = \frac{2\dot{H}}{\dot{H} + H^2} \Big|_{k=aH}. \quad (9.19)$$

Используя формулы (9.17) и (9.19) можно записать отношение спектральных индексов тензорных и скалярных возмущений:

$$r := \frac{n_G}{n_S} = 2\dot{H} \left[5\dot{H} + H^2 - \frac{H\ddot{H}}{\dot{H}} \right]^{-1}. \quad (9.20)$$

Тензорно-скалярное отношение имеет вид

$$\frac{T}{S} = \frac{A_T^2}{A_S^2} = -4 \frac{\dot{H}}{H^2}. \quad (9.21)$$

Таким образом, в работе [42] были получены точные общие формулы для космологических параметров, выраженных через параметр Хаббла и его производные.

Формула для убегания спектрального индекса скалярных возмущений с зависимостью от супепотенциала была получена в работе [41] (выражение (16)), однако, в ней допущена опечатка (вместо слагаемого $\left(W'' - \frac{(3UU' - W')W'}{\frac{3}{2}U^2 - W}\right) (3 \ln(W)' - 2 \ln(W')')$ в большой скобке (см. (9.22) диссертации), в результате переноса формулы, было записано $W'' \frac{(3UU' - W')W'}{\frac{3}{2}U^2 - W} (3 \ln(W)' - 2 \ln(W')')$):

$$\frac{dn_S}{d \ln(k)} = \frac{W'}{\kappa^2 \left[\frac{3}{2}U^2 - W\right]^2} \left[\left(W'' - \frac{(3UU' - W')W'}{\frac{3}{2}U^2 - W} \right) (3 \ln(W)' - 2 \ln(W')') + W'(3 \ln(W)'' - 2 \ln(W')'') \right]. \quad (9.22)$$

Используя формулы (9.17) и (9.15), можно получить зависимость убегания спектрального индекса скалярных возмущений в зависимости от параметра Хаббла и его произ-

ВОДНЫХ:

$$\frac{dn_S}{d \ln(k)} = \frac{\left[\ddot{H} \dot{H}^2 (5H^2 - \dot{H}) + H \ddot{H}^2 (2\dot{H} + H^2) \right] H}{\dot{H}^2 (\dot{H} + H^2)^3} - \frac{\left[\ddot{H} H \dot{H} (\dot{H} + H^2) - 8H \dot{H}^4 \right] H}{\dot{H}^2 (\dot{H} + H^2)^3}. \quad (9.23)$$

Аналогичным образом из формул (9.19) и (9.15) получается зависимость убегания спектрального индекса тензорных возмущений в зависимости от параметра Хаббла и его производных:

$$\frac{dn_G}{d \ln(k)} = \frac{2H^2(\ddot{H}H - \dot{H}^2)}{(\dot{H} + H^2)^3}. \quad (9.24)$$

9.3.2. Космологические параметры для точных решений

В работе [42] были получены космологические параметры для ряда зависимостей масштабного фактора: $a(t) = At^m$ (степенная инфляция), $a(t) = A \operatorname{sh}(\alpha t)$ и $a(t) = A \operatorname{ch}(\alpha t)$ (сингулярное и несингулярное Де Ситтеровские решения) и д.р.

Степенная инфляция $a(t) = At^m$; $A, m = \text{const}$.

Спектральные индексы скалярных и тензорных возмущений, а также их отношение для степенной инфляции имеют вид:

$$n_S - 1 = \frac{2}{1 - m} = n_G, \quad r = \frac{2}{3 - m} \quad (9.25)$$

В работе [42] убегание спектральных индексов для степенной инфляции не приводилось

$$\frac{dn_S}{d \ln(k)} = \frac{2(n - 6)}{(n - 1)^3}, \quad \frac{dn_G}{d \ln(k)} = \frac{2n}{(n - 1)^3} \quad (9.26)$$

Де Ситтеровские решения

Сингулярное решение $a(t) = A \operatorname{sh}(\alpha t)$, $A, \alpha = \text{const}$.

Спектральные индексы скалярных и тензорных возмущений, а также их отношение для сингулярного решения Де Ситтера имеют вид:

$$n_S - 1 = \frac{2[-2 + \operatorname{ch}^2(\alpha t_*)]}{\operatorname{sh}^2(\alpha t_*)}, \quad n_G = -\frac{2}{\operatorname{sh}^2(\alpha t_*)}, \quad r = \frac{2}{5 - 3 \operatorname{ch}^2(\alpha t_*)}. \quad (9.27)$$

Спектры мощности скалярных и тензорных возмущений, а также тензорно-скалярное отношение по квадратам амплитуд имеют для сингулярного решения Де Ситтера вид:

$$P_R = \frac{\kappa \alpha^2}{8} \frac{\operatorname{ch}^4(\alpha t_*)}{[1 - \operatorname{ch}^2(\alpha t_*)]}, \quad P_G = \frac{\kappa \alpha^2 \operatorname{ch}^2(\alpha t_*)}{2\pi^2 \operatorname{sh}^2(\alpha t_*)}, \quad \frac{T}{S} = \frac{4}{\operatorname{ch}^2(\alpha t_*)}. \quad (9.28)$$

Убегание спектральных индексов скалярных и тензорных возмущений записываются в следующей форме:

$$\frac{dn_S}{d \ln(k)} = 4 \frac{\operatorname{ch}^2(\alpha t)}{\operatorname{sh}^4(\alpha t)}, \quad \frac{dn_G}{d \ln(k)} = \frac{2 \operatorname{ch}^2(\alpha t)(2 \operatorname{ch}^2(\alpha t) + 1)}{\operatorname{sh}^2(\alpha t)} \quad (9.29)$$

Несингулярное решение $a(t) = A \operatorname{ch}(\alpha t)$, $A, \alpha = \text{const}$.

Спектральные индексы скалярных и тензорных возмущений, а также их отношение для несингулярного решения Де Ситтера имеют вид:

$$n_S - 1 = \frac{2 [2 + \operatorname{sh}^2(\alpha t_*)]}{\operatorname{ch}^2(\alpha t_*)}, \quad n_G = \frac{2}{\operatorname{ch}^2(\alpha t_*)}, \quad r = \frac{2}{5 + 3 \operatorname{sh}^2(\alpha t_*)}. \quad (9.30)$$

Спектры мощности скалярных и тензорных возмущений, а также тензорно-скалярное отношение по квадратам амплитуд имеют для сингулярного решения Де Ситтера вид:

$$P_R = \frac{\kappa \alpha^2}{8} \frac{th^4(\alpha t_*)}{1 - th^2(\alpha t_*)}, \quad P_G = \frac{\kappa \alpha^2}{2\pi^2} th^2(\alpha t_*), \quad \frac{T}{S} = -4 \frac{\alpha [1 - th^2(\alpha t_*)]}{th^2(\alpha t_*)}. \quad (9.31)$$

Убегание спектральных индексов скалярных и тензорных возмущений записываются в следующей форме:

$$\frac{dn_S}{d \ln(k)} = -4 \frac{\operatorname{sh}^2(\alpha t)}{\operatorname{ch}^4(\alpha t)}, \quad \frac{dn_G}{d \ln(k)} = -\frac{2 \operatorname{sh}^2(\alpha t)(2 \operatorname{sh}^2(\alpha t) + 1)}{\operatorname{ch}^2(\alpha t)} \quad (9.32)$$

Следует заметить, что в работе [42] для n_S и r (формулы (24), (25)) в случае сингулярного и несингулярного решения Де Ситтера допущены небольшие неточности.

9.4. Фантомные поля в космологии

Современные наблюдения показывают, что параметр уравнения состояния ω может оказаться несколько меньше -1 : $\omega < -1$. Когда выполняется это условие, говорят о проявлении фантомной (духовой) формы темной энергии [43].

Фантомные поля впервые были рассмотрены в теории стационарного состояния Вселенной Хойла [44] и [45], где было введено S -поле отрицательного давления.

Действие фантомного поля минимально взаимодействующего с гравитацией имеет вид:

$$S = \int d^4 \sqrt{-g} \left(\frac{R}{2\kappa} - \frac{1}{2} \phi_{,\mu} \phi_{,\nu} g^{\mu\nu} - V(\phi) \right) \quad (9.33)$$

т.е. знак перед кинетическим слагаемым заменяется на противоположный. В этом случае уравнение состояния в модели ФРУ принимает вид:

$$\omega_\phi = \frac{p}{\rho} = \frac{-\frac{1}{2} \dot{\phi}^2 - V}{-\frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + V} = -1 - \frac{\dot{\phi}^2}{V - \frac{1}{2} \dot{\phi}^2}. \quad (9.34)$$

При выполнении условия $V > \frac{1}{2} \dot{\phi}^2$, уравнение состояния реализуется в форме $\omega < -1$.

Фантомные скалярные поля исследуются в литературе. В [46] изучалась модель с простым лагранжианом, содержащим одно фантомное скалярное поле и в не явном виде другие источники. Рассматривались несколько потенциалов: степенной $V(\phi) \sim \phi^\alpha$, экспоненциальный $V(\phi) = A (1 - e^{-c\phi^2})$. Показано, что для степенной зависимости потенциала при $\alpha \leq 4$ характерно $\omega_\phi \rightarrow -1$ и $\rho_\phi \rightarrow \infty$ для $t \rightarrow \infty$, при $\alpha > 4$ так же

характерно $\omega_\phi \rightarrow -1$, но плотность энергии достигает бесконечного значения за конечное время (это явление называется большим разрывом). Для степенной зависимости потенциала характерно $\omega < -1$ и так же приводит к большому разрыву. Потенциал круче экспоненциального приводит к $\omega \rightarrow -\infty$ для конечного значения масштабного фактора. В [47] рассматривается модель с потенциалом $V(\phi) = V_0 \left[\text{ch} \left(\frac{\alpha\phi}{M_p} \right) \right]^{-1}$, позволяющим обойти сингулярность в будущем.

9.5. Киральная космологическая модель

Активное исследование ранней Вселенной началось в начале 80-х годов прошлого века с осознания необходимости инфляционного сценария. С течением времени стало ясно, что тесная связь между физикой частиц и космологией ведет к зависимости крупномасштабной структуры Вселенной в современную эпоху от квантовых флуктуаций на ранних стадиях эволюции. Такие разделы как топологические дефекты, инфляция, темная материя, аксиальная и квантовая космология изучаются многими учеными. Вопросы о физических основах источника расширения Вселенной (инфляция) или квантовом рождении Вселенной обсуждается в литературе в частности в [48].

Ускоренное расширение Вселенной в наши дни, открытое в конце двадцатого века, приводит к большому числу новых теоретических гипотез, призванных объяснить этот факт. Термин Темная энергия как источник ускоренного расширения в современную эпоху можно трактовать в широком смысле. Наиболее часто в качестве темной энергии используют космологическую константу Λ , квинтэссенцию, как каноническое скалярное поле с потенциалом или скалярное поле взаимодействующее с другими видами материи, излучения и д.р. [49]. Термин поля темного сектора объединяет все виды Темной энергии и Темной материи. Покажем, что нелинейная сигма модель в космологии – киральная космологическая модель способно обобщить поля темного сектора.

Самогравитирующая нелинейная сигма модель с потенциалом взаимодействия применялась для описания инфляционной космологии [50], она получила название – киральная космологическая модель. Двумя годами ранее НСМ со слабым кинетическим взаимодействием рассматривалась в космологии, но она не отражала всех необходимых свойств инфляционного сценария потому, что уравнение соответствовало предельно жесткому веществу.

Термин «киральная» рассматривается в значении упрощенного эквивалента общей киральной НСМ с Римановой метрикой как пространство-целей в соответствии с терминологией [51]. Парадоксально, это определение было применено к чисто бозонной НСМ, не содержащей спинорных полей. Следовательно, термин «киральный» означает, что скалярное поле определено на некоем нелинейном множестве.

ККМ базируется на НСМ с потенциалом взаимодействия. ККМ является обобщением для теории с одним скалярным полем, имеющим широкое применение в космологии. Небезынтересно рассмотреть космологические приложения НСМ.

НСМ, взаимодействующая с гравитацией, представлялась с разных позиций. Чтобы получить четырехмерную НСМ, эквивалентную калибровочной теории, подразумевающей инстантонные и меронные решения, из двумерной НСМ, необходимо, чтобы эта двумерная НСМ взаимодействовала с гравитационным полем. Это приближение, основанное на Римановом пространстве-времени с евклидовой сигнатурой, было реализова-

но Де'Альфарио и др. [52].

Рассматривая НСМ как источник гравитационного поля (базирующегося на Римановом пространстве-времени с лоренцевой сигнатурой) Иванов независимо от работы [52] предложил самогравитирующую НСМ как обобщение теории с несколькими скалярными полями. В работе [8] были получены базовые уравнения НСМ модели и предложены методы их решения. Было показано, что полученные методы могут быть применимы для сферически-симметричного, плоского пространства-времени и для космологической метрики. Были получены примеры точных решений. Космологические решения включали в себя:

- 1) $SO(4)$ -инвариантное решение для закрытой Вселенной ФРУ с постоянным масштабным фактором $a(t) = a_0 = const$ (статичная Вселенная) или с $a(t) \propto t$ с эффективным уравнением состояния, отвечающим радиации $p = -\frac{e}{3}$;
- 2) $SO(3)$ -инвариантное решение для анизотропной Вселенной.

В работе [8] так же был предложен метод изометрических погружений для самосогласованной НСМ.

Дальнейшее применение НСМ в космологии началось с работы [53]. Параллельно с исследованиями Червона С.В. (1992-2012) было несколько работ по приложению НСМ к космологии. В работе [54] эволюция возмущений плоской Вселенной ФРУ рассматривалась для $O(N)$ нелинейной сигма модели для больших N . Особенностью предложенной модели было включение в рассмотрение «жесткого источника», который не оказывает влияния на фон, заданный мультикомпонентной идеальной жидкостью. Воздействие «жесткого источника» сравнимо с возмущениями жидкости по метрике и плотности; жесткий источник может привести к изначально не Гауссовому распределению на масштабах в несколько сотен мега парсек. Дальнейшее обобщение этой модели на инфляционный сценарий и анализ влияния жесткого источника на формирование крупномасштабной структуры представлены в [16].

В работе [55] несколько скалярных полей взаимодействующих с гравитацией рассматривались в рамках скалярно-тензорной теории гравитации. Утверждалось, что некоторые скалярные кинетические слагаемые должны быть отрицательно определены. Это утверждение означает, что во Вселенной присутствуют фантомные поля.

В работе [56] изучались сферически-симметричные, статические решения $SU(2)$ НСМ для Де'Ситоровского фона с помощью численных методов. Было установлено, что в этой модели существует определенное число регулярных решений с конечной энергией.

После открытия ускоренного расширения Вселенной в современную эпоху, концепция темной энергии стала активно развиваться. Прежде всего, темная энергия рассматривается как космологическая константа или скалярное поле (квинтэссенция, фантом, тахион и др.). Другие подходы к концепции темной энергии реализуется в модифицированной гравитации, газе Чаплыгина и многих других моделях [49].

Авторы работы [57] предложили новую космологическую модель как единую картину квинтэссенции и новой формы темной материи. Это модель оперирует двумя гравитационно-взаимодействующими полями без кинетического и потенциального взаимодействия. В работе [58] рассматривается приложение этой модели для реконструкции квинтэссенции из наблюдательных данных по сверхновым.

В работах [59], [60] предлагалась космологическая модель в которой темная материя и темная энергия представлялись в виде двух гравитационно-взаимодействующих

скалярных полей. Модель состояла на 95% из скалярных полей. Вид потенциала был выбран в специальной форме, что дало возможность определить скалярную массу темной материи (по порядку 10^{-26} eV).

В работе [61] исследовалась модель с неминимальным взаимодействием между темной материей и темной энергией, заданной скалярным полем. Для этой модели эволюция линейных возмущений была детально рассмотрена. Следует отметить, что предложенная неминимальная связь может привести к кинетическому взаимодействию, если темную материю в этой модели представить в виде скалярного поля.

В работе [62] впервые говорится о том, что одно и то же скалярное поле может быть ответственно за раннюю и позднюю инфляцию. Темная материя в этой модели может быть учтена в стандартном виде космологической жидкости.

Работа [63] посвящена наблюдательным данным квинтомной модели. Следует отметить, что в специальном случае квинтомная модель может быть представлена в виде двух гравитационно- и потенциально-взаимодействующих скалярных поля.

В работе [64] исследуется динамическое взаимодействие между темной энергией и темной материей. Взаимодействие между темной энергией и темной материей описывается в дополнительном слагаемом в уравнении энергобаланса. Этот тип связи может быть обобщен на два гравитационно-взаимодействующих скалярных поля, если темную материю представить в виде скалярного поля. Отметим, что передача энергии от темной материи темной энергии и от темной энергии темной материи рассматривалась в работе [65].

Модель с N -мерным внутренним пространством для мульти-полевой конфигурации рассматривалась в работе [66]. Отличие от киральной космологической модели [50], [12] состоит в ограничении внутренней метрики пространства для постоянной модели.

Работа [67] посвящена квинтомной модели с $O(N)$ симметрией. Важность работы состоит в том, что она описывает НСМ с деформированным киральным пространством [50], [12]. К тому же работа [67] может рассматриваться как следующий шаг от работы [66] к ККМ (в этом случае метрика внутреннего пространства ККМ выбрана в специальной форме).

В работе [68] исследуются динамические свойства модели темной энергии с двумя скалярными полями, имеющими гравитационное, кинетическое и потенциальное взаимодействие. Автор рассматривает 2-х компонентную модель с неканоническим кинетическим слагаемым. Данная модель имеет более общий вид, чем ККМ и может быть сведена к ней простым выбором действия. Это обстоятельство находится в центре внимания статьи: выбранная модель эквивалентна 2-х компонентной ККМ с перекрестным взаимодействием скалярных (киральных) полей. Дальнейшее развитие работа [68] получила в работе [69].

Из вышесказанного видно, что ККМ широко применяется при описании как ранней, так и поздней инфляции.

9.6. Развитие модели «появляющейся» вселенной

Термин «Emergent Univers» (EmU) как и сама модель появились в работе Эллиса и Маартинса в 2003 году [70], мы используем его аналог – «появляющаяся» вселенная. Эта модель получила распространение в работах [71], [72], [73] и других.

В своей оригинальной работе Эллис и Маартинсон предполагали, что первоначально существовало скалярное поле с плотностью энергии $\rho_\phi = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi)$ и давлением $p_\phi = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V(\phi)$ и, возможно, обыкновенное вещество с плотностью энергии ρ и давлением $p = \omega\rho$, где $-\frac{1}{3} \leq \omega \leq 1$. Однако сложно представить существование обычного вещества при размерах Вселенной лишь немногим больше планковских. В этой статье показывается, что в случае закрытой модели $\epsilon = +1$, осуществляется инфляция из статического состояния Вселенной (на бесконечности), с последующим разогревом. Также в ней появляется масштабный фактор в виде (модель Харрисона [74]):

$$a(t) = a_i \left[1 + \exp\left(\frac{\sqrt{2}t}{a_i}\right) \right]^{1/2}$$

Как указывают авторы, он соответствует простой модели с постоянной инфляцией для замкнутой Вселенной содержащей радиацию ($\omega = \frac{1}{3}$) и космологическую константу $\Lambda = 8\pi GV$. Для бесконечного прошлого ($t \rightarrow -\infty$) модель асимптотически статична по Эйнштейну ($a \rightarrow a_i$). Инфляция началась в бесконечном прошлом, но в каждый конечный момент времени t_e , существует конечное число e-folds,

$$N_e = \ln \frac{a_e}{a_i} \approx \frac{t_e}{\sqrt{2}a_i},$$

последнее справедливо при $t_e \gg a_i$.

В работах [71], [72] появляется запись масштабного фактора в более общей форме:

$$a(t) = A(\beta + e^{\alpha t})^m$$

где α , β , m , A – const.

Таким образом, параметр Хаббла и его производные по времени в этом случае имеют вид (в статье [71] закралась неточность отсутствует β в числителе в формуле для \dot{H} и \ddot{H}):

$$H = \frac{m\alpha e^{\alpha t}}{\beta + e^{\alpha t}}, \quad \dot{H} = \frac{m\beta\alpha^2 e^{\alpha t}}{(\beta + e^{\alpha t})^2}, \quad \ddot{H} = \frac{m\beta\alpha^3 e^{\alpha t}(\beta - e^{\alpha t})}{(\beta + e^{\alpha t})^3}$$

В работе [72] исследуется «появляющаяся» вселенная в модели Старобинского. В частности, квазиклассические уравнения Эйнштейна записываются в форме:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = -8\pi G \langle T_{\mu\nu} \rangle \quad (9.35)$$

где $\langle T_{\mu\nu} \rangle$ – вакуумное среднее тензора энергии-импульса. В случае свободных, безмассовых, конформно-инвариантных полей $\langle T_{\mu\nu} \rangle$ может быть переписан в метрике Робертсона-Уокера в форме:

$$\langle T_{\mu\nu} \rangle = K_1 {}^{(1)}H_{\mu\nu} + K_3 {}^{(3)}H_{\mu\nu}$$

где K_1 и K_3 – некоторые числа, а

$${}^{(1)}H_{\mu\nu} = 2R_{;\mu;\nu} - 2g_{\mu\nu}R_{;\sigma}^{\sigma} + 2RR_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R^2,$$

$${}^{(3)}H_{\mu\nu} = 2R_{\mu}^{\sigma}R_{\nu\sigma} - \frac{2}{3}RR_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R^{\sigma r}R_{\sigma r} + \frac{1}{4}g_{\mu\nu}R^2.$$

Положив $8\pi G = 1$, уравнение (9.35) можно переписать для пространственно-плоской Вселенной ФРУ в терминах параметра Хаббла

$$H^2 \left(\frac{1}{K_3} - H^2 \right) = -\frac{6K_1}{K_3} (2H\ddot{H} + 6H^2\dot{H} - \dot{H}^2) \quad (9.36)$$

В статье [72] показано, что уравнение (9.36) может быть преобразовано в

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + \frac{dV}{d\phi} = 0 \quad (9.37)$$

где, $H = \dot{\phi}^2$, а потенциал имеет вид $V(\phi) = -m^2\phi^2 + \lambda\phi^6$, со следующими значениями констант $m^2 = \frac{1}{48|K_1|}$, $\lambda = \frac{K_3}{144|K_1|}$. Из этого следует, что в такой модели возможна реализация подстановки масштабного фактора произвольной формы. Данный подход перекликается с подходом получения специальных анзацев, описанных во второй главе диссертации, также позволяющим при задании масштабного фактора находить точные решения. Особенностью модели Старобинского является то обстоятельство, что не зависимо от вида функции $\phi(t)$, определяемой $a(t)$, зависимость $V(\phi)$ всегда одна и та же. Таким образом, для модели Старобинского $\phi = \pm \frac{\sqrt{m\alpha e^{\frac{\alpha t}{2}}}}{\sqrt{\beta + e^{\alpha t}}}$.

Глава 10.

Выбор специальных анзацев в 2-ККМ

10.1. Двухкомпонентная киральная космологическая модель

Действие для самогравитирующей нелинейной сигма модели (НСМ) с потенциалом взаимодействия $V(\varphi)$ имеет вид [12]:

$$S = \int \sqrt{-g} d^4x \left(\frac{R}{2\kappa} + \frac{1}{2} h_{AB}(\varphi) \varphi_{,\mu}^A \varphi_{,\nu}^B g^{\mu\nu} - V(\varphi) \right), \quad (10.1)$$

где $g_{\mu\nu}(x)$ — метрика пространства-времени, h_{AB} — метрика пространства целей (кирального пространства), $\varphi = (\varphi^1, \dots, \varphi^N)$ — киральные поля, $\varphi_{,\mu}^A = \partial_\mu \varphi^A = \frac{\partial \varphi^A}{\partial x^\mu}$.

Тензор энергии-импульса для модели (10.1) записывается в следующей форме

$$T_{\mu\nu} = \varphi_{A,\mu} \varphi_{,\nu}^A - g_{\mu\nu} \left(\frac{1}{2} \varphi_{,\alpha}^A \varphi_{,\beta}^B g^{\alpha\beta} h_{AB} - V(\varphi) \right). \quad (10.2)$$

Уравнения Эйнштейна представим в виде

$$R_{\mu\nu} = \kappa (h_{AB} \varphi_{,\mu}^A \varphi_{,\nu}^B - g_{\mu\nu} V(\varphi)). \quad (10.3)$$

Варьируя действие (10.1) по φ^C , получаем уравнение киральных полей

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g} \varphi_{,\mu}^C) - \frac{1}{2} \frac{\partial h_{BC}}{\partial \varphi^A} \varphi_{,\mu}^C \varphi_{,\nu}^B g^{\mu\nu} + V_{,A} = 0, \quad (10.4)$$

где $V_{,A} = \frac{\partial V}{\partial \varphi^A}$

Равноценная форма записи уравнения (10.4), где явно не расписаны символы Кристоффеля

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} h_{AB} \varphi_{,\nu}^B) - (h_{CD} \Gamma_{AB}^D \varphi_{,\mu}^B \varphi_{,\nu}^C g^{\mu\nu}) + V_{,A} = 0. \quad (10.5)$$

Рассматривая действие (10.1) в рамках космологических пространств, мы приходим к киральной космологической модели [75, 76]. В качестве источника гравитационного поля рассматривается двухкомпонентная нелинейная сигма модель с метрикой пространства целей

$$ds_{ts}^2 = h_{11} d\phi^2 + h_{22} (\phi, \psi) d\psi^2. \quad (10.6)$$

Тензор энергии-импульса (10.2) для киральной метрики (10.6) имеет вид

$$T_{\mu\nu} = h_{11}\phi_{,\mu}\phi_{,\nu} + h_{22}\psi_{,\mu}\psi_{,\nu} - g_{\mu\nu} \left[\frac{1}{2}h_{11}\phi_{,\rho}\phi^{,\rho} + \frac{1}{2}h_{22}\psi_{,\rho}\psi^{,\rho} - V(\phi, \psi) \right]. \quad (10.7)$$

Метрику пространства-времени однородной и изотропной Вселенной запишем в представлении Фридмана – Робертсона – Уокера (ФРУ)

$$ds^2 = dt^2 - a(t)^2 \left(\frac{dr^2}{1 - \epsilon r^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 \right). \quad (10.8)$$

Решения 2-компонентной НСМ с метрикой пространства целей (10.6) для случая предельно жёсткого состояния материи $V(\phi, \psi) = 0$ исследованы в [12, 15] (в этих работах компонента метрики $h_{22}(\phi, \psi)$ имеет обозначение $2P(\phi)$). В [77] введена в рассмотрение массивная нелинейная сигма модель — киральная космологическая модель. В разделе «Выбор специальных анзацев в двухкомпонентной киральной космологической модели» предложен новый подход, который позволяет находить решения не только для пространственно-плоской Вселенной, но и в случае открытой и замкнутой модели Фридмана.

10.2. Выбор специальных анзацев для отыскания точных решений

В работе [78] предпринимались попытки определить анзацы для отыскания точных решений для 2-х компонентной ККМ, однако, окончательно анзацы были определены в [79].

В метрике (10.8) полевые уравнения двухкомпонентной киральной космологической модели (10.4) и уравнения Эйнштейна (10.3) принимают вид:

$$h_{11}\ddot{\phi} + 3Hh_{11}\dot{\phi} - \frac{1}{2}\frac{\partial h_{22}}{\partial\phi}\dot{\psi}^2 + \frac{\partial V}{\partial\phi} = 0, \quad (10.9)$$

$$3H(h_{22}\dot{\psi}) + \partial_t(h_{22}\dot{\psi}) - \frac{1}{2}\frac{\partial h_{22}}{\partial\psi}\dot{\psi}^2 + \frac{\partial V}{\partial\psi} = 0, \quad (10.10)$$

$$H^2 = \frac{\kappa}{3} \left[\frac{1}{2}h_{11}\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}h_{22}\dot{\psi}^2 + V \right] - \frac{\epsilon}{a^2}, \quad (10.11)$$

$$\dot{H} = -\kappa \left[\frac{1}{2}h_{11}\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}h_{22}\dot{\psi}^2 \right] + \frac{\epsilon}{a^2}. \quad (10.12)$$

Записанная система уравнений представляет собой систему обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с четырьмя неизвестными: киральными полями ϕ и ψ , а также с потенциалом V и компонентой метрики кирального пространства h_{22} . Следуя методу точной настройки потенциала [15], считаем, что закон эволюции Вселенной $a = a(t)$ задан. Метрику кирального пространства мы не будем фиксировать однозначно, как это традиционно принято, оставляя некоторую свободу её адаптации к решаемой задаче. Строго говоря, существует по крайней мере три подхода к постановке задачи для подобной системы уравнений (10.9)–(10.12), различающиеся начальным заданием одной из следующих величин:

- 1) потенциала $V(\phi, \psi)$,
- 2) полей $\phi(t)$ и $\psi(t)$,
- 3) масштабного фактора $a(t)$ (параметра Хаббла $H(t)$).

Третий подход был реализован в работах [26], [80], [81].

Простыми алгебраическими преобразованиями уравнений Эйнштейна (10.11)–(10.12) находим их следствия в виде удобном для дальнейшего решения

$$K(t) = \frac{1}{2}h_{11}\dot{\phi}^2(t) + \frac{1}{2}h_{22}(t)\dot{\psi}^2(t) = \frac{1}{\kappa} \left[\frac{\epsilon}{a^2} - \dot{H} \right], \quad (10.13)$$

$$V(t) = \frac{3}{\kappa} \left(H^2 + \frac{1}{3}\dot{H} + \frac{2}{3}\frac{\epsilon}{a^2} \right). \quad (10.14)$$

Рассмотрим три случая:

- (П) $\epsilon = 0$ — случай пространственно плоской Вселенной;
- (О) $\epsilon = -1$ — открытой Вселенной;
- (З) $\epsilon = 1$ — замкнутой Вселенной.

Потребуем, чтобы отображения $\psi(t)$, $\phi(t)$ и $t(\psi)$, $t(\phi)$ были однозначными и простыми.

Для (О) и (З) будем искать решение системы (10.9)–(10.10), (10.13)–(10.14) в следующих трех формах:

ОЗ1)

$$h_{22}(\phi, \psi) \equiv h_{22}(\phi), \quad V(\phi, \psi) = V_1(\phi) + e^{f(\phi)}V_2(\psi). \quad (10.15)$$

ОЗ2)

$$h_{22}(\phi, \psi) = h_{22}^{(1)}(\phi) + h_{22}^{(2)}(\psi), \quad V(\phi, \psi) = V_1(\phi) + V_2(\phi) + V_3(\psi). \quad (10.16)$$

ОЗ3)

$$h_{22}(\phi, \psi) \equiv h_{22}(\psi), \quad V(\phi, \psi) = V_1(\phi) + V_2(\psi). \quad (10.17)$$

Для (П) будем рассматривать три случая:

П1)

$$h_{22}(\phi, \psi) \equiv h_{22}(\psi), \quad V(\phi, \psi) = V_1(\phi) + V_2(\psi). \quad (10.18)$$

П2)

$$h_{22}(\phi, \psi) \equiv h_{22}(\phi), \quad V(\phi, \psi) = V_1(\phi) + V_2(\psi). \quad (10.19)$$

П3)

$$h_{22}(\phi, \psi) \equiv h_{22}(\phi), \quad V(\phi, \psi) = V_1(\phi) + e^{f(\phi)}V_2(\psi). \quad (10.20)$$

Вид функция $f(\phi)$ в (10.15), (10.20) определяется в дальнейшем, при подстановке в систему (10.9)–(10.10), (10.13)–(10.14).

Прежде чем приступить к исследованию анзацев, рассмотрим небольшое отступление.

10.2.1. Специфика вычислений

Допустим, у нас есть следующее выражение

$$V(\phi(t), \psi(t)) = V_1(\phi(t)) + V_2(\psi(t)) = N(t) + M(t),$$

причем $V_1(\phi(t)) = N(t)$, $V_2(\psi(t)) = M(t)$. Возьмем производную по времени от этого выражения, тогда:

$$\frac{dV(\phi(t), \psi(t))}{dt} = \frac{\partial V_1(\phi(t))}{\partial \phi} \dot{\phi} + \frac{\partial V_2(\psi(t))}{\partial \psi} \dot{\psi} = \frac{dN(t)}{dt} + \frac{dM(t)}{dt},$$

разумеется, в этом случае $\frac{\partial V_1(\phi(t))}{\partial \phi} \dot{\phi} = \frac{dN(t)}{dt}$, $\frac{\partial V_2(\psi(t))}{\partial \psi} \dot{\psi} = \frac{dM(t)}{dt}$. Очевидно следующее:

$$\frac{\partial V(\phi, \psi)}{\partial \phi} = \frac{\partial V_1(\phi)}{\partial \phi}, \quad \frac{\partial V(\phi, \psi)}{\partial \psi} = \frac{\partial V_2(\psi)}{\partial \psi}.$$

Рассмотрим некую произвольную систему из двух уравнений с функцией $V(\phi, \psi)$ следующего вида:

$$\mathcal{F}_I(t, \phi, \psi) + \frac{\partial V}{\partial \phi} = 0, \Rightarrow \mathcal{F}_I(t, \phi, \psi) + \frac{\partial V_1}{\partial \phi} = 0,$$

$$\mathcal{F}_{II}(t, \phi, \psi) + \frac{\partial V}{\partial \psi} = 0, \Rightarrow \mathcal{F}_{II}(t, \phi, \psi) + \frac{\partial V_2}{\partial \psi} = 0.$$

Если перейти только ко временной зависимости, то мы можем получить:

$$\mathcal{F}_I(t) + \frac{dN(t)}{dt} \frac{1}{\dot{\phi}} = 0, \tag{10.21}$$

$$\mathcal{F}_{II}(t) + \frac{dM(t)}{dt} \frac{1}{\dot{\psi}} = 0. \tag{10.22}$$

Аналогичным образом можно показать, что для зависимости вида:

$$V(\phi(t), \psi(t)) = V_1(\phi(t)) + V_2(\phi(t)) + V_3(\psi(t)) = N(t) + M(t) + X(t),$$

уравнения (10.21)-(10.22) записываются в форме

$$\mathcal{F}_I(t) + \frac{dN(t)}{dt} \frac{1}{\dot{\phi}} + \frac{dM(t)}{dt} \frac{1}{\dot{\phi}} = 0,$$

$$\mathcal{F}_{II}(t) + \frac{dX(t)}{dt} \frac{1}{\dot{\psi}} = 0.$$

А для разбиения,

$$V(\phi(t), \psi(t)) = V_1(\phi(t)) + A(\phi(t))B(\psi(t)) = N(t) + X(t)M(t),$$

те же уравнения предстают в следующем виде:

$$\mathcal{F}_I(t) + \frac{dN(t)}{dt} \frac{1}{\dot{\phi}} + M(t) \frac{dX(t)}{dt} \frac{1}{\dot{\phi}} = 0,$$

$$\mathcal{F}_{II}(t) + X(t) \frac{dM(t)}{dt} \frac{1}{\dot{\psi}} = 0.$$

10.2.2. Открытая или замкнутая Вселенная ($\epsilon = \pm 1$)

Анзац $[\pm 1a]$

Потенциал (10.14) с помощью разбиения (10.15) можно представить в следующей форме:

$$V_1(\phi(t)) = \frac{3}{\kappa} \left(H^2 + \frac{1}{3} \dot{H} \right), \quad (10.23)$$

$$e^{f(\phi(t))} V_2(\psi(t)) = \frac{2}{\kappa} \frac{\epsilon}{a^2}. \quad (10.24)$$

Аналогично из (10.13) предполагаем связи на темп эволюции полей и метрику кирального пространства :

$$h_{11} \dot{\phi}^2 = \frac{-2}{\kappa} \dot{H}, \quad (10.25)$$

$$h_{22} \dot{\psi}^2 = \frac{2}{\kappa} \frac{\epsilon}{a^2}. \quad (10.26)$$

Тогда уравнение (10.9) расщепляется на две части

$$h_{11} \ddot{\phi} + 3H h_{11} \dot{\phi} + \frac{\partial V_1(\phi)}{\partial \phi} = 0, \quad (10.27)$$

$$-\frac{1}{2} \frac{\partial h_{22}}{\partial \phi} \dot{\psi}^2 + V_2(\psi) e^{f(\phi)} \frac{\partial f(\phi)}{\partial \phi} = 0. \quad (10.28)$$

Из уравнения (10.25) киральное поле ϕ определяется в квадратурах

$$\phi(t) = \pm \int \sqrt{\frac{-2}{\kappa h_{11}} \dot{H}} dt. \quad (10.29)$$

Из уравнения (10.23), используя переход $t \rightarrow \phi$, легко найти зависимость $V_1(\phi)$.

Покажем, что при подстановки (10.23) и (10.25) в уравнение (10.27) получается тождество ($0 \equiv 0$). В уравнении (10.27), используя результаты предыдущего раздела, перейдем только ко временной зависимости, тогда

$$h_{11} \ddot{\phi} + 3H h_{11} \dot{\phi} + \frac{3}{\kappa} \frac{d}{dt} \left(H^2 + \frac{1}{3} \dot{H} \right) \frac{1}{\dot{\phi}} = 0. \quad (10.30)$$

Домножим это уравнение на $\dot{\phi}$ и осуществим подстановку значений из (10.25), учитывая $h_{11} \dot{\phi} \dot{\phi} = -\frac{1}{\kappa} \dot{H}$. После дифференцирования получим

$$-\ddot{H} - 6H\dot{H} + \ddot{H} + 6H\dot{H} \equiv 0. \quad (10.31)$$

Остановимся подробнее на уравнении (10.28). Выразим из (10.26) $\dot{\psi}^2$ и подставим вместе с (10.24) в уравнение (10.28), при этом не будем переходить от производных по полю к производным по времени. Таким образом, получается следующее выражение

$$-\frac{1}{2} \frac{\partial h_{22}}{\partial \phi} \frac{2\epsilon}{\kappa a^2} \frac{1}{h_{22}} + \frac{2\epsilon}{\kappa a^2} \frac{\partial f}{\partial \phi} = 0. \quad (10.32)$$

Сократив одинаковые множители и сделав некоторые преобразования, получим:

$$\frac{\partial \ln(\sqrt{h_{22}(\phi)})}{\partial \phi} = \frac{\partial f(\phi)}{\partial \phi}. \quad (10.33)$$

В результате - $\sqrt{h_{22}(\phi)} = e^{f(\phi)}$.

Рассмотрим уравнение (10.10) в разбиении (10.15)

$$3Hh_{22}\dot{\psi} + \partial_t(h_{22}\dot{\psi}) + e^f \frac{\partial V_2}{\partial \psi} = 0. \quad (10.34)$$

Перейдем только ко временной зависимости, воспользовавшись результатами раздела «Специфика вычислений» 10.2.1, где роль $X(t)$ и $M(t)$ будут выполнять e^f и V_2 , тогда

$$3Hh_{22}\dot{\psi}^2 + \partial_t(h_{22}\dot{\psi})\dot{\psi} + e^f \frac{dV_2}{dt} = 0. \quad (10.35)$$

Осуществим промежуточные преобразования $\partial_t(h_{22}\dot{\psi})\dot{\psi} = \dot{h}_{22}\dot{\psi}^2 + h_{22}\ddot{\psi}\dot{\psi}$, $\partial_t(h_{22}\dot{\psi}^2) = \dot{h}_{22}\dot{\psi}^2 + 2h_{22}\dot{\psi}\ddot{\psi} = -\frac{4}{\kappa} \frac{\epsilon}{a^2} H$, $\partial_t(e^f V_2) = \partial_t(\sqrt{h_{22}})V_2 + \sqrt{h_{22}}\dot{V}_2 = -\frac{4}{\kappa} \frac{\epsilon}{a^2} H$. Далее, учитывая, что $\partial_t(h_{22}\dot{\psi})\dot{\psi} = -h_{22}\ddot{\psi}\dot{\psi} - \frac{4}{\kappa} \frac{\epsilon}{a^2} H$, $\sqrt{h_{22}}\dot{V}_2 = -\frac{\partial_t(\sqrt{h_{22}})}{\sqrt{h_{22}}} \frac{2\epsilon}{\kappa a^2} - \frac{4}{\kappa} \frac{\epsilon}{a^2} H$ и $\frac{\partial_t(\sqrt{h_{22}})}{\sqrt{h_{22}}} = \frac{1}{2} \frac{\dot{h}_{22}}{h_{22}}$, уравнение (10.35) может быть представлено следующим образом

$$2\frac{\dot{a}}{a} + 2\frac{\ddot{\psi}}{\dot{\psi}} + \frac{\dot{h}_{22}}{h_{22}} = 0. \quad (10.36)$$

Сделаем следующее предположение

$$\sqrt{h_{22}} = \frac{1}{a}, \quad V_2 = 2\frac{\epsilon}{\kappa} \frac{1}{a}. \quad (10.37)$$

Осуществив подстановку в уравнение (10.36), мы получим простое соотношение:

$$2\frac{\ddot{\psi}}{\dot{\psi}} = 0.$$

Откуда (с учетом константы) получаем значение поля ψ

$$\psi(t) = \sqrt{\frac{2\epsilon}{\kappa}} t + \psi_0. \quad (10.38)$$

Из (10.37), зная масштабный фактор и воспользовавшись переходом $t \rightarrow \phi$ и $t \rightarrow \psi$ можно найти оставшиеся неизвестные функции $h_{22}(\phi)$ и $V_2(\psi)$.

Таким образом, анзац $[\pm 1a]$ с разбиением потенциала V (10.15) и предположением (10.37), при известной зависимости масштабного фактора $a(t)$ позволяет найти эволюцию полей $\phi(t)$, $\psi(t)$ а также $V(\phi, \psi)$ и $h_{22}(\phi)$.

Анзац $[\pm 1b]$

Для анзаца $[\pm 1b]$ процедура отыскания решения практически полностью повторяет процедуру анзаца $[\pm 1a]$, но отличается тем, что в формуле (10.37) делается иное предположение, а именно

$$\sqrt{h_{22}} = \frac{1}{a^{m+2}}, \quad V_2 = 2\frac{\epsilon}{\kappa}a^m. \quad (10.39)$$

Тогда уравнение (10.36) сведется к простой зависимости

$$(1+m)\frac{\dot{a}}{a} = \frac{\ddot{\psi}}{\dot{\psi}}.$$

Откуда получаем зависимость $\psi(t)$

$$\psi(t) = \sqrt{\frac{2\epsilon}{\kappa}} \int a^{1+m} dt. \quad (10.40)$$

Вид зависимостей $\phi(t)$ и $V_1(\phi)$ определяется как и для анзаца $[\pm 1a]$ (для заданной эволюции $a(t)$), функции $h_{22}(\phi)$ и $V_2(\psi)$ определяются из формулы (10.39) при переходе $t \rightarrow \phi$ и $t \rightarrow \psi$. В частности для модели «появляющейся» вселенной с масштабным фактором $a(t) = A(\beta + e^{\alpha t})^m$ анзац $[\pm 1b]$ не позволяет вычислить интеграл (10.40) в таком виде, который обеспечил бы возможность явно выразить $t(\psi)$, что влечет за собой невозможность получения зависимости V_2 от ψ напрямую, а только посредством зависимости этой величины от t .

Таким образом, анзац $[\pm 1b]$ с разбиением потенциала V (10.15) и предположением (10.39), при известной зависимости масштабного фактора $a(t)$ позволяет найти эволюцию полей $\phi(t)$, $\psi(t)$ а также $V(\phi, \psi)$ и $h_{22}(\phi)$.

Анзац $[\pm 1c]$

Для анзаца $[\pm 1c]$ процедура отыскания решения практически полностью повторяет процедуру анзаца $[\pm 1a]$ но отличается тем, что в формуле (10.37) делается иное предположение, а именно

$$\sqrt{h_{22}} = a^m, \quad V_2 = 2\frac{\epsilon}{\kappa}a^{-(m+2)}. \quad (10.41)$$

Тогда уравнение (10.36) сведется к простой зависимости

$$-(1+m)\frac{\dot{a}}{a} = \frac{\ddot{\psi}}{\dot{\psi}}.$$

Откуда получаем зависимость $\psi(t)$

$$\psi(t) = \sqrt{\frac{2\epsilon}{\kappa}} \int a^{-(1+m)} dt. \quad (10.42)$$

Вид зависимостей $\phi(t)$ и $V_1(\phi)$ определяется как и для анзаца $[\pm 1a]$ (для заданной эволюции $a(t)$), функции $h_{22}(\phi)$ и $V_2(\psi)$ определяются из формулы (10.41) при переходе $t \rightarrow \phi$ и $t \rightarrow \psi$. В частности для модели «появляющейся» вселенной с масштабным

фактором $a(t) = A(\beta + e^{\alpha t})^m$ анзац $[\pm 1c]$ не позволяет вычислить интеграл (10.42) в таком виде, который обеспечил бы возможность явно выразить $t(\psi)$, что влечет за собой невозможность получения зависимости V_2 от ψ напрямую, а только посредством зависимости этой величины от t .

Таким образом, анзац $[\pm 1c]$ с разбиением потенциала V (10.15) и предположением (10.41), при известной зависимости масштабного фактора $a(t)$ позволяет найти эволюцию полей $\phi(t)$, $\psi(t)$ а также $V(\phi, \psi)$ и $h_{22}(\phi)$.

Анзац $[\pm 1d]$

Для анзаца $[\pm 1d]$ существуют более общие связи между h_{22} , ψ и V_2 чем для анзацев $[\pm 1a]$ – $[\pm 1c]$. Будем полагать следующее:

$$h_{22}(\phi(t)) = \frac{1}{a^2 * F^2}, \quad \dot{\psi}^2 = \frac{2\epsilon}{\kappa} F^2, \quad V_2(\psi(t)) = \frac{2\epsilon}{\kappa} \frac{1}{a} F, \quad (10.43)$$

где F – произвольная функция времени.

Осуществим данные подстановки в (10.35). Произведя математические преобразования, аналогичные тем, которые были проделаны для анзаца $[\pm 1a]$ при получении формулы (10.36), приходим к практически аналогичному выражению:

$$2\frac{\dot{a}}{a} + 2\frac{\dot{F}}{F} + \frac{\dot{h}_{22}}{h_{22}} = 0, \quad (10.44)$$

здесь $\frac{\dot{\psi}}{\psi} = \frac{\dot{F}}{F}$.

Как легко показать непосредственным вычислением из сделанных нами предположений (10.43) следует

$$\frac{\dot{h}_{22}}{h_{22}} = -2 \left(\frac{\dot{a}}{a} + \frac{\dot{F}}{F} \right). \quad (10.45)$$

При подстановке этого результата в предыдущее выражение, мы приходим к тождеству $0 \equiv 0$. В результате, для анзаца $[\pm 1d]$ можно задавать произвольную функцию ψ благодаря тому, что $F(t)$ – можно выбирать в любой удобной форме.

$$\psi = \sqrt{\frac{2\epsilon}{\kappa}} \int F dt \quad (10.46)$$

Вид зависимостей $\phi(t)$ и $V_1(\phi)$ определяется как и для анзаца $[\pm 1a]$ (для заданной эволюции $a(t)$), функции $h_{22}(\phi)$ и $V_2(\psi)$ определяются из формулы (10.43) при переходе $t \rightarrow \phi$ и $t \rightarrow \psi$.

Таким образом, анзац $[\pm 1d]$ с разбиением потенциала V (10.15) и предположением (10.43), при известной зависимости масштабного фактора $a(t)$ позволяет найти эволюцию полей $\phi(t)$, $\psi(t)$ а также $V(\phi, \psi)$ и $h_{22}(\phi)$.

Анзац $[\pm 2]$

В анзаце $[\pm 2]$ для потенциала (10.14) используется разбиение (10.16), которое позволяет сделать следующие предположения:

$$V_1(\phi(t)) = \frac{3}{\kappa} \left(H^2 + \frac{1}{3} \dot{H} \right), \quad (10.47)$$

$$V_2(\phi(t)) + V_3(\psi(t)) = \frac{2}{\kappa} \frac{\epsilon}{a^2}. \quad (10.48)$$

Решение для $\phi(t)$ и $V_1(\phi)$ находятся аналогично процедуре, используемой для анзаца $[\pm 1a]$, так как для этих величин разбиение (10.16) соответствует разбиению (10.15). Таким образом, (10.9) расщепляется на два уравнения. Первое зависит только от $\phi(t)$ и $V_1(\phi)$ и имеет точно такую же структуру, как и для анзаца $[\pm 1a]$. Второе, которое является специфическим признаком анзаца $[\pm 2]$, имеет вид:

$$-\frac{1}{2} \frac{\partial h_{22}^{(1)}}{\partial \phi} \dot{\psi}^2 + \frac{\partial V_2}{\partial \phi} = 0, \quad (10.49)$$

индексы (1) и (2) при h_{22} , означают следующее $h_{22}(\phi, \psi) = h_{22}^{(1)}(\phi) + h_{22}^{(2)}(\psi)$.

Рассмотрим уравнение (10.10) с учетом разбиения (10.16)

$$3Hh_{22}\dot{\psi} + \partial_t(h_{22}\dot{\psi}) - \frac{1}{2} \frac{\partial h_{22}^{(2)}}{\partial \psi} \dot{\psi}^2 + \frac{\partial V_3}{\partial \psi} = 0. \quad (10.50)$$

Перейдем только ко временной зависимости, учитывая результаты раздела «Специфика вычислений» 10.2.1, и совершим подстановки

$$h_{22}\dot{\psi}^2 = 2\frac{\epsilon}{\kappa}a^{-2}, \quad \dot{h}_{22}\dot{\psi}^2 = -h_{22}\dot{\psi}\ddot{\psi} - 4\frac{\epsilon}{\kappa}\frac{\dot{a}}{a^3}, \quad h_{22} = 2\frac{\epsilon}{\kappa}a^{-2}\frac{1}{\dot{\psi}^2},$$

тогда уравнение запишется в виде:

$$2\frac{\epsilon}{\kappa}\frac{\dot{a}}{a^3} - 2\frac{\epsilon}{\kappa}\frac{1}{a^2}\frac{\ddot{\psi}}{\dot{\psi}} - \frac{1}{2}\frac{dh_{22}^{(2)}}{dt}\dot{\psi}^2 + \frac{dV_3}{dt} = 0, \quad (10.51)$$

здесь роль функции $X(t)$ выполняет V_3 . Сделаем предположение

$$\dot{\psi} = a\sqrt{\frac{2\epsilon}{\kappa}}. \quad (10.52)$$

Перейдем в уравнении (10.49) ко временной зависимости, учитывая, что роль функции $M(t)$ выполняет V_2 , и запишем его рядом с ненулевой частью уравнения (10.51)

$$-\frac{1}{2}\frac{dh_{22}^{(1)}}{dt}\dot{\psi}^2 + \frac{dV_2}{dt} = 0, \quad (10.53)$$

$$-\frac{1}{2}\frac{dh_{22}^{(2)}}{dt}\dot{\psi}^2 + \frac{dV_3}{dt} = 0. \quad (10.54)$$

Для разрешения данной системы сделаем следующее предположение

$$V_2(t) = 2\frac{\epsilon}{\kappa}\frac{F}{a^2}, \quad V_3(t) = 2\frac{\epsilon}{\kappa}\frac{1-F}{a^2}, \quad (10.55)$$

$$h_{22}^{(1)}(t)\dot{\psi}^2 = 2\frac{\epsilon}{\kappa}\frac{C}{a^2}, \quad h_{22}^{(2)}(t)\dot{\psi}^2 = 2\frac{\epsilon}{\kappa}\frac{1-C}{a^2}, \quad (10.56)$$

здесь F и C – некоторые постоянные.

После подстановки этих значений в (10.53) и (10.54), а так же значения $\dot{\psi}$ мы приходим к равенству $F = C$. В результате, мы можем записать

$$V_2(t) = 2\frac{\epsilon}{\kappa} \frac{F}{a^2}, V_3(t) = 2\frac{\epsilon}{\kappa} \frac{1-F}{a^2}, h_{22}^{(1)}(t) = \frac{F}{a^4}, h_{22}^{(2)}(t) = \frac{1-F}{a^4}, \dot{\psi} = \sqrt{\frac{2\epsilon}{\kappa}} a. \quad (10.57)$$

Следовательно, получая зависимость $\psi(t)$ из формулы

$$\psi = \sqrt{\frac{2\epsilon}{\kappa}} \int a dt, \quad (10.58)$$

возможно найти зависимость $h_{22}^{(2)}(\psi)$, $V_3(\psi)$, осуществляя переход $t \rightarrow \psi$. Вид зависимостей $\phi(t)$ и $V_1(\phi)$ определяется как и для анзаца $[\pm 1a]$ (для заданной эволюции $a(t)$). После определения $\phi(t)$ из (10.57) находим $h_{22}^{(1)}(\phi)$ и $V_2(\phi)$ при переходе $t \rightarrow \phi$.

Таким образом, анзац $[\pm 2]$ с разбиением потенциала V (10.16) и специфическим поведением функций (10.57), при известной зависимости масштабного фактора $a(t)$ позволяет найти эволюцию полей $\phi(t)$, $\psi(t)$ а также $V(\phi, \psi)$ и $h_{22}(\phi)$.

Анзац $[\pm 3a]$

Для анзаца $[\pm 3a]$ характерно разбиение (10.17), где V_1 имеет вид

$$V_1(\phi(t)) = \frac{3}{\kappa} \left(H^2 + \frac{1}{3} \dot{H} \right). \quad (10.59)$$

В этом случае уравнение (10.9) записывается в следующей форме

$$h_{11} \ddot{\phi} + 3H h_{11} \dot{\phi}^2 + \frac{\partial V_1}{\partial \phi} = 0. \quad (10.60)$$

Значения ϕ и $V_1(\phi)$ определяются аналогично процедуре, используемой для анзаца $[\pm 1a]$. Для нахождения остальных неизвестных, а именно ψ , $h_{22}(\psi)$ и $V_2(\psi)$ остается уравнение (10.10). При использовании разбиения (10.17) выявляются следующие особенности

$$V_2(t) = 2\frac{\epsilon}{\kappa} \frac{1}{a^2}. \quad (10.61)$$

Уравнение (10.10) для разбиения (10.17) сохраняет свою структуру

$$3H(h_{22}\dot{\psi}) + \partial_t(h_{22}\dot{\psi}) - \frac{1}{2} \frac{\partial h_{22}}{\partial \psi} \dot{\psi}^2 + \frac{\partial V_2}{\partial \psi} = 0. \quad (10.62)$$

Перейдем в (10.62) только ко временной зависимости

$$3H h_{22} \dot{\psi}^2 + \dot{h}_{22} \dot{\psi}^2 + h_{22} \ddot{\psi} \dot{\psi} - \frac{1}{2} \dot{h}_{22} \dot{\psi}^2 + \dot{V}_2 = 0. \quad (10.63)$$

Запишем некоторые вспомогательные формулы $\dot{h}_{22} \dot{\psi}^2 = -2h_{22} \ddot{\psi} \dot{\psi} - 4\frac{\epsilon}{\kappa} \frac{\dot{a}}{a^3}$, $\dot{V}_2 = -4\frac{\epsilon}{\kappa} \frac{\dot{a}}{a^3}$, $h_{22} \dot{\psi} = \frac{2\epsilon}{\kappa} \frac{1}{a^2}$. Осуществив подстановку этих выражений в (10.63) и произведя некоторые преобразования, можно прийти к уравнению

$$\frac{\dot{a}}{a} + \frac{\ddot{\psi}}{\dot{\psi}} + \frac{1}{2} \frac{\dot{h}_{22}}{h_{22}} = 0. \quad (10.64)$$

Делаем следующее предположение, что $\psi(t) = \sqrt{\frac{2\epsilon}{\kappa}}t + \psi_0$, тогда из соотношения $h_{22}\dot{\psi}^2 = \frac{2\epsilon}{\kappa} \frac{1}{a^2}$ получаем $h_{22} = \frac{1}{a^2}$. Теперь, если подставить все в уравнение (10.64), получим тождественный ноль. В результате, зная зависимости $h_{22}(t)$ и $V_2(t)$, при известном поведении $a(t)$, можно найти $h_{22}(\psi)$ и $V_2(\psi)$, воспользовавшись переходом $t \rightarrow \psi$.

Таким образом, анзац $[\pm 3a]$ с разбиением потенциала V (10.17) и характерными зависимостями $\psi(t) = \sqrt{\frac{2\epsilon}{\kappa}}t + \psi_0$, $h_{22} = \frac{1}{a^2}$, $V_2 = \frac{2\epsilon}{\kappa} \frac{1}{a^2}$, $h_{11}\dot{\phi}^2 = -\frac{2}{\kappa}\dot{H}$, $V_1 = \frac{3}{\kappa} \left(H^2 + \frac{1}{3}\dot{H} \right)$, при известном поведении масштабного фактора $a(t)$, позволяет найти эволюцию полей $\phi(t)$, $\psi(t)$, а также $h_{22}(\psi)$, $V(\phi, \psi)$.

Анзац $[\pm 3b]$

Для анзаца $[\pm 3b]$ процедура отыскания решения практически полностью повторяет процедуру анзаца $[\pm 3a]$, но отличается тем, что делается иное предположение на зависимости $\psi(t) = \int \sqrt{\frac{2\epsilon}{\kappa}} a^m dt$ и $h_{22} = \frac{1}{a^{2m+2}}$. Поведение $V_2(t)$ имеет тот же характер, что и для анзаца $[\pm 3a]$. Уравнение (10.64) справедливо и для анзаца $[\pm 3b]$. Если подставить в него значения для ψ и h_{22} , то получается выражение

$$\frac{\dot{a}}{a} + m \frac{\dot{a}}{a} - \frac{1}{2}(2m+2) \frac{\dot{a}}{a} \equiv 0. \quad (10.65)$$

Следовательно, величины $\phi(t)$ и $V_1(\phi)$ определяются как и для анзаца $[\pm 1a]$, а $V_2(\psi)$ и $h_{22}(\psi)$ при переходе $t \rightarrow \psi$.

Таким образом, анзац $[\pm 3b]$ с разбиением потенциала V (10.17) и характерными зависимостями $\psi(t) = \int \sqrt{\frac{2\epsilon}{\kappa}} a^m dt$, $h_{22} = \frac{1}{a^{2m+2}}$, $V_2 = \frac{2\epsilon}{\kappa} \frac{1}{a^2}$, $h_{11}\dot{\phi}^2 = -\frac{2}{\kappa}\dot{H}$, $V_1 = \frac{3}{\kappa} \left(H^2 + \frac{1}{3}\dot{H} \right)$, при известном поведении масштабного фактора $a(t)$, позволяет найти эволюцию полей $\phi(t)$, $\psi(t)$, а также $h_{22}(\psi)$, $V(\phi, \psi)$.

Для модели «появляющейся» вселенной с масштабным фактором $a(t) = A(\beta + e^{at})^m$ анзац $[\pm 3b]$ не позволяет вычислить интеграл $\psi(t) = \int \sqrt{\frac{2\epsilon}{\kappa}} a^m dt$ в таком виде, который обеспечил бы возможность явно выразить $t(\psi)$, что влечет за собой невозможность получения зависимости V_2 и h_{22} от ψ напрямую, а только посредством зависимости этих величин от t .

Анзац $[\pm 3c]$

Для анзаца $[\pm 3c]$ процедура отыскания решения практически полностью повторяет процедуру анзаца $[\pm 3a]$, но отличается тем, что делается иное предположение на зависимости $\psi(t) = \int \sqrt{\frac{2\epsilon}{\kappa}} \frac{1}{a^m} dt$ и $h_{22} = a^{2m-2}$. Поведение $V_2(t)$ имеет тот же характер, что и для анзаца $[\pm 3a]$. Уравнение (10.64) справедливо и для анзаца $[\pm 3c]$. Если подставить в него значения для ψ и h_{22} , то получается выражение

$$\frac{\dot{a}}{a} - m \frac{\dot{a}}{a} - \frac{1}{2}(2m-2) \frac{\dot{a}}{a} \equiv 0. \quad (10.66)$$

Следовательно, величины $\phi(t)$ и $V_1(\phi)$ определяются как и для анзаца $[\pm 1a]$, а $V_2(\psi)$ и $h_{22}(\psi)$ при переходе $t \rightarrow \psi$.

Таким образом, анзац $[\pm 3c]$ с разбиением потенциала V (10.17) и характерными зависимостями $\psi(t) = \int \sqrt{\frac{2\epsilon}{\kappa} \frac{1}{a^m}} dt$, $h_{22} = a^{2m-2}$, $V_2 = \frac{2\epsilon}{\kappa} \frac{1}{a^2}$, $h_{11}\dot{\phi}^2 = -\frac{2}{\kappa}\dot{H}$, $V_1 = \frac{3}{\kappa} \left(H^2 + \frac{1}{3}\dot{H} \right)$, при известном поведении масштабного фактора $a(t)$, позволяет найти эволюцию полей $\phi(t)$, $\psi(t)$, а также $h_{22}(\psi)$, $V(\phi, \psi)$.

Для модели «появляющейся» вселенной с масштабным фактором $a(t) = A(\beta + e^{\alpha t})^m$ анзац $[\pm 3c]$ не позволяет вычислить интеграл $\psi(t) = \int \sqrt{\frac{2\epsilon}{\kappa} \frac{1}{a^m}} dt$ в таком виде, который обеспечил бы возможность явно выразить $t(\psi)$, что влечет за собой невозможность получения зависимости V_2 и h_{22} от ψ напрямую, а только посредством зависимости этих величин от t .

Анзац $[\pm 3d]$

Анзац $[\pm 3d]$ обобщает анзацы $[\pm 3a]$ – $[\pm 3c]$, так же как и анзац $[\pm 1d]$ является обобщением для анзацев $[\pm 1a]$ – $[\pm 1c]$. Отличие $[\pm 3d]$ от $[\pm 3a]$ кроется в предположениях, накладываемых на h_{22} и ψ , а именно $h_{22}(t) = \frac{1}{a^2} \frac{1}{F^2}$, $\dot{\psi} = \sqrt{\frac{2\epsilon}{\kappa}} F$, где F – произвольная функция времени. Вид зависимости $V_2(t)$ идентичен зависимости для анзаца $[\pm 3a]$. Как следует из непосредственной проверки вид уравнения (10.64), не зависит от разбиения $h_{22}(\psi(t))$ и $\psi(t)$, если только они образуют комбинацию $h_{22}\dot{\psi}^2 = \frac{2\epsilon}{\kappa} \frac{1}{a^2}$. При подстановке предположений анзаца $[\pm 3d]$ для этих параметров, в уравнение (10.64), получим тождество

$$\frac{\dot{a}}{a} + \frac{\ddot{\psi}}{\dot{\psi}} - \left(\frac{\dot{a}}{a} + \frac{\ddot{\psi}}{\dot{\psi}} \right) \equiv 0. \quad (10.67)$$

Таким образом, следует еще раз подчеркнуть, что для этого анзаца вид функции $\psi(t)$ может быть выбран любым, так как F – произвольная функция времени. Нахождение неизвестных величин $h_{22}(\psi)$, $V_2(\psi)$ аналогично сценарию для предыдущих анзацев.

Рассмотрим два момента.

Во-первых, при получении уравнения (10.64) из (10.63) мы воспользовались небольшой хитростью: в формуле (10.63) не было произведено прямое вычитание $\dot{h}_{22}\dot{\psi}^2 - \frac{1}{2}\dot{h}_{22}\dot{\psi}^2$. Вместо этого было записано следующее $\dot{h}_{22}\dot{\psi}^2 = -2h_{22}\ddot{\psi}\dot{\psi} - 4\frac{\epsilon}{\kappa} \frac{\dot{a}}{a^3}$, $\frac{1}{2}\dot{h}_{22}\dot{\psi}^2 = \frac{1}{2}\frac{\dot{h}_{22}}{h_{22}} \frac{2\epsilon}{\kappa} \frac{1}{a^2}$. Подставляя оба этих выражения в (10.63), приводя подобные и осуществляя остальные подстановки, мы и приходим к уравнению (10.64). Но если сначала произвести это вычитание, а после осуществить подстановки $\frac{1}{2}\dot{h}_{22}\dot{\psi}^2 = -h_{22}\ddot{\psi}\dot{\psi} - 2\frac{\epsilon}{\kappa} \frac{\dot{a}}{a^3}$, $\dot{V}_2 = -\frac{4\epsilon}{\kappa} \frac{\dot{a}}{a^3}$, $3Hh_{22}\dot{\psi}^2 = 6\frac{\epsilon}{\kappa} \frac{\dot{a}}{a^3}$, то получается тождество $0 \equiv 0$.

Во-вторых, мы можем показать, что уравнение (10.64) сводится к зависимости $h_{22}\dot{\psi}^2 = \frac{2\epsilon}{\kappa} \frac{1}{a^2}$. Запишем

$$2\frac{\dot{a}}{a} + 2\frac{\ddot{\psi}}{\dot{\psi}} + \frac{\dot{h}_{22}}{h_{22}} = 0. \quad (10.68)$$

Однократно проинтегрировав данное уравнение по времени, можно получить

$$\ln(a^2) + \ln(\dot{\psi}^2) + \ln(h_{22}) + \ln(D) = \ln(Da^2h_{22}\dot{\psi}^2) = 0. \quad (10.69)$$

Таким образом, $Da^2h_{22}\dot{\psi}^2 = 1$, где D – константа интегрирования, которую очень легко определить. Т.к. $h_{22}\dot{\psi}^2 = \frac{2}{\kappa} \frac{\epsilon}{a^2}$, то $D = \frac{\kappa}{2\epsilon}$.

Следовательно, анзац $[\pm 3d]$, являющийся обобщением анзацев $[\pm 3a]$ – $[\pm 3c]$, с разбиением потенциала V (10.17) и характерными зависимостями $\dot{\psi} = \sqrt{\frac{2\epsilon}{\kappa}} F$, $h_{22}(t) = \frac{1}{a^2} \frac{1}{F^2}$, $V_2 = \frac{2\epsilon}{\kappa} \frac{1}{a^2}$, $h_{11}\dot{\phi}^2 = -\frac{2}{\kappa}\dot{H}$, $V_1 = \frac{3}{\kappa} \left(H^2 + \frac{1}{3}\dot{H} \right)$, при известном поведении масштабного фактора $a(t)$, позволяет найти эволюцию полей $\phi(t)$, $\psi(t)$, а также $h_{22}(\psi)$, $V(\phi, \psi)$.

10.2.3. Пространственно-плоская Вселенная ($\epsilon = 0$)

Анзац [01]

Уравнение (10.13) разобьём на два ($\epsilon = 0$)

$$h_{11}\dot{\phi}^2 = \frac{-2\lambda}{\kappa}\dot{H}, \quad (10.70)$$

$$h_{22}\dot{\psi}^2 = \frac{-2(1-\lambda)}{\kappa}\dot{H}, \quad (10.71)$$

где $0 < \lambda < 1$.

Потенциал взаимодействия киральных полей $V(\phi(t), \psi(t))$ представим следующим образом

$$V(\phi(t), \psi(t)) = V_1(\phi(t)) + V_2(\psi(t)). \quad (10.72)$$

Для этого анзаца характерно $h_{22}(\phi, \psi) \equiv h_{22}(\psi)$. Запишем полевые уравнения для данного случая

$$h_{11}\ddot{\phi} + 3Hh_{11}\dot{\phi} + \frac{\partial V_1}{\partial \phi} = 0, \quad (10.73)$$

$$3Hh_{22}\dot{\psi} + \partial_t(h_{22}\dot{\psi}) - \frac{1}{2} \frac{\partial h_{22}}{\partial \psi} \dot{\psi}^2 + \frac{\partial V_2}{\partial \psi} = 0. \quad (10.74)$$

Сделаем в обоих уравнениях переход ко временной зависимости, домножив первое на $\dot{\phi}$, а второе на $\dot{\psi}$, тогда

$$h_{11}\ddot{\phi}\dot{\phi} + 3Hh_{11}\dot{\phi}^2 + \frac{dV_1}{dt} = 0, \quad (10.75)$$

$$3Hh_{22}\dot{\psi}^2 + \partial_t(h_{22}\dot{\psi})\dot{\psi} - \frac{1}{2} \frac{dh_{22}}{dt} \dot{\psi}^2 + \frac{dV_2}{dt} = 0. \quad (10.76)$$

Произведем промежуточные вычисления. Возьмем производную по времени от уравнений (10.70), (10.71), в результате получим $h_{11}\dot{\phi}\ddot{\phi} = -\frac{\lambda}{\kappa}\dot{H}\dot{H}$, $\dot{h}_{22}\dot{\psi}^2 = -2h_{22}\dot{\psi}\ddot{\psi} - \frac{2(1-\lambda)}{\kappa}\dot{H}\dot{H}$. Осуществим подстановку значений $\dot{\phi}$ и $\dot{\phi}\dot{\phi}$ в уравнение (10.75), тогда оно примет вид

$$-\frac{\lambda}{\kappa}(\ddot{H} + 6\dot{H}H) + \frac{dV_1}{dt} = 0. \quad (10.77)$$

Произведем преобразование уравнения (10.76)

$$3Hh_{22}\dot{\psi}^2 + \frac{1}{2}\dot{h}_{22}\dot{\psi}^2 + h_{22}\ddot{\psi}\dot{\psi} + \frac{dV_2}{dt} = 0. \quad (10.78)$$

Осуществим подстановки в (10.78) $h_{22}\dot{\psi}^2$ и $h_{22}\dot{\psi}^2$, тогда

$$-\frac{1-\lambda}{\kappa}(\ddot{H} + 6\dot{H}H) + \frac{dV_2}{dt} = 0. \quad (10.79)$$

Таким образом, уравнения (10.77) и (10.79) имеют одинаковую структуру с точностью до коэффициента при скобке и потенциала. Полный потенциал в зависимости от времени имеет вид ($\epsilon = 0$)

$$V(t) = V_1(t) + V_2(t) = \frac{1}{\kappa} \left(\dot{H} + 3H^2 \right). \quad (10.80)$$

Продифференцировав (10.80) по времени мы получим $\dot{V}(t) = \dot{V}_1(t) + \dot{V}_2(t) = \frac{1}{\kappa} \left(\ddot{H} + 6\dot{H}H \right)$. В результате, чтобы уравнения (10.77) и (10.79) при подстановке значений потенциалов V_1 и V_2 тождественно равнялись нулю, необходимо, чтобы потенциалы имели следующий вид

$$V_1(t) = \frac{\lambda}{\kappa} \left(\dot{H} + 3H^2 \right), \quad V_2(t) = \frac{1-\lambda}{\kappa} \left(\dot{H} + 3H^2 \right). \quad (10.81)$$

Следовательно, мы определили зависимость потенциалов V_1 и V_2 от времени. Перейдем к вопросу о зависимости $\psi(t)$ и $h_{22}(t)$. Как можно видеть для анзацев $[\pm 1d]$ и $[\pm 3d]$, уравнения поля имеют решения при произвольном задании вида зависимости $\psi(t)$ и $h_{22}(t)$, если только эти величины составляют структуру $h_{22}\dot{\psi}^2$ с первоначально выбранным значением (для анзацев $[\pm 1d]$ и $[\pm 3d]$ $\frac{2\epsilon}{\kappa a^2}$ ($\epsilon = \pm 1$)). При рассуждениях для анзаца $[01]$ до этого момента мы не предполагали вида зависимости для $\psi(t)$ и $h_{22}(t)$, и тем не менее получили для полевых уравнений тождества, задавая лишь величину $h_{22}\dot{\psi}^2$. В результате, мы можем записать общий вид зависимости $\psi(t)$ и $h_{22}(t)$

$$\dot{\psi}(t) = \pm \sqrt{\frac{2(1-\lambda)}{\kappa}} F(t), \quad h_{22}(t) = -\dot{H} \frac{1}{F(t)^2}, \quad (10.82)$$

где $F(t)$ – произвольная функция времени. Например, $F(t) = 1$, тогда

$$\dot{\psi} = \pm \sqrt{\frac{2(1-\lambda)}{\kappa}}, \quad h_{22} = -\dot{H}. \quad (10.83)$$

Таким образом, определив $\phi(t)$ из (10.70) и $\psi(t)$ из (10.82), и используя переходы $t \rightarrow \phi$, $t \rightarrow \psi$, найдем и $V_1(\phi)$, $V_2(\psi)$ из (10.81), $h_{22}(\psi)$ из (10.82).

Анзац [01] с разбиением потенциала V (10.18) и характерными зависимостями $\dot{\psi}(t) = \pm \sqrt{\frac{2(1-\lambda)}{\kappa}} F(t)$, $h_{22} = -\dot{H} \frac{1}{F(t)^2}$, $V_1 = \frac{3\lambda}{\kappa} \left(H^2 + \frac{1}{3}\dot{H} \right)$, $h_{11}\dot{\phi}^2 = -\frac{2\lambda}{\kappa}\dot{H}$, $V_2 = \frac{3(1-\lambda)}{\kappa} \left(H^2 + \frac{1}{3}\dot{H} \right)$, при известном поведении масштабного фактора $a(t)$, позволяет найти эволюцию полей $\phi(t)$, $\psi(t)$, а также $h_{22}(\psi)$, $V(\phi, \psi)$.

Анзац [02]

Для анзаца [02] характерна зависимость П2 (10.19), т.е.

$$h_{22}(\phi, \psi) \equiv h_{22}(\phi), \quad V(\phi, \psi) = V_1(\phi) + V_2(\psi).$$

Уравнение (10.13) разобьем следующим образом ($\epsilon = 0, h_{22}(\phi)$)

$$h_{11}\dot{\phi}^2 = \frac{2\dot{a}^2}{\kappa a^2}, \quad (10.84)$$

$$h_{22}\dot{\psi}^2 = \frac{-2\ddot{a}}{\kappa a}. \quad (10.85)$$

Одновременно сделаем предположение и для разбиения потенциала (10.14)

$$V_1(\phi(t)) = \frac{2\dot{a}^2}{\kappa a^2}, \quad (10.86)$$

$$V_2(\psi(t)) = \frac{1\ddot{a}}{\kappa a}. \quad (10.87)$$

Тогда уравнения (10.9)-(10.10) запишутся следующим образом:

$$h_{11}\ddot{\phi} + 3Hh_{11}\dot{\phi} - \frac{1}{2}\frac{\partial h_{22}(\phi)}{\partial \phi}\dot{\psi}^2 + \frac{\partial V_1(\phi)}{\partial \phi} = 0, \quad (10.88)$$

$$3Hh_{22}(\phi)\dot{\psi} + \partial_t(h_{22}(\phi)\dot{\psi}) + \frac{\partial V_2(\psi)}{\partial \psi} = 0. \quad (10.89)$$

Перейдем только ко временной зависимости в этих уравнениях. Таким образом:

$$h_{11}\ddot{\phi} + 3Hh_{11}\dot{\phi}^2 - \frac{1}{2}\dot{h}_{22}\dot{\psi}^2 + \dot{V}_1 = 0, \quad (10.90)$$

$$3Hh_{22}\dot{\psi}^2 + \partial_t(h_{22}\dot{\psi})\dot{\psi} + \dot{V}_2 = 0. \quad (10.91)$$

Произведем промежуточные математические преобразования. Возьмем производные от выражений (10.84)-(10.87), тогда $h_{11}\ddot{\phi} = \frac{1}{\kappa}\left(\frac{2\dot{a}\ddot{a}}{a^2} - \frac{2\dot{a}^3}{a^3}\right)$, $\dot{h}_{22}\dot{\psi}^2 + 2h_{22}\ddot{\psi}\dot{\psi} = -\frac{2}{\kappa}\left(\frac{\ddot{a}}{a} - \frac{\dot{a}\dot{a}}{a^2}\right)$, $\dot{V}_1 = \frac{2}{\kappa}\left(\frac{2\dot{a}\ddot{a}}{a^2} - \frac{2\dot{a}^3}{a^3}\right)$, $\dot{V}_2 = \frac{1}{\kappa}\left(\frac{\ddot{a}}{a} - \frac{\dot{a}\dot{a}}{a^2}\right)$. Далее в уравнении (10.91) распишем производную от произведения, т.е. $\partial_t(h_{22}\dot{\psi})\dot{\psi} = \dot{h}_{22}\dot{\psi}^2 + h_{22}\ddot{\psi}\dot{\psi}$. С учетом всех произведенных выше преобразований запишем уравнения (10.90)-(10.91) в следующей форме

$$\frac{1}{\kappa}\left(\frac{2\dot{a}\ddot{a}}{a^2} - \frac{2\dot{a}^3}{a^3}\right) + \frac{6\dot{a}^3}{\kappa a^3} + h_{22}\ddot{\psi}\dot{\psi} + \frac{1}{\kappa}\left(\frac{\ddot{a}}{a} - \frac{\dot{a}\dot{a}}{a^2}\right) + \frac{2}{\kappa}\left(\frac{2\dot{a}\ddot{a}}{a^2} - \frac{2\dot{a}^3}{a^3}\right) = 0, \quad (10.92)$$

$$-\frac{6\dot{a}\ddot{a}}{\kappa a^2} - h_{22}\ddot{\psi}\dot{\psi} - \frac{2}{\kappa}\left(\frac{\ddot{a}}{a} - \frac{\dot{a}\dot{a}}{a^2}\right) + \frac{1}{\kappa}\left(\frac{\ddot{a}}{a} - \frac{\dot{a}\dot{a}}{a^2}\right) = 0. \quad (10.93)$$

Произведем группировку слагаемых

$$\frac{1}{\kappa}\left(\frac{5\dot{a}\ddot{a}}{a^2} + \frac{\ddot{a}}{a}\right) + h_{22}\ddot{\psi}\dot{\psi} = 0, \quad (10.94)$$

$$-\frac{1}{\kappa}\left(\frac{5\dot{a}\ddot{a}}{a^2} + \frac{\ddot{a}}{a}\right) - h_{22}\ddot{\psi}\dot{\psi} = 0. \quad (10.95)$$

Таким образом, оба уравнения принимают одинаковый вид. Произведем замену h_{22} из (10.85), и осуществим подстановку, после чего получим

$$5\frac{\ddot{a}\dot{a}}{a^2} + \frac{\ddot{a}}{a} - 2\frac{\ddot{a}\dot{\psi}}{a\dot{\psi}} = 0. \quad (10.96)$$

Перепишем уравнение следующим образом

$$2\frac{\dot{\psi}}{\psi} = 5\frac{\dot{a}}{a} + \frac{\ddot{a}}{\dot{a}}. \quad (10.97)$$

Если проинтегрировать получившееся выражение, можно записать

$$\ln \dot{\psi}^2 = \ln a^5 + \ln \dot{a} + \ln D^2. \quad (10.98)$$

Окончательно формула имеет вид

$$\dot{\psi}^2 = D^2 a^5 \dot{a}, \quad (10.99)$$

где $D = \pm \sqrt{\frac{2}{\kappa}}$.

Из (10.85) можно найти

$$h_{22} = -\frac{1}{a^6}. \quad (10.100)$$

Из уравнения (10.84) получаем

$$\phi = \pm \sqrt{\frac{2}{\kappa h_{11}}} \ln(a) + \phi_0. \quad (10.101)$$

Таким образом, найдя функции $\phi(t)$ и $\psi(t)$, благодаря переходу $t \rightarrow \phi$, $t \rightarrow \psi$ можно установить зависимости $h_{22}(\phi)$, $V_1(\phi)$, $V_2(\psi)$.

Анзац [02] с разбиением потенциала V (10.14) и характерными зависимостями $\phi = \pm \sqrt{\frac{2}{\kappa h_{11}}} \ln(a) + \phi_0$, $\dot{\psi}^2 = \frac{2}{\kappa} a^5 \dot{a}$, $h_{22} = -\frac{1}{a^6}$, $V_1(\phi(t)) = \frac{2}{\kappa} \frac{\dot{a}^2}{a^2}$, $V_2(\psi(t)) = \frac{1}{\kappa} \frac{\dot{a}}{a}$, при известной зависимости масштабного фактора $a(t)$, позволяет найти эволюцию полей $\phi(t)$, $\psi(t)$, а также $h_{22}(\phi)$, $V(\phi, \psi)$.

Для модели «появляющейся» вселенной с масштабным фактором $a(t) = A(\beta + e^{\alpha t})^m$ анзац [02] не позволяет вычислить интеграл $\psi(t) = \pm \int \sqrt{\frac{2}{\kappa} a^5 \dot{a}} dt$ в таком виде, который обеспечил бы возможность явно выразить $t(\psi)$, что влечет за собой невозможность получения зависимости V_2 от ψ напрямую, а только посредством зависимости этой величины от t .

Анзац [03]

Для анзаца [03] характерна зависимость ПЗ (10.20), т.е.

$$h_{22}(\phi, \psi) \equiv h_{22}(\phi), \quad V(\phi, \psi) = V_1(\phi) + e^{f(\phi)} V_2(\psi).$$

Для анзаца [03] используется такое же разбиение, как и для анзаца [02] за исключением формулы (10.87)

$$e^{f(\phi(t))} V_2(\psi(t)) = \frac{1}{\kappa} \frac{\dot{a}}{a}. \quad (10.102)$$

Тогда полевые уравнения (10.9)–(10.10) запишутся следующим образом:

$$h_{11}\ddot{\phi} + 3Hh_{11}\dot{\phi} - \frac{1}{2}\frac{\partial h_{22}(\phi)}{\partial\phi}\dot{\psi}^2 + \frac{\partial V_1(\phi)}{\partial\phi} + V_2(\psi)e^{f(\phi)}\frac{\partial f(\phi)}{\partial\phi} = 0, \quad (10.103)$$

$$3Hh_{22}(\phi)\dot{\psi} + \partial_t(h_{22}(\phi)\dot{\psi}) + e^{f(\phi)}\frac{\partial V_2(\psi)}{\partial\psi} = 0. \quad (10.104)$$

Перейдем только ко временной зависимости в обоих уравнениях

$$h_{11}\ddot{\phi}\dot{\phi} + 3Hh_{11}\dot{\phi}^2 - \frac{1}{2}\dot{h}_{22}\dot{\psi}^2 + \dot{V}_1 + V_2e^f\dot{f} = 0, \quad (10.105)$$

$$3Hh_{22}\dot{\psi} + \dot{h}_{22}\dot{\psi}^2 + h_{22}\ddot{\psi}\dot{\psi} + e^f\dot{V}_2 = 0. \quad (10.106)$$

Возьмем производную от выражения (10.102), тогда оно принимает форму $e^fV_2\dot{f} + e^f\dot{V}_2 = \frac{1}{\kappa}\left(\frac{\ddot{a}}{a} - \frac{\dot{a}\dot{a}}{a^2}\right)$. Для предыдущего анзаца были получены производные от остальных разбиений, т.е. $\partial_t(\dot{\phi}^2)$, $\partial_t(h_{22}\dot{\psi}^2)$, \dot{V}_1 . Эти выражения справедливы и для анзаца [03]. Осуществим подстановку в (10.105) и (10.106) всех известных зависимостей

$$\begin{aligned} \frac{1}{\kappa}\left(\frac{2\dot{a}\ddot{a}}{a^2} - \frac{2\dot{a}^3}{a^3}\right) + \frac{6}{\kappa}\frac{\dot{a}^3}{a^3} - \frac{2}{\kappa}\frac{\ddot{a}\dot{\psi}}{a\dot{\psi}} + \frac{1}{\kappa}\left(\frac{\ddot{a}}{a} - \frac{\dot{a}\dot{a}}{a^2}\right) + \\ + \frac{2}{\kappa}\left(\frac{2\dot{a}\ddot{a}}{a^2} - \frac{2\dot{a}^3}{a^3}\right) + \frac{1}{\kappa}\frac{\ddot{a}}{a}\dot{f} = 0, \end{aligned} \quad (10.107)$$

$$-\frac{6}{\kappa}\frac{\dot{a}\ddot{a}}{a^2} + \frac{2}{\kappa}\frac{\ddot{a}\dot{\psi}}{a\dot{\psi}} - \frac{2}{\kappa}\left(\frac{\ddot{a}}{a} - \frac{\dot{a}\dot{a}}{a^2}\right) + \frac{1}{\kappa}\left(\frac{\ddot{a}}{a} - \frac{\dot{a}\dot{a}}{a^2}\right) - \frac{1}{\kappa}\frac{\ddot{a}}{a}\dot{f} = 0. \quad (10.108)$$

В последней формуле мы воспользовались тем, что $e^f\dot{V}_2 = \frac{1}{\kappa}\left(\frac{\ddot{a}}{a} - \frac{\dot{a}\dot{a}}{a^2}\right) - e^fV_2\dot{f}$. После приведения подобных и группировки слагаемых приходим к слегка модифицированной формуле (10.97) анзаца [02]

$$2\frac{\ddot{\psi}}{\dot{\psi}} - \dot{f} = 5\frac{\dot{a}}{a} + \frac{\ddot{a}}{\dot{a}}. \quad (10.109)$$

Однократно проинтегрировав это выражение, получим следующее соотношение

$$\ln\dot{\psi}^2 - \ln F = \ln a^5 + \ln \dot{a} + \ln D, \quad (10.110)$$

где $\ln F = f$.

Произведя аналогичные манипуляции, как и для анзаца [02], получим уравнение:

$$\dot{\psi}^2 = D^2a^5\dot{a}e^f = D^2a^5\dot{a}F. \quad (10.111)$$

Тогда,

$$h_{22} = -\frac{1}{a^6F} \quad (10.112)$$

Осталось выразить зависимость $V_2(t)$

$$V_2 = \frac{1}{\kappa}\frac{\dot{a}}{a}\frac{1}{F}. \quad (10.113)$$

Значение функции $f = \ln F$ нами не было определено, для решения уравнений, таким образом, она является произвольной. Зависимость $\phi(t)$ находится из анзаца [02] (10.101). Определившись с $\phi(t)$ и $\psi(t)$, используя переходы $t \rightarrow \phi$ и $t \rightarrow \psi$, можно найти все остальные величины $h_{22}(\phi)$, $V_1(\phi)$, $V_2(\psi)$.

Анзац[03] с разбиением потенциала V (10.20) и характерными зависимостями $\phi = \pm \sqrt{\frac{2}{\kappa h_{11}}} \ln(a) + \phi_0$, $\dot{\psi}^2 = \frac{2}{\kappa} a^5 \ddot{a} F$, $h_{22} = -\frac{1}{a^6 F}$, $V_1(\phi(t)) = \frac{2}{\kappa} \frac{\dot{a}^2}{a^2}$, $V_2(\psi(t)) = \frac{1}{\kappa} \frac{\ddot{a}}{a} \frac{1}{F}$, при известном поведении масштабного фактора $a(t)$, позволяет найти эволюцию полей $\phi(t)$, $\psi(t)$, а также $h_{22}(\phi)$, $V(\phi, \psi)$.

10.3. Решение для степенного масштабного фактора и вселенной Де Ситтера

Мы рассмотрели специальные анзацы для двухкомпонентной ККМ с диагональной метрикой пространства-целей. Покажем, что они позволяют получать решения для ряда стандартных масштабных факторов: $a(t) = At^n$, $a(t) = A \operatorname{sh}(\alpha t)$, $a(t) = A \operatorname{ch}(\alpha t)$.

10.3.1. Масштабный фактор $a(t) = At^n$

Кинетическая и потенциальная энергии для степенной зависимости масштабного фактора имеют вид:

$$K(t) = \frac{1}{\kappa} \left(\frac{n}{t^2} + \frac{\epsilon}{A^2 t^{2n}} \right) \quad (10.114)$$

$$V(t) = \frac{1}{\kappa} \left(\frac{3n(n-1)}{t^2} + \frac{2\epsilon}{A^2 t^{2n}} \right) \quad (10.115)$$

Решения для анзацев $[\pm 1d]$, $[\pm 3d]$, $[01]$, $[03]$ в случае степенной зависимости масштабного фактора приведены в таблице 1:

Таблица 1

Анзац	Решение
$[\pm 1d]$	$h_{22}(\phi, \psi) \equiv h_{22}(\phi), V(\phi, \psi) = V_1(\phi) + \sqrt{h_{22}(\phi)}V_2(\psi),$ $\phi = \sqrt{\frac{2n}{\kappa}} \ln(t), \psi = \sqrt{\frac{2\epsilon}{\kappa}} \frac{t^2}{2}, F = t, h_{22}(\phi) = \frac{1}{A^2} e^{-(2n+2)\sqrt{\frac{\kappa}{2n}}\phi},$ $V_1(\phi) = \frac{3n(n-1)}{\kappa} e^{-2\sqrt{\frac{\kappa}{2n}}\phi}, V_2(\psi) = \frac{2\epsilon}{\kappa} \frac{1}{A(2\psi\sqrt{\frac{\kappa}{2\epsilon}})^{\frac{n-1}{2}}}.$
$[\pm 3d]$	$h_{22}(\phi, \psi) \equiv h_{22}(\psi), V(\phi, \psi) = V_1(\phi) + V_2(\psi),$ $\phi = \sqrt{\frac{2n}{\kappa}} \ln(t), \psi = \sqrt{\frac{2\epsilon}{\kappa}} \frac{t^2}{2}, F = t, h_{22}(\psi) = \frac{1}{A^2} (2\psi\sqrt{\frac{\kappa}{2\epsilon}})^{-(n+1)},$ $V_1(\phi) = \frac{3n(n-1)}{\kappa} e^{-2\sqrt{\frac{\kappa}{2n}}\phi}, V_2(\psi) = \frac{2\epsilon}{\kappa} \frac{1}{A^2} (2\psi\sqrt{\frac{\kappa}{2\epsilon}})^{-n}.$
[01]	$h_{22}(\phi, \psi) \equiv h_{22}(\psi), V(\phi, \psi) = V_1(\phi) + V_2(\psi),$ $\phi = \sqrt{\frac{2n\lambda}{\kappa}} \ln(t), \psi = \sqrt{\frac{2(1-\lambda)}{\kappa}} \frac{t^2}{2}, F = t, h_{22}(\psi) = \frac{n}{(2\sqrt{\frac{\kappa}{2(1-\lambda)}}\psi)^2},$ $V_1(\phi) = \frac{3\lambda n(n-1)}{\kappa} e^{-2\sqrt{\frac{\kappa}{2n}}\phi}, V_2(\psi) = \frac{3(1-\lambda)n(n-1)}{\kappa} \left(2\psi\sqrt{\frac{\kappa}{2(1-\lambda)}}\right)^{-1}.$
[03]	$h_{22}(\phi, \psi) \equiv h_{22}(\phi), V(\phi, \psi) = V_1(\phi) + F(\phi)V_2(\psi),$ $\phi = \sqrt{\frac{2}{\kappa}} \ln(At^n), \psi = \sqrt{\frac{2n(n-1)}{\kappa}} A^3 \frac{t^{3n+1/2}}{3n+1/2}, F = t,$ $h_{22}(\phi) = -\frac{1}{A^6} \left(\frac{1}{A} e^{\sqrt{\frac{\kappa}{2}}\phi}\right)^{-(6+1/n)},$ $V_1(\phi) = \frac{2}{\kappa} \frac{n^2}{\left(\frac{1}{A} e^{\sqrt{\frac{\kappa}{2}}\phi}\right)^{2/n}}, V_2(\psi) = \frac{n(n-1)}{\kappa} \left(\frac{\psi}{\sqrt{\frac{2n(n-1)}{\kappa}} A^3 \frac{1}{3n+1/2}}\right)^{-\frac{3}{3n+1/2}}.$

10.3.2. Масштабный фактор $a(t) = A \operatorname{sh}(\alpha t)$

Кинетическая и потенциальная энергии для масштабного фактора, эволюционирующего по закону гиперболического синуса, имеют вид:

$$K(t) = \frac{1}{\kappa} \left(\frac{\alpha^2}{\operatorname{sh}^2(\alpha t)} + \frac{\epsilon}{A^2 \operatorname{sh}^2(\alpha t)} \right) \tag{10.116}$$

$$V(t) = \frac{1}{\kappa} \left(3\alpha^2 \operatorname{cth}^2(\alpha t) - \frac{\alpha^2}{\operatorname{sh}^2(\alpha t)} + 2 \frac{\epsilon}{A^2 \operatorname{sh}^2(\alpha t)} \right) \tag{10.117}$$

Решения для анзацев $[\pm 1d]$, $[\pm 3d]$, [01], [03] в случае эволюции масштабного фактора по закону гиперболического синуса приведены в таблице 2:

Таблица 2

Анзац	Решение
[±1d]	$h_{22}(\phi, \psi) \equiv h_{22}(\phi), V(\phi, \psi) = V_1(\phi) + \sqrt{h_{22}(\phi)}V_2(\psi), F = t,$ $\phi = -\sqrt{\frac{2}{\kappa}}2\operatorname{arcth}(e^{\alpha t}), \psi = \sqrt{\frac{2\epsilon}{\kappa}}\frac{1}{2}t^2, h_{22}(\phi) = \frac{\alpha^2 \ln^{-2}\left[\operatorname{th}\left(-\frac{\phi}{2}\sqrt{\frac{\kappa}{2}}\right)\right]}{A \operatorname{sh}\left(\ln\left[\operatorname{th}\left(-\frac{\phi}{2}\sqrt{\frac{\kappa}{2}}\right)\right]\right)},$ $V_1(\phi) = \frac{\alpha^2}{\kappa} \left[3 \operatorname{cth}^2 \left(\ln \left[\operatorname{th} \left(-\frac{\phi}{2} \sqrt{\frac{\kappa}{2}} \right) \right] \right) - \frac{1}{\operatorname{sh}^2 \left(\ln \left[\operatorname{th} \left(-\frac{\phi}{2} \sqrt{\frac{\kappa}{2}} \right) \right] \right)} \right],$ $V_2(\psi) = \frac{2\epsilon}{\kappa} \frac{\sqrt{\frac{2\psi}{\sqrt{\frac{2\epsilon}{\kappa}}}}}{A \operatorname{sh} \left(\alpha \sqrt{\frac{2\psi}{\sqrt{\frac{2\epsilon}{\kappa}}}} \right)}.$
[±3d]	$h_{22}(\phi, \psi) \equiv h_{22}(\psi), V(\phi, \psi) = V_1(\phi) + V_2(\psi), F = t,$ $\phi = -\sqrt{\frac{2}{\kappa}}2\operatorname{arcth}(e^{\alpha t}), \psi = \sqrt{\frac{2\epsilon}{\kappa}}\frac{1}{2}t^2, h_{22}(\psi) = \frac{\sqrt{\frac{2\epsilon}{\kappa}}}{A^2 \operatorname{sh}^2 \left(\alpha \sqrt{\frac{2\psi}{\sqrt{\frac{2\epsilon}{\kappa}}}} \right)},$ $V_1(\phi) = \frac{\alpha^2}{\kappa} \left[3 \operatorname{cth}^2 \left(\ln \left[\operatorname{th} \left(-\frac{\phi}{2} \sqrt{\frac{\kappa}{2}} \right) \right] \right) - \frac{1}{\operatorname{sh}^2 \left(\ln \left[\operatorname{th} \left(-\frac{\phi}{2} \sqrt{\frac{\kappa}{2}} \right) \right] \right)} \right],$ $V_2(\psi) = \frac{2\epsilon}{\kappa} \frac{1}{A^2 \operatorname{sh}^2 \left(\alpha \sqrt{\frac{2\psi}{\sqrt{\frac{2\epsilon}{\kappa}}}} \right)}.$
[01]	$h_{22}(\phi, \psi) \equiv h_{22}(\psi), V(\phi, \psi) = V_1(\phi) + V_2(\psi), F = t,$ $\phi = -\sqrt{\frac{2\lambda}{\kappa}}2\operatorname{arcth}(e^{\alpha t}), \psi = \sqrt{\frac{2(1-\lambda)}{\kappa}}\frac{t^2}{2}, h_{22}(\psi) = \frac{\alpha^2 \sqrt{\frac{2(1-\lambda)}{\kappa}}}{2\psi \operatorname{sh}^2 \left(\alpha \sqrt{\frac{2\psi}{\sqrt{\frac{2(1-\lambda)}{\kappa}}}} \right)},$ $V_1(\phi) = \frac{\alpha^2}{\kappa} \left[3 \operatorname{cth}^2 \left(\ln \left[\operatorname{th} \left(-\frac{\phi}{2} \sqrt{\frac{\kappa}{2\lambda}} \right) \right] \right) - \frac{1}{\operatorname{sh}^2 \left(\ln \left[\operatorname{th} \left(-\frac{\phi}{2} \sqrt{\frac{\kappa}{2\lambda}} \right) \right] \right)} \right],$ $V_2(\psi) = \frac{(1-\lambda)\alpha^2}{\kappa} \left[3 \operatorname{cth}^2 \left(\alpha \sqrt{\frac{2\psi}{\sqrt{\frac{2(1-\lambda)}{\kappa}}}} \right) - \frac{1}{\operatorname{sh}^2 \left(\alpha \sqrt{\frac{2\psi}{\sqrt{\frac{2(1-\lambda)}{\kappa}}}} \right)} \right].$

Продолжение таблицы 2

Анзац	Решение
[03]	$h_{22}(\phi, \psi) \equiv h_{22}(\phi), V(\phi, \psi) = V_1(\phi) + F(\phi)V_2(\psi),$ $\phi = \sqrt{\frac{2}{\kappa}} \ln(A \operatorname{sh}(\alpha t)), \psi = \sqrt{\frac{2}{\kappa}} A \operatorname{ch}(\alpha t), F = \frac{1}{A^4 \operatorname{sh}^4(\alpha t)},$ $h_{22}(\phi) = -\frac{1}{A^2 \operatorname{sh}^2 \left[\operatorname{arcsch} \left(\frac{1}{A} e^{\sqrt{\frac{\kappa}{2}} \phi} \right) \right]},$ $V_1(\phi) = \frac{2}{\kappa} \alpha^2 \operatorname{cth}^2 \left(\operatorname{arcsch} \left(\frac{1}{A} e^{\sqrt{\frac{\kappa}{2}} \phi} \right) \right),$ $V_2(\psi) = \frac{\alpha^2 A^4}{\kappa} \operatorname{sh}^4 \left(\operatorname{arcch} \left(\frac{\psi}{A} \sqrt{\frac{\kappa}{2}} \right) \right).$

10.3.3. Масштабный фактор $a(t) = A \operatorname{ch}(\alpha t)$

Кинетическая и потенциальная энергии для масштабного фактора, эволюционирующего по закону гиперболического косинуса, имеют вид:

$$K(t) = \frac{1}{\kappa} \left(\frac{\epsilon}{A^2 \operatorname{ch}^2(\alpha t)} - \frac{\alpha^2}{\operatorname{ch}^2(\alpha t)} \right) \quad (10.118)$$

$$V(t) = \frac{1}{\kappa} \left(3\alpha^2 \operatorname{th}^2(\alpha t) + \frac{\alpha^2}{\operatorname{ch}^2(\alpha t)} + 2 \frac{\epsilon}{A^2 \operatorname{ch}^2(\alpha t)} \right) \quad (10.119)$$

Решения для анзацев $[\pm 1d]$, $[\pm 3d]$, [01], [03] в случае эволюции масштабного фактора по закону гиперболического косинуса приведены в таблице 3:

Таблица 3

Анзац	Решение
$[\pm 1d]$	$h_{22}(\phi, \psi) \equiv h_{22}(\phi), V(\phi, \psi) = V_1(\phi) + \sqrt{h_{22}(\phi)} V_2(\psi), F = t,$ $\phi = \sqrt{\frac{2}{\kappa}} 2 \operatorname{arctan}(e^{\alpha t}), \psi = \sqrt{\frac{2\epsilon}{\kappa}} t^2, h_{22}(\phi) = \frac{\frac{1}{\alpha^2} \ln^{-2} \left(\tan \left(\frac{\phi}{2\sqrt{\frac{2}{\kappa}}} \right) \right)}{A^2 \operatorname{ch}^2 \left[\ln \left(\tan \left(\frac{\phi}{2\sqrt{\frac{2}{\kappa}}} \right) \right) \right]},$ $V_1(\phi) = \frac{\alpha^2}{\kappa} \left[3 \operatorname{th}^2 \left[\ln \left(\tan \left(\frac{\phi}{2\sqrt{\frac{2}{\kappa}}} \right) \right) \right] + \operatorname{ch}^{-2} \left[\ln \left(\tan \left(\frac{\phi}{2\sqrt{\frac{2}{\kappa}}} \right) \right) \right] \right],$ $V_2(\psi) = \frac{2\epsilon}{\kappa} \frac{1}{A \operatorname{ch} \left(\sqrt{\frac{2\psi}{\sqrt{\frac{2\epsilon}{\kappa}}}} \right)} \sqrt{\frac{2\psi}{\sqrt{\frac{2\epsilon}{\kappa}}}}$

Продолжение таблицы 3

Анзац	Решение
[±3d]	$h_{22}(\phi, \psi) \equiv h_{22}(\psi), V(\phi, \psi) = V_1(\phi) + V_2(\psi), F = t,$ $\phi = \sqrt{\frac{2}{\kappa}} 2 \arctan(e^{\alpha t}), \psi = \sqrt{\frac{2\epsilon}{\kappa}} \frac{t^2}{2}, h_{22}(\psi) = \frac{\sqrt{\frac{2\epsilon}{\kappa}}}{2\psi \operatorname{ch}^2\left(\alpha \sqrt{\frac{2\psi}{\sqrt{\frac{2\epsilon}{\kappa}}}}\right)},$ $V_1(\phi) = \frac{\alpha^2}{\kappa} \left[3 \operatorname{th}^2 \left[\ln \left(\tan \left(\frac{\phi}{2\sqrt{\frac{2}{\kappa}}} \right) \right) \right] + \operatorname{ch}^{-2} \left[\ln \left(\tan \left(\frac{\phi}{2\sqrt{\frac{2}{\kappa}}} \right) \right) \right] \right],$ $V_2(\psi) = \frac{2\epsilon}{\kappa} \frac{1}{\operatorname{ch}^2\left(\sqrt{\frac{2\psi}{\sqrt{\frac{2\epsilon}{\kappa}}}}\right)}$
[01]	$V(\phi, \psi) = V(\phi) + V(\psi), h_{22}(\phi, \psi) = h_{22}(\psi), F = t,$ $\phi = \sqrt{\frac{2\lambda}{\kappa}} 2 \arctan(e^{\alpha t}), \psi = \sqrt{\frac{2(1-\lambda)}{\kappa}}, h_{22}(\psi) = \frac{-\alpha \sqrt{\frac{2(1-\lambda)}{\kappa}}}{\operatorname{ch}^2\left(\frac{1}{\alpha^2} \sqrt{\frac{2\psi}{\sqrt{\frac{2(1-\lambda)}{\kappa}}}}\right)},$ $V_1(\phi) = \frac{\alpha^2 \lambda}{\kappa} \left[3 \operatorname{th}^2 \left[\ln \left(\tan \left(\frac{\phi}{2\sqrt{\frac{2\lambda}{\kappa}}} \right) \right) \right] + \operatorname{ch}^{-2} \left[\ln \left(\tan \left(\frac{\phi}{2\sqrt{\frac{2\lambda}{\kappa}}} \right) \right) \right] \right],$ $V_2(\psi) = \frac{\lambda(1-\alpha)}{\kappa} \left(3 \operatorname{th}^2 \left(\alpha \sqrt{\frac{2\psi}{\sqrt{\frac{2(1-\lambda)}{\kappa}}}} \right) + \operatorname{ch}^{-2} \left(\alpha \sqrt{\frac{2\psi}{\sqrt{\frac{2(1-\lambda)}{\kappa}}}} \right) \right).$
[03]	$h_{22}(\phi, \psi) \equiv h_{22}(\phi), V(\phi, \psi) = V_1(\phi) + F(\phi)V_2(\psi), F = \frac{1}{A^4 \operatorname{ch}^2(\alpha t)},$ $\phi = \sqrt{\frac{2}{\kappa}} \ln(A \operatorname{ch}(\alpha t)), \psi = \sqrt{\frac{2}{\kappa}} \operatorname{sh}(\alpha t), h_{22}(\psi) = -\frac{1}{A^2 \operatorname{ch}^2(\operatorname{arcsch}(\sqrt{\frac{\kappa}{2}} \frac{\psi}{A}))}$ $V_1(\phi) = \frac{2}{\kappa} \alpha^2 \operatorname{th}^2 \left(\operatorname{arcch} \left(\frac{1}{A} e^{\sqrt{\frac{\kappa}{2}} \phi} \right) \right)$ $V_2(\psi) = \frac{\alpha}{\kappa} A^4 \operatorname{ch}^4 \left(\operatorname{arcsch} \left[\frac{\psi}{A} \sqrt{\frac{\kappa}{2}} \right] \right)$

Глава 11.

Ранняя инфляция и появляющаяся вселенная

11.1. Искривление пространственно-плоской Вселенной

В работе [84], на ряду с другими задачами, представлено решение проблемы евклидовости Вселенной с позиции космологической инфляции. Полагалось, что если в начальный момент времени Вселенная была не пространственно-плоской, то за счет увеличения масштаба при инфляции, в локальных областях она становилась евклидовой с точностью до погрешности измерения при космологических наблюдениях. В данном разделе мы попробуем взглянуть на эту проблему с позиции двух компонентной киральной космологической модели. Как нами уже было показано, в случае открытой или замкнутой Вселенной для некоторых разбиений (10.17) мы можем разделить поля таким образом, что одно поле ϕ будет отвечать пространственно-плоскому сценарию, другое ψ - дополнять пространственно-плоский сценарий до открытого или замкнутого. Таким образом, при данном разбиении можно говорить о полях, которые имеют явную геометрическую интерпретацию. В связи с этим возникает интересный вопрос о этапах доминирования полей ψ и ϕ друг над другом, а как следствие и соотношение пространственно-плоской и открытой или замкнутой Вселенной во времени.

Будем рассматривать отдельно кинетическую и потенциальную части уравнений Эйнштейна в том виде, как мы определили их ранее (10.13)-(10.14). Тогда компоненты уравнений для кинетической и потенциальной частей, соответствующие пространственно-плоской Вселенной, будут иметь вид

$$\frac{1}{2}h_{11}\dot{\phi}^2 = -\frac{1}{\kappa}\dot{H}, \quad V_f = \frac{1}{\kappa}(3H^2 + 3\dot{H})$$

[где символ f при потенциале, означает плоский (flat)], а компоненты, дополняющие пространственно-плоский сценарий до открытого или замкнутого, запишутся

$$\frac{1}{2}h_{22}\dot{\psi}^2 = \frac{1}{\kappa}\frac{\epsilon c^2}{a^2}, \quad V_{c/o} = \frac{2}{\kappa}\frac{\epsilon c^2}{a^2}$$

[где символ c/o при потенциале, означает замкнутый/открытый (close/open), а c^2 - квадрат скорости света].

Для того, чтобы установить преобладающую компоненту в определенный момент времени, необходимо составить два уравнения (для кинетической и потенциальной части), когда обе компоненты по абсолютному значению равны. Уравнения имеют следующий вид (для кинетической и потенциальной частей соответственно):

$$|\dot{a}^2 - \ddot{a}a| - c^2 = 0, \quad (11.1)$$

$$|2\dot{a}^2 + \ddot{a}a| - 2c^2 = 0. \quad (11.2)$$

Они получаются при вычитании абсолютного значения кинетической (потенциальной) части дополняющей компоненты из абсолютного значения компоненты пространственно-плоской Вселенной, отбрасывая знаменатель (после приведения к общему знаменателю). Чтобы говорить о преобладании той или иной компоненты знак равно в этих уравнениях нужно заменить на «>» или «<». Решением первого уравнения являются три функции: линейная $a(t) = t + const$ (коэффициент перед t выбран равным единице, хотя существуют и -1 , $\pm i$, но они не являются физически обоснованными), гиперболический синус $a(t) = \frac{1}{C} \operatorname{sh}(Ct + t_0)$ и гиперболический косинус $a(t) = \frac{1}{C} \operatorname{ch}(Ct + t_0)$ (где C и t_0 - некоторые постоянные), решением второго - линейная $a(t) = t + const$ (здесь так же есть не физическое решение с коэффициентом -1). Уравнение (11.2) так же имеет решение в наборе эллиптических функций, однако обратную зависимость не удастся найти. Таким образом, полученные решения свидетельствуют о том, что если масштабный фактор удовлетворяет, скажем, линейной функции, то в киральной двухкомпонентной модели с разбиением (10.17) оба поля эволюционируют с одинаковой интенсивностью.

Уравнения (11.1)-(11.2) можно переписать в иной форме, а именно

$$\frac{|\dot{a}^2 - \ddot{a}a|}{c^2} = 1, \quad \frac{|2\dot{a}^2 + \ddot{a}a|}{2c^2} = 1.$$

11.2. Эволюция компонент полей K и V на заданном масштабном факторе

В работе представлены анзацы, позволяющие получить точные решения при выборе вида масштабного фактора. В частности исследуется сценарий обобщенного режима ранней инфляции с заданным значением $a(t)$. Исследование $K(t)$ и $V(t)$ для «появляющейся» вселенной проводилось в совместной работе [83].

Масштабный фактор обобщенного режима ранней инфляции имеет тот же вид, что и для «появляющейся» вселенной, однако их временной сценарий отличается тем, что «появляющаяся» вселенная определена на интервале $(-\infty, \infty)$, а для модели обобщенного режима ранней инфляции характерен интервал $(0, \infty)$. Сценарий «появляющейся» вселенной имеет некоторые несоответствия, связанные с квантовой нестабильностью, которые обсуждаются в работе [85]. Однако в ней показано, что «появляющаяся» вселенная стабильна по отношению к классическим возмущениям. Принимая во внимание вышеизложенное, для полноты описания рассмотрим сценарий «появляющейся» вселенной, как математически более полный, а обобщенный режим ранней инфляции может быть получен из него, выбирая только положительную полуось времени.

Таким образом, мы будем исследовать уравнения (11.1) и (11.2) для конкретного масштабного фактора, для которого получены точные решения уравнений (10.9)-(10.10) и (10.13)-(10.14). В уравнениях (10.13)-(10.14) левая часть – полевая, правая – характеризует геометрию пространства-времени. Следует отметить, что в этом пункте проводится исследование «геометрической» части уравнений Эйнштейна (правая часть уравнений (10.13)-(10.14)) классического пространства ФРУ для случая «появляющейся» вселенной, совершенно не принимая во внимание, какими физическими источниками была вызвана эволюция этой самой геометрии. В принципе, аналогичный способ исследования может быть реализован и для любого другого наперед заданного масштабного фактора, при рассмотрении «геометрической» части уравнений Эйнштейна с метрикой пространства-времени взятой не обязательно в форме ФРУ. Запишем $a(t)$ «появляющейся» вселенной:

$$a(t) = A(\beta + e^{\alpha t})^m,$$

где $\alpha, \beta, m, A > 0$.

Кинетическая и потенциальная части для «появляющейся» вселенной имеют вид:

$$K(t) = \frac{1}{\kappa} \left(-\frac{m\alpha^2\beta e^{\alpha t}}{(\beta + e^{\alpha t})^2} + \frac{\epsilon c^2}{A^2(\beta + e^{\alpha t})^{2m}} \right), \quad (11.3)$$

$$V(t) = \frac{1}{\kappa} \left(\frac{m\alpha^2 e^{\alpha t}(3me^{\alpha t} + \beta)}{(\beta + e^{\alpha t})^2} + \frac{2\epsilon c^2}{A^2(\beta + e^{\alpha t})^{2m}} \right). \quad (11.4)$$

Как видно из уравнения (11.3) пространственно-плоская часть кинетической энергии «появляющейся» вселенной является отрицательной, что характерно для фантомных полей.

В случае, когда $\beta \rightarrow 0$ мы получаем стандартную модель инфляции. При этом

$$K(t) \rightarrow \frac{1}{\kappa} \left(0 + \frac{\epsilon c^2}{A^2 e^{2mat}} \right), \quad V(t) \rightarrow \frac{1}{\kappa} \left(3(m\alpha)^2 + \frac{2\epsilon c^2}{A^2 e^{2mat}} \right). \quad (11.5)$$

Но если при переходе $\beta \rightarrow 0$ величины $K(t)$ и $V(t)$ преобразуются от общего вида к стандартной модели, то решения, полученные для общей модели, таким свойством не обладают.

Решением уравнений (11.1)-(11.2) в общем виде представляет определенное затруднение, так как эти уравнения имеют степенной характер (в частности из-за произвола выбора параметра m):

$$m\alpha^2\beta A^2 e^{\alpha t}(\beta + e^{\alpha t})^{2m-2} - c^2 = 0, \quad (11.6)$$

$$m\alpha^2 A^2 e^{\alpha t}(3me^{\alpha t} + \beta)(\beta + e^{\alpha t})^{2m-2} - 2c^2 = 0. \quad (11.7)$$

Так же для анализа графиков $K(t)$ и $V(t)$, необходимо исследование поведения их производных на предмет установления минимумов и максимумов искомых функций, что затруднительно при произвольном m . Хотя точные решения для системы уравнений (10.9)-(10.12) получены для масштабного фактора «появляющейся» вселенной с произвольными параметрами α, β, m, A , для дальнейшей работы необходимо определить некоторые из них.

Рассмотрим один из вариантов задания масштабного фактора для «появляющейся» вселенной, используемый в работе [71]

$$a(t) = a_i (1 + e^{\alpha t})^{\frac{1}{2}}, \quad (11.8)$$

таким образом, нам остается определить в дальнейшем только величины α и a_i .

Запишем (11.3)-(11.4) для (11.8)

$$K(t) = \frac{1}{\kappa} \left(-\frac{\frac{1}{2}\alpha^2 e^{\alpha t}}{(1 + e^{\alpha t})^2} + \frac{\epsilon c^2}{a_i^2 (1 + e^{\alpha t})} \right), \quad (11.9)$$

$$V(t) = \frac{1}{\kappa} \left(\frac{\frac{1}{2}\alpha^2 e^{\alpha t} (\frac{3}{2}e^{\alpha t} + 1)}{(1 + e^{\alpha t})^2} + \frac{2\epsilon c^2}{a_i^2 (1 + e^{\alpha t})} \right). \quad (11.10)$$

Тогда уравнения (11.6)-(11.7) переписутся в следующей форме

$$\frac{\frac{1}{2}\alpha^2 a_i^2 e^{\alpha t}}{1 + e^{\alpha t}} - c^2 = 0, \quad (11.11)$$

$$\frac{\frac{1}{2}\alpha^2 a_i^2 e^{\alpha t} (\frac{3}{2}e^{\alpha t} + 1)}{1 + e^{\alpha t}} - 2c^2 = 0. \quad (11.12)$$

Первое из двух уравнений сводится к

$$e^{\alpha t} = \frac{c^2}{a_i^2 \frac{1}{2}\alpha^2 - c^2}$$

или

$$\frac{\frac{1}{2}\alpha^2 a_i^2}{c^2} \frac{1}{1 + e^{-\alpha t}} = 1,$$

из последней записи видно, что если $\frac{\frac{1}{2}\alpha^2 a_i^2}{c^2} < 1$, то и пространственно-плоская (фантомная) часть меньше искривляющей составляющей, при этом, в случае $\epsilon = 1$, полная кинетическая энергия всегда больше нуля. Если $\frac{\frac{1}{2}\alpha^2 a_i^2}{c^2} > 1$, то начиная с момента времени $t = \frac{1}{\alpha} \ln\left(\frac{c^2}{\frac{1}{2}\alpha^2 a_i^2 - c^2}\right)$ пространственно-плоская составляющая будет преобладать над искривляющей.

Продолжая исследование поведения функции $K(t)$, возьмем от нее производную по времени:

$$\dot{K}(t) = \frac{1}{\kappa} \left(\frac{\alpha e^{\alpha t} \left[(\frac{1}{2}a_i^2 \alpha^2 - \epsilon c^2) e^{\alpha t} - (\frac{1}{2}a_i^2 \alpha^2 + \epsilon c^2) \right]}{a_i^2 (1 + e^{\alpha t})^3} \right).$$

Определим экстремумы. $\dot{K}(t) = 0$ при $(\frac{1}{2}a_i^2 \alpha^2 - \epsilon c^2) e^{\alpha t} - (\frac{1}{2}a_i^2 \alpha^2 + \epsilon c^2) = 0$, учитывая $e^{\alpha t} = \frac{\frac{1}{2}a_i^2 \alpha^2 + \epsilon c^2}{\frac{1}{2}a_i^2 \alpha^2 - \epsilon c^2} > 0$. Рассмотрим несколько случаев:

1) $\epsilon = 1$. Если $\frac{1}{2}a_i^2 \alpha^2 < c^2$, то $e^{\alpha t}$ всегда больше правой части, имеющей отрицательное значение и следовательно $\dot{K} < 0$. В случае $\frac{1}{2}a_i^2 \alpha^2 > c^2$ $K(t)$ имеет минимум. Графики $K(t)$ для случая 1) на Рис.11.1;

2) $\epsilon = -1$. Если $\frac{1}{2}a_i^2 \alpha^2 < c^2$, то $\dot{K}(t) > 0$. В случае $\frac{1}{2}a_i^2 \alpha^2 > c^2$ $K(t)$ имеет минимум. Графики $K(t)$ для случая 2) на Рис.11.2;

3) $\epsilon = 0$. $K(t)$ имеет минимум при $t = 0$ (т.к. $e^{\alpha t} = 1$). График $K(t)$ для случая 3) на Рис.11.3.

Отметим поведение $\dot{K}(t)$ и $K(t)$ при $t \rightarrow \pm\infty$:

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} (\dot{K}(t)) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} (K(t)) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} (K(t)) = \frac{\epsilon c^2}{a_i^2}.$$

При $\epsilon = 0$ последнее соотношение обращается в ноль.

Рассмотрим поведение компонент $K(t)$ при $\epsilon = 0$, для анзацев [02] и [03]. Запишем следующее

$$K(t) = \frac{1}{\kappa} \left(\frac{\dot{a}^2}{a^2} - \frac{\ddot{a}}{a} \right). \quad (11.13)$$

Подставив значение (11.8) для $a(t)$ в (11.13), мы получим

$$K(t) = \frac{1}{\kappa} \left(\frac{\frac{\alpha^2}{4} e^{2\alpha t}}{(1 + e^{\alpha t})^2} - \frac{\frac{\alpha^2}{2} e^{\alpha t} (1 + \frac{1}{2} e^{\alpha t})}{(1 + e^{\alpha t})^2} \right) = I + II.$$

Первому слагаемому отвечает $\frac{1}{2}\dot{\phi}^2$, а второму $\frac{1}{2}h_{22}\dot{\psi}^2$. Обе функции по отдельности не имеют экстремумов. Рассмотрим следующее соотношение:

$$\left| \frac{II}{I} \right| = 2 \left(e^{-\alpha t} + \frac{1}{2} \right),$$

оно всегда больше единицы, что соответствует преобладанию компоненты II над компонентой I на всем временном отрезке. Поведение функций I и II приведены на Рис.11.4.

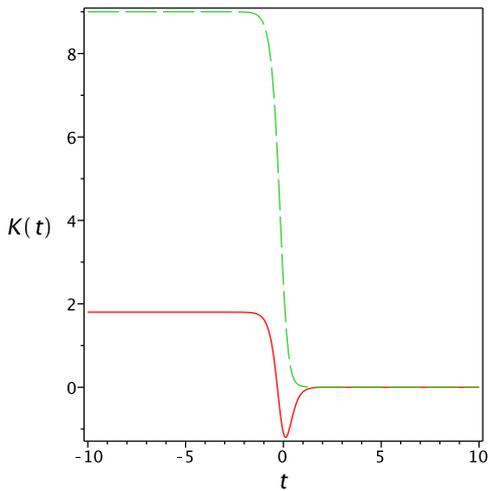


Рис. 11.1. $K(t)$ при $\epsilon = 1$ для случаев $\frac{1}{2}a_i^2\alpha^2 < c^2$ и $\frac{1}{2}a_i^2\alpha^2 > c^2$

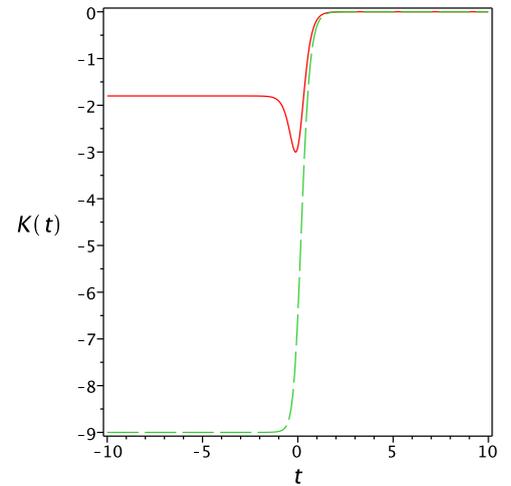
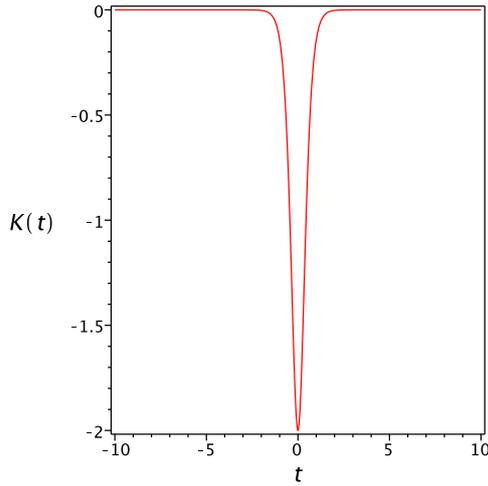
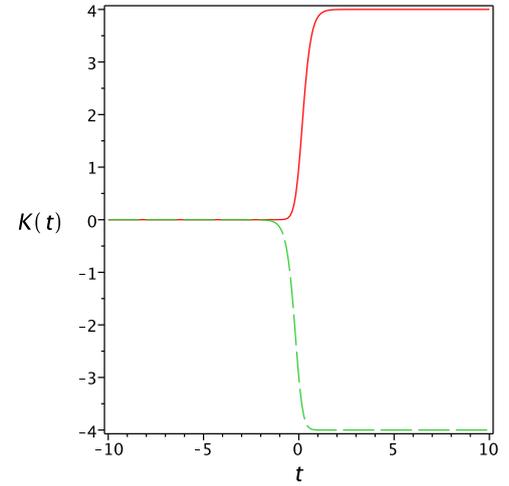


Рис. 11.2. $K(t)$ при $\epsilon = -1$ для случаев $\frac{1}{2}a_i^2\alpha^2 < c^2$ и $\frac{1}{2}a_i^2\alpha^2 > c^2$

Перейдем к рассмотрению поведения потенциала $V(t)$.

Уравнение (11.12) сводится к квадратному уравнению с детерминантом

$$D = \left(\frac{1}{2}\alpha^2 a_i^2 + 2c^2 \right)^2 + 2\alpha^2 a_i^2 c^2 > 0.$$

Рис. 11.3. $K(t)$ при $\epsilon = 0$ Рис. 11.4. Компоненты I и II кинетической энергии $K(t)$ для анзацев [02] и [03]

И в итоге его корни можно представить в следующем виде:

$$e^{\alpha t_{\pm}} = \frac{2c^2 - \frac{1}{2}\alpha^2 a_i^2 \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2}\alpha^2 a_i^2 + 2c^2\right)^2 + 2\alpha^2 a_i^2 c^2}}{\frac{3}{2}\alpha^2 a_i^2}.$$

Хочется отметить тот факт, что $\sqrt{D} > |2c^2 - \frac{1}{2}\alpha^2 a_i^2|$, таким образом значение, отвечающее «-» соответствует $e^{\alpha t_-} < 0$.

Уравнение (11.12) можно переписать иначе:

$$\frac{\alpha^2 a_i^2}{4c^2} \frac{1}{1 + e^{-\alpha t}} \left(\frac{3}{2} e^{\alpha t} + 1 \right) = 1.$$

Из этой записи видно, что с ростом t наступит такой момент, когда прост-ранственно-плоская часть в потенциале $V(t)$ начнет преобладать над искривляющей составляющей. Этот момент времени определяется корнем

$$t_+ = \frac{1}{\alpha} \ln \left(\frac{2c^2 - \frac{1}{2}\alpha^2 a_i^2 + \sqrt{\left(\frac{1}{2}\alpha^2 a_i^2 + 2c^2\right)^2 + 2\alpha^2 a_i^2 c^2}}{\frac{3}{2}\alpha^2 a_i^2} \right).$$

Возьмем производную по времени от $V(t)$:

$$\dot{V}(t) = \frac{1}{\kappa} \left(\frac{\alpha e^{\alpha t} \left[(a_i^2 \alpha^2 - 2\epsilon c^2) e^{\alpha t} + \left(\frac{1}{2} a_i^2 \alpha^2 - 2\epsilon c^2 \right) \right]}{a_i^2 (1 + e^{\alpha t})^3} \right),$$

и исследуем $V(t)$ на экстремумы. $\dot{V}(t) = 0$ при $(a_i^2 \alpha^2 - 2\epsilon c^2) e^{\alpha t} + \left(\frac{1}{2} a_i^2 \alpha^2 - 2\epsilon c^2 \right) = 0$, учитывая $e^{\alpha t} = \frac{-\frac{1}{2} a_i^2 \alpha^2 + 2\epsilon c^2}{a_i^2 \alpha^2 - 2\epsilon c^2} > 0$. Рассмотрим несколько случаев:

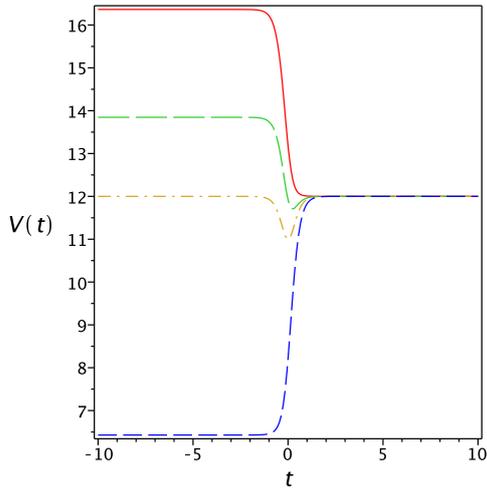


Рис. 11.5. $V(t)$ при $\epsilon = 1$ для случаев $a_i^2\alpha^2 < 2c^2$, $a_i^2\alpha^2 > 2c^2 > \frac{1}{2}a_i^2\alpha^2$, $2c^2 = \frac{3}{4}a_i^2\alpha^2$ и $2c^2 < \frac{1}{2}a_i^2\alpha^2$

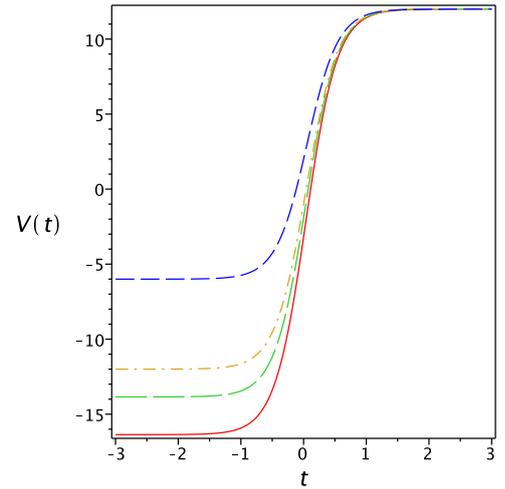


Рис. 11.6. $V(t)$ при $\epsilon = -1$ для некоторых значений α и a_i

1) $\epsilon = 1$. Если $a_i^2\alpha^2 < 2c^2$, то $\dot{V}(t) < 0$. В случае, когда $a_i^2\alpha^2 > 2c^2 > \frac{1}{2}a_i^2\alpha^2$ функция $V(t)$ имеет минимум. И, наконец, $\dot{V}(t) > 0$ при $2c^2 < \frac{1}{2}a_i^2\alpha^2$. Графики $V(t)$ для случая 1) на Рис.11.5;

2) $\epsilon = -1$. Для этого случая $\dot{V}(t) > 0$. Графики $V(t)$ для случая 2) на Рис.11.6;

3) $\epsilon = 0$. Для пространственно-плоской Вселенной мы так же имеем $\dot{V}(t) > 0$. График $V(t)$ для случая 3) на Рис.11.7.

Рассмотрим поведение $V(t)$ при $t \rightarrow \pm\infty$:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (V(t)) = \frac{3}{4}\alpha^2, \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} (V(t)) = \frac{2\epsilon c^2}{a_i^2},$$

если $\epsilon = 0$, то последнее выражение обращается в ноль.

Отметим одну особенность для $V(t)$ (случай $\epsilon = 1$) при $\lim_{t \rightarrow -\infty} (V(t)) = \lim_{t \rightarrow \infty} (V(t))$, т.е при $\frac{3}{4}\alpha^2 a_i^2 = 2c^2$ мы попадаем в интервал $\frac{1}{2}a_i^2\alpha^2 < 2c^2 = \frac{3}{4}a_i^2\alpha^2 < a_i^2\alpha^2$, таким образом, и кинетическая энергия и потенциал имеют минимум.

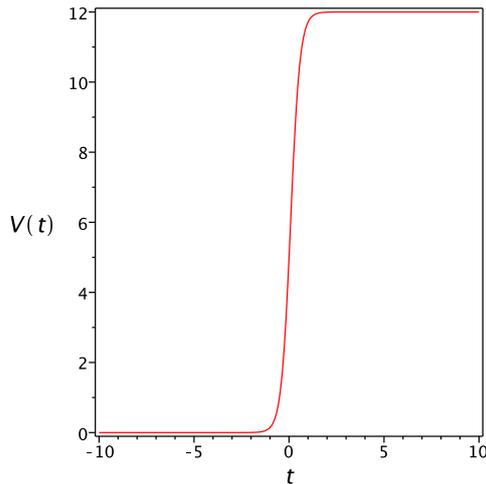
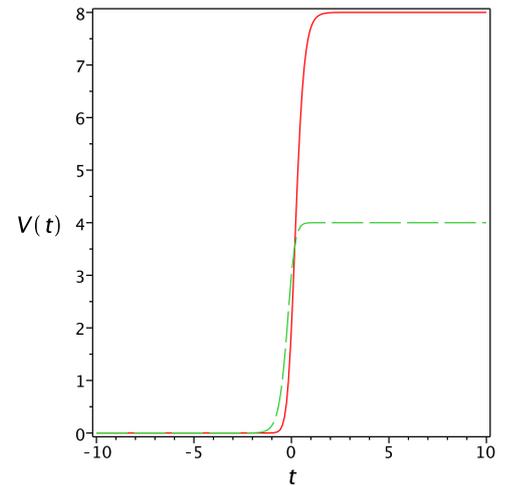
Рассмотрим поведение компонент $V(t)$ при $\epsilon = 0$, для анзацев [02] и [03]. Запишем следующее

$$V(t) = \frac{1}{\kappa} \left(\frac{2\dot{a}^2}{a^2} + \frac{\ddot{a}}{a} \right). \quad (11.14)$$

Подставив значение (11.8) для $a(t)$ в (11.14), мы получим

$$V(t) = \frac{1}{\kappa} \left(\frac{\frac{\alpha^2}{2} e^{2\alpha t}}{(1 + e^{\alpha t})^2} + \frac{\frac{\alpha^2}{2} e^{\alpha t} (1 + \frac{1}{2} e^{\alpha t})}{(1 + e^{\alpha t})^2} \right) = I + II.$$

Для анзаца [02] первому слагаемому отвечает V_1 , а второму V_2 , для анзаца [03] V_1 и $e^f V_2$ соответственно. Обе функции по отдельности не имеют экстремумов. Рассмотрим следующее соотношение:

Рис. 11.7. $V(t)$ при $\epsilon = 0$ Рис. 11.8. Компоненты I и II потенциала $V(t)$ для анзацев [02] и [03], I - пунктирная линия, II - сплошная

$$\left| \frac{II}{I} \right| = e^{-\alpha t} + \frac{1}{2},$$

из него следует, что когда $e^{-\alpha t} < \frac{1}{2}$, то преобладает компонента I , а когда $e^{-\alpha t} > \frac{1}{2}$ - то компонента II . Поведение функций I и II приведены на Рис.11.8.

11.3. Точные решения, основанные на специфических разбиениях

В этом разделе мы перейдем к рассмотрению нескольких примеров точных решений для случая «появляющейся» вселенной в двухкомпонентной киральной космологической модели, полученных для анзацев, приведенных во второй главе, а именно анзацев $[\pm 1a]$, $[\pm 1d]$, $[\pm 3a]$, $[\pm 3d]$, [01]. Но прежде следует рассмотреть отдельно случай для одного скалярного поля.

11.3.1. Точное решение для пространственно-плоской Вселенной для одинарного фантомного скалярного поля

Систему уравнений 10.9, 10.10, 10.13, 10.14 для одного скалярного поля в случае пространственно-плоской Вселенной можно переписать в следующей форме:

$$h_{11}\ddot{\phi} + 3Hh_{11}\dot{\phi} + \frac{\partial V}{\partial \phi} = 0,$$

$$K(t) = \frac{1}{2}h_{11}\dot{\phi}^2(t) = -\frac{1}{\kappa}\dot{H},$$

$$V(t) = \frac{3}{\kappa} \left(H^2 + \frac{1}{3} \dot{H} \right).$$

Стоит заметить, что эта система является составной частью системы для двухкомпонентной киральной космологической модели, и как показано во второй главе, решение для одного скалярного поля в пространственно-плоской Вселенной является составной частью (вполне самостоятельной) для решения в двухкомпонентной модели для открытой и замкнутой Вселенной. Для «появляющейся» вселенной мы имеем:

$$a(t) = A(\beta + e^{\alpha t})^m.$$

Кинетическая и потенциальная энергии равны:

$$K(t) = -\frac{1}{\kappa} \frac{m\alpha^2 \beta e^{\alpha t}}{(\beta + e^{\alpha t})^2},$$

$$V(t) = \frac{1}{\kappa} \frac{m\alpha^2 e^{\alpha t} (3me^{\alpha t} + \beta)}{(\beta + e^{\alpha t})^2}.$$

Плотность и давление скалярного поля «появляющейся» вселенной имеют вид:

$$\rho(t) = K(t) + V(t) = \frac{3}{\kappa} H^2 = \frac{3}{\kappa} \frac{m^2 \alpha^2 e^{2\alpha t}}{(\beta + e^{\alpha t})^2},$$

$$p(t) = K(t) - V(t) = -(3H^2 + 2\dot{H}) = -\frac{1}{\kappa} \left(\frac{m\alpha^2 e^{\alpha t} (3me^{\alpha t} + 2)}{(\beta + e^{\alpha t})^2} \right).$$

Точное решение для «появляющейся» вселенной с одним фантомным скалярным полем, получено в форме ($h_{11} = -1$):

$$\phi(t) = \frac{1}{B_1} \arctan \left(\frac{e^{\frac{\alpha}{2}t}}{\sqrt{\beta}} \right), \quad (11.15)$$

$$V(\phi) = \frac{1}{\kappa} \frac{m\alpha^2}{4} \sin^2(2\phi B_1) [3m \tan^2(\phi B_1) + 1], \quad (11.16)$$

где $B_1 = \pm \frac{1}{2\sqrt{\frac{2m}{\kappa}}}$.

Также в переменных $B_1\phi$ можно выразить и K , ρ , p . Имеем:

$$K(\phi) = -\frac{m\alpha^2}{4\kappa} \sin^2(2B_1\phi),$$

$$\rho(\phi) = \frac{3m^2\alpha^2}{\kappa} \sin^4(B_1\phi),$$

$$p(\phi) = -\frac{1}{\kappa} \frac{m\alpha^2}{4} \sin^2(2B_1\phi) [3m \tan^2(2B_1\phi) + 2].$$

Запишем полученные результаты для случая $\beta = 1$, $m = \frac{1}{2}$, $A = a_i$. Тогда

$$K(t) = -\frac{1}{\kappa} \frac{\frac{1}{2}\alpha^2 e^{\alpha t}}{(1 + e^{\alpha t})^2}, \quad V(t) = \frac{1}{\kappa} \frac{\frac{1}{2}\alpha^2 e^{\alpha t} (\frac{3}{2}e^{\alpha t} + 1)}{(1 + e^{\alpha t})^2},$$

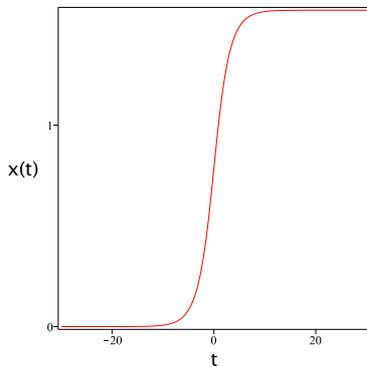
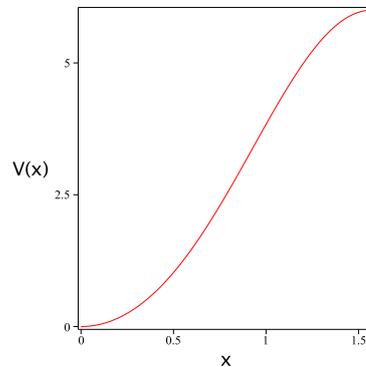
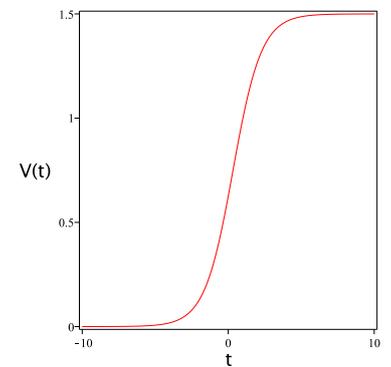
$$\rho(t) = \frac{3}{\kappa} \frac{\frac{1}{4}\alpha^2 e^{2\alpha t}}{(1 + e^{\alpha t})^2}, \quad p(t) = -\frac{1}{\kappa} \left(\frac{\frac{1}{2}\alpha^2 e^{\alpha t} (\frac{3}{2}e^{\alpha t} + 2)}{(1 + e^{\alpha t})^2} \right),$$

$$x = B_1 \phi = \arctan \left(e^{\frac{\alpha t}{2}} \right), \quad K(x) = -\frac{\alpha^2}{8\kappa} \sin^2(2x),$$

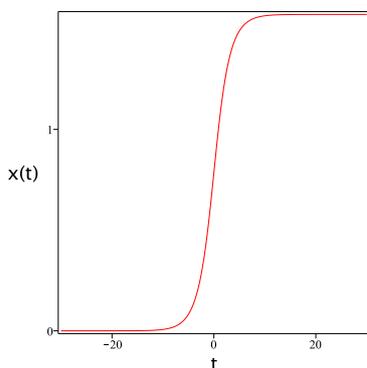
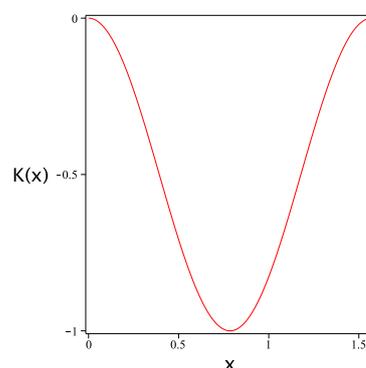
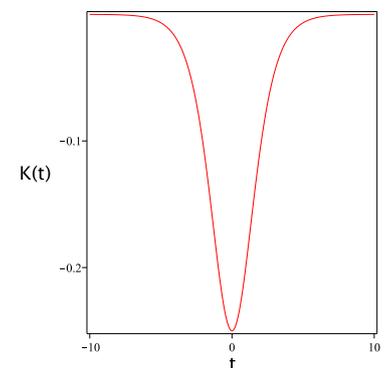
$$V(x) = \frac{1}{\kappa} \frac{\alpha^2}{8} \sin^2(2x) \left[\frac{3}{2} \tan^2(x) + 1 \right],$$

$$\rho(x) = \frac{3\alpha^2}{4\kappa} \sin^4(x), \quad p(x) = -\frac{1}{\kappa} \frac{\alpha^2}{8} \sin^2(2x) \left[\frac{3}{2} \tan^2(x) + 2 \right].$$

Переменная $x \in (0, \frac{\pi}{2})$, а $t \in (-\infty, \infty)$. Построим графики всех полученных зависимостей:

Рис. 11.9. График $x(t)$ Рис. 11.10. График $V(x)$ Рис. 11.11. График $V(t)$

Как видно из Рис. 11.9 – 11.10, потенциал $V(x)$ растет с возрастанием x от $V_{min} = 0$ при $x \rightarrow 0$ до $V_{max} = \frac{1}{\kappa} \frac{3\alpha^2}{4}$ при $x \rightarrow \frac{\pi}{2}$. Потенциал $V(t)$ также возрастает от значения $V(-\infty) = 0$ до $V(\infty) = \frac{1}{\kappa} \frac{3\alpha^2}{4}$.

Рис. 11.12. График $x(t)$ Рис. 11.13. График $K(x)$ Рис. 11.14. График $K(t)$

Согласно Рис. 11.12 – 11.13, потенциал $K(x)$ имеет минимум $K_{min} = -\frac{\alpha^2}{8\kappa}$ при $x = \frac{\pi}{4}$ (что соответствует $t = 0$). $K(t)$ также имеет минимум $K_{min} = -\frac{\alpha^2}{8\kappa}$ при $t = 0$. При этом в «крайних» положениях $K(t)$ и $K(x)$ асимптотически приближаются к нулю.

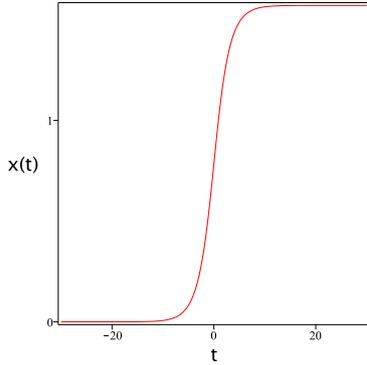


Рис. 11.15. График $x(t)$

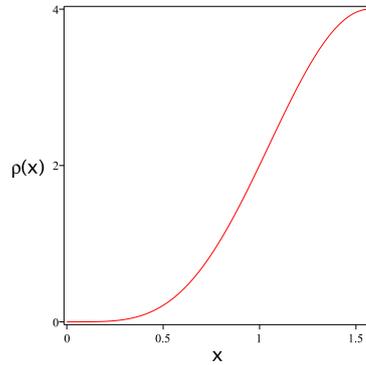


Рис. 11.16. График $\rho(x)$

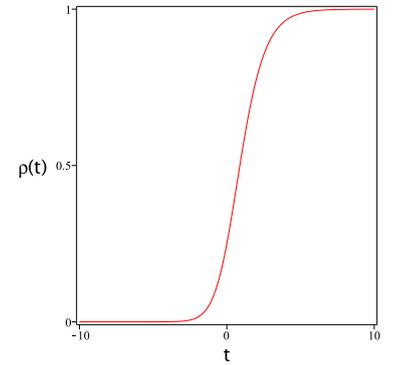


Рис. 11.17. График $\rho(t)$

Для «появляющейся» вселенной плотность фантомного скалярного поля с течением времени возрастает, это видно из Рис. 11.17, похожим образом ведет себя и зависимость $\rho(x)$. Возрастание происходит от $\rho_{min} = 0$ до $\rho_{max} = \frac{3\alpha^2}{4\kappa}$.

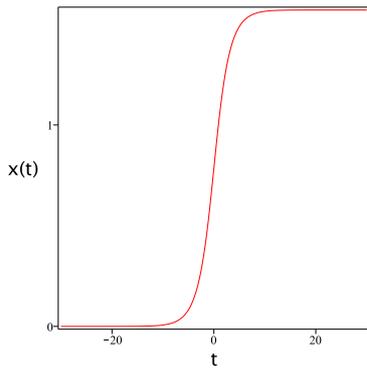


Рис. 11.18. График $x(t)$

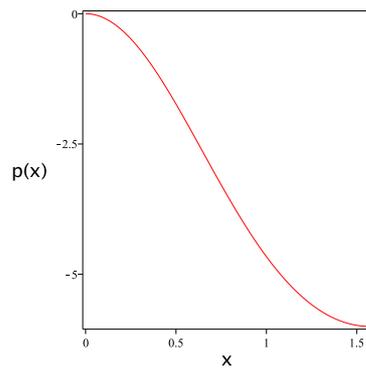


Рис. 11.19. График $p(x)$

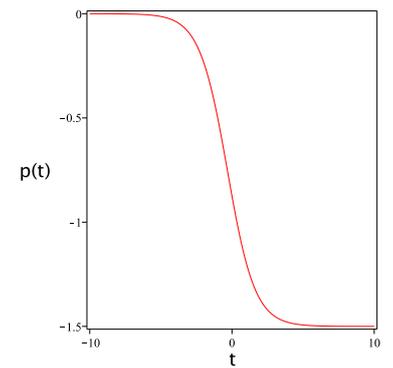


Рис. 11.20. График $p(t)$

Давление фантомного скалярного поля отрицательное ($p \rightarrow 0$ при $t \rightarrow -\infty$ ($x \rightarrow 0$)) и с течением времени уменьшается, выходя на минимальное значение $p_{min} = -\frac{3\alpha^2}{4\kappa}$, при $t \rightarrow \infty$.

Для модели обобщенного режима ранней инфляции характерны те же решения, но для $t \in (0, \infty)$ и $x \in (\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$, и все иллюстрации для «появляющейся» вселенной справедливы на этих интервалах.

Следует рассмотреть еще один случай $m = \frac{1}{3}$. Тогда потенциал 11.17 принимает вид схожий с потенциалом *sin*-Гордона:

$$V(\phi) = \frac{1}{\kappa} \frac{\alpha^2}{3} \sin^2(\phi B_1^*), \quad (11.17)$$

где $B_1^* = \pm \frac{1}{2\sqrt{\frac{2}{3\kappa}}}$.

Еще одной особенностью решения является то обстоятельство, что зависимость поля ϕ от времени для обобщенного режима ранней инфляции ($\phi(t) = \frac{1}{B_1} \arctan\left(\frac{e^{\frac{\alpha}{2}t}}{\sqrt{\beta}}\right)$) имеет схожую структуру с решением для масштабного фактора, эволюционирующего по закону гиперболического косинуса ($a(t) = A \operatorname{ch}(\alpha t) \rightarrow \phi(t) = \sqrt{\frac{2}{\kappa}} \arctan(e^{\alpha t})$).

Решение, имеющее схожий потенциал и зависимость $\phi(t)$ для масштабного фактора типа гиперболического косинуса, рассматривалось в работе [86].

Также оказывается возможным свести полевое уравнение на точном решении для $m = \frac{1}{3}$ к уравнению типа *sin*-Гордона.

$$\ddot{\tilde{\phi}} - \frac{\alpha^2}{4} \sin \tilde{\phi} = 0 \quad (11.18)$$

где $\tilde{\phi} = 4iB_1\phi$.

11.3.2. Точные решения для двухкомпонентной киральной космологической модели

Открытая и замкнутая Вселенная

Перейдем к рассмотрению точных решений для открытой и замкнутой Вселенной, полученных в рамках двухкомпонентной киральной космологической модели для анзацев $[\pm 1a]$, $[\pm 1d]$, $[\pm 3a]$, $[\pm 3d]$.

Анзац $[\pm 1a]$

Точное решение для анзаца $\pm 1a$ было получено в работе [87], и оно имеет следующий вид ($h_{11} = -1$):

$$a(t) = A(\beta + e^{\alpha t})^m.$$

Решение

$$\phi(t) = \frac{1}{B_1} \arctan\left(\frac{e^{\frac{\alpha}{2}t}}{\sqrt{\beta}}\right), \quad (11.19)$$

$$V_1(\phi) = \frac{1}{\kappa} \frac{m\alpha^2}{4} \sin^2(2\phi B_1) [3m \tan^2(\phi B_1) + 1], \quad (11.20)$$

$$\psi(t) = \frac{1}{B_2} t, \quad (11.21)$$

$$h_{22}(\phi) = \frac{[\cos^2(B_1\phi)]^{2m}}{A^2 \beta^{2m}}, \quad (11.22)$$

$$V_2(\psi) = 2 \frac{\epsilon}{\kappa} \frac{1}{A(\beta + e^{\alpha\psi B_2})^m}, \quad (11.23)$$

где $B_1 = \pm \frac{1}{2\sqrt{\frac{2m}{\kappa}}}$, $B_2 = \pm \frac{1}{\sqrt{\frac{2\epsilon}{\kappa}}}$.

Как было ранее установлено поле ϕ - фантомное, а поле ψ при значении $\epsilon = 1$ каноническое, а при $\epsilon = -1$ фантомное. Запишем потенциал $V(\phi, \psi)$ в полной форме

для случая $\beta = 1$, $m = \frac{1}{2}$, $A = a_i$, одновременно восстанавливая значение скорости света:

$$V(\phi, \psi) = V_1(\phi) + \sqrt{h_{22}(\phi)}V_2(\psi) = \frac{1}{\kappa} \left(\frac{\alpha^2}{8} \sin^2(2\phi B_1) \left[\frac{3}{2} \tan^2(\phi B_1) + 1 \right] + \frac{2\epsilon c^2 \cos(\phi B_1)}{a_i^2(1 + e^{\alpha\psi B_2})^{1/2}} \right). \quad (11.24)$$

Для облегчения анализа графика функции $V(\phi, \psi)$ будем рассматривать следующую зависимость $x = B_1\phi$, $y = B_2\psi$. Тогда формула (11.24) переписется в следующей форме:

$$V(x, y) = V_1(x) + \sqrt{h_{22}(x)}V_2(y) = \frac{1}{\kappa} \left(\frac{\alpha^2}{8} \sin^2(2x) \left[\frac{3}{2} \tan^2(x) + 1 \right] + \frac{2\epsilon c^2 \cos(x)}{a_i^2(1 + e^{\alpha y})^{1/2}} \right). \quad (11.25)$$

Области задания функций x и y следующие: $x \in (0, \frac{\pi}{2})$, $y \in (-\infty, \infty)$. Рассмотрим поведение потенциала для крайних значений x и y . Для случаев $x \rightarrow 0$ и $x \rightarrow \frac{\pi}{2}$ имеем:

$$\lim_{x \rightarrow 0} (V(x, y)) = \frac{1}{\kappa} \frac{2\epsilon c^2}{a_i^2(1 + e^{\alpha y})^{1/2}}, \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (V(x, y)) = \frac{1}{\kappa} \frac{3\alpha^2}{4}. \quad (11.26)$$

Прделаем аналогичные операции для $y \rightarrow -\infty$ и $y \rightarrow \infty$:

$$\lim_{y \rightarrow -\infty} (V(x, y)) = V_1(x) + \frac{1}{\kappa} \frac{2\epsilon c^2 \cos(x)}{a_i^2}, \quad \lim_{y \rightarrow \infty} (V(x, y)) = V_1(x). \quad (11.27)$$

Как видно из выражений (11.26) при $x \rightarrow \frac{\pi}{2}$ $V(x, y)$ перестает зависеть от y , принимая конкретное значение.

Таким образом, соотношениями (11.26) мы установили поведение потенциала $V(x, y)$ в плоскостях, перпендикулярных оси x для двух крайних значений x . Аналогичным образом соотношения (11.27) устанавливают поведение $V(x, y)$ в плоскостях, перпендикулярных оси y для двух крайних значений y .

Следует также рассмотреть два случая, когда одновременно $x \rightarrow 0$, $y \rightarrow -\infty$, что соответствует $t \rightarrow -\infty$ и $x \rightarrow \frac{\pi}{2}$, $y \rightarrow \infty$ для $t \rightarrow \infty$:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow -\infty}} (V(x, y)) = \frac{1}{\kappa} \frac{2\epsilon c^2}{a_i^2}, \quad \lim_{\substack{x \rightarrow \frac{\pi}{2} \\ y \rightarrow \infty}} (V(x, y)) = \frac{1}{\kappa} \frac{3\alpha^2}{4}. \quad (11.28)$$

Следовательно, мы получили два крайних значения $V(x, y)$ (крайних как для переменных x и y , так и для времени t).

Возьмем частные производные от $V(\phi, \psi)$:

$$V_1(\phi)_{,\phi} = \frac{\alpha^2 B_1}{\kappa} \sin(B_1\phi) \cos(B_1\phi) [\sin^2(B_1\phi) + 1], \quad (11.29)$$

$$(\sqrt{h_{22}(\phi)})_{,\phi} = -\frac{B_1}{a_i} \sin(B_1\phi), \quad V_2(\psi)_{,\psi} = -\frac{\epsilon}{\kappa a_i} \frac{\alpha B_2 e^{\alpha\psi B_2}}{(1 + e^{\alpha\psi B_2})^{3/2}}. \quad (11.30)$$

Графики потенциала $V(x, y)$ для случаев $\epsilon = 1$, $2c^2 < \frac{1}{2}a_i^2\alpha^2$ и $\epsilon = 1$, $a_i^2\alpha^2 < 2c^2$ приведены на Рис. 11.21 и 11.22 соответственно. Эволюция потенциала начинается для (x, y) при $(0, -\infty)$ и оканчивается при $(\frac{\pi}{2}, \infty)$. В результате, на Рис. 11.21 потенциал растет, а на Рис. 11.22 потенциал убывает, что соответствует росту потенциала $V(t)$ для случая $2c^2 < \frac{1}{2}a_i^2\alpha^2$, и, соответственно, убыванию $V(t)$ при $a_i^2\alpha^2 < 2c^2$. Как видно из графиков, у данных поверхностей нет соответствующих «долин» и «минимумов». Инфляция в данной модели длится вечно.

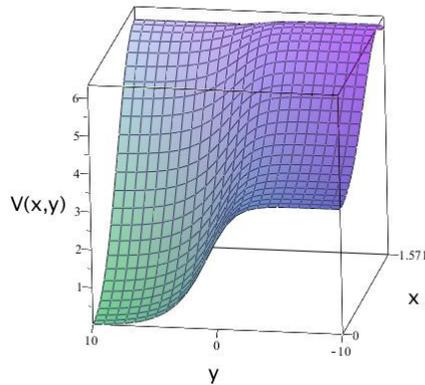


Рис. 11.21. График $V(x, y)$ для случая $B_1\phi_0 = 0$, $\epsilon = 1$, $2c^2 < \frac{1}{2}a_i^2\alpha^2$

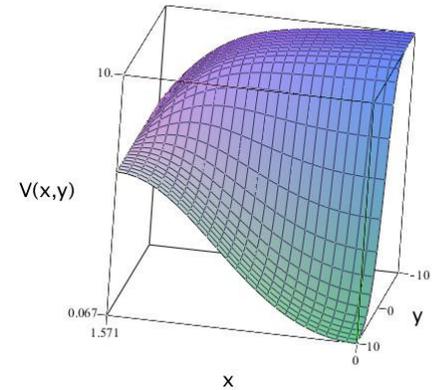


Рис. 11.22. График $V(x, y)$ для случая $B_1\phi_0 = 0$, $\epsilon = 1$, $a_i^2\alpha^2 < 2c^2$

Движение в плоскости (x, y) на решении, характеризуется графиком Рис. 11.23. При проекции данной кривой на плоскость $V(x, y)$ графиков 11.21 и 11.22, мы получим путь эволюции потенциала в этих двух случаях.

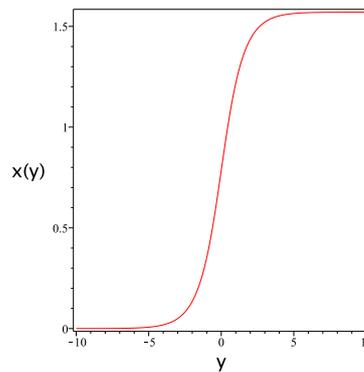


Рис. 11.23. Траектория переменной x в зависимости от y на решении анзаца $[\pm 1a]$

Чтобы получить решение и графическую интерпретацию для обобщенного режима

ранней инфляции достаточно рассмотреть следующие интервалы изменения переменных $t \in (0, \infty)$, $x \in (\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$, $y \in (0, \infty)$, для полученных результатов данного раздела.

Следует отметить работу [89], в которой использовалась сходная с анзацами $[\pm 1a]$ - $[\pm 1d]$ структура потенциала $U(\phi, \xi) = e^{-\beta\kappa\xi}V(\phi)$, где $F = (\beta/4)\kappa\xi$ (для анзаца $[\pm 1a]$ - $[\pm 1d]$, вторая часть потенциала имеет вид $e^{f(\phi)}V(\psi)$).

Анзац $[\pm 1d]$

Одно из решений для анзаца $[\pm 1d]$ имеет следующий вид ($h_{11} = -1$):

$$\phi(t) = \frac{1}{B_1} \arctan \left(\frac{e^{\frac{\alpha}{2}t}}{\sqrt{\beta}} \right), \quad (11.31)$$

$$V_1(\phi) = \frac{1}{\kappa} \frac{m\alpha^2}{4} \sin^2(2\phi B_1) [3m \tan^2(\phi B_1) + 1], \quad (11.32)$$

$$\psi(t) = \frac{1}{B_2} e^{\alpha t}, \quad (11.33)$$

$$h_{22}(\phi) = \frac{\cos^{4m}(B_1\phi)}{A^2 \beta^{2m+2} \alpha^2 \tan^4(B_1\phi)}, \quad (11.34)$$

$$V_2(\psi) = \frac{2\epsilon}{\kappa} \frac{\alpha B_2 \psi}{A(\beta + B_2 \psi)^m}, \quad (11.35)$$

где $B_1 = \pm \frac{1}{2\sqrt{\frac{2m}{\kappa}}}$, $B_2 = \pm \frac{1}{\sqrt{\frac{2\epsilon}{\kappa}}}$.

Запишем полный потенциал для случая $A = a_i$, $\beta = 1$, $m = \frac{1}{2}$:

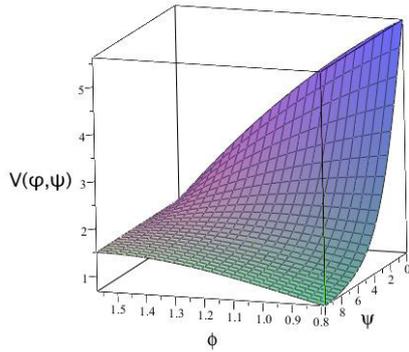
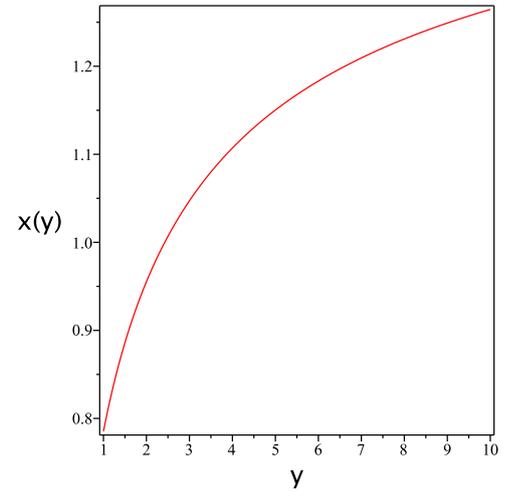
$$V(\phi, \psi) = V_1(\phi) + \sqrt{h_{22}(\phi)} V_2(\psi) = \frac{1}{\kappa} \left(\frac{\alpha^2}{8} \sin^2(2\phi B_1) \left[\frac{3}{2} \tan^2(\phi B_1) + 1 \right] + \frac{2\epsilon c^2}{a_i^2} \frac{\cos(B_1\phi) B_2 \psi}{\tan^2(B_1\phi) (1 + B_2 \psi)^{\frac{1}{2}}} \right). \quad (11.36)$$

Для упрощения анализа представим полный потенциал в переменных $x = B_1\phi$ и $y = B_2\psi$. Отметим, что $x \in (0, \frac{\pi}{2})$, а $y \in (0, \infty)$.

$$V(x, y) = \frac{1}{\kappa} \left(\frac{\alpha^2}{8} \sin^2(2x) \left[\frac{3}{2} \tan^2(x) + 1 \right] + \frac{2\epsilon c^2}{a_i^2} \frac{\cos(x)y}{\tan^2(x)(1+y)^{\frac{1}{2}}} \right). \quad (11.37)$$

Сложности с построением графика потенциала $V(x, y)$ связаны с формой слагаемого при $\frac{2\epsilon c^2}{a_i^2}$. В случае, когда $x \rightarrow 0$ и $y \rightarrow 0$, мы приходим к неопределенности вида $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \left(\frac{y}{\tan^2(x)^2} \right)$. Т.к. x и y - переменные, с разной скоростью стремящиеся к нулю, то мы не можем определить значение данного предела без перехода к зависимостям $x(t)$ и $y(t)$ или например $x(y)$.

Построить график $V(x, y)$ возможно для обобщенного режима ранней инфляции в пределах изменения переменных $t \in (0, \infty)$, $x \in (\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$, $y \in (1, \infty)$. Вид потенциала для этого случая приведен на Рис. 11.24. Решение для обобщенного режима ранней инфляции этого раздела справедливы для указанных интервалов. При проекции кривой (Рис. 11.25) на плоскость $V(x, y)$ (Рис. 11.24), мы получим путь эволюции потенциала.

Рис. 11.24. График $V(x, y)$ для анзаца $\pm 1d$ Рис. 11.25. Траектория переменной x в зависимости от y на решении анзаца $\pm 1d$ **Анзац $[\pm 3a]$**

Решение для анзаца $[\pm 3a]$ имеет следующий вид [87] ($h_{11} = -1$):

$$\phi(t) = \frac{1}{B_1} \arctan\left(\frac{e^{\frac{\alpha}{2}t}}{\sqrt{\beta}}\right), \quad (11.38)$$

$$V_1(\phi) = \frac{1}{\kappa} \frac{m\alpha^2}{4} \sin^2(2\phi B_1) [3m \tan^2(\phi B_1) + 1], \quad (11.39)$$

$$\psi(t) = \frac{1}{B_2} t, \quad (11.40)$$

$$h_{22}(\psi) = \frac{1}{A^2(\beta + e^{\alpha(B_2\psi)})^{2m}}, \quad (11.41)$$

$$V_2(\psi) = \frac{2\epsilon}{\kappa} \frac{1}{A^2(\beta + e^{\alpha(B_2\psi)})^{2m}}, \quad (11.42)$$

где $B_1 = \pm \frac{1}{2\sqrt{\frac{2m}{\kappa}}}$, $B_2 = \pm \frac{1}{\sqrt{\frac{2\epsilon}{\kappa}}}$.

Запишем полный потенциал для случая $A = a_i$, $\beta = 1$, $m = \frac{1}{2}$, одновременно восстанавливая скорость света:

$$V(\phi, \psi) = V_1(\phi) + V_2(\psi) = \frac{1}{\kappa} \left(\frac{\alpha^2}{8} \sin^2(2\phi B_1) \left[\frac{3}{2} \tan^2(\phi B_1) + 1 \right] + \frac{2\epsilon c^2}{a_i^2(1 + e^{\alpha(B_2\psi)})} \right). \quad (11.43)$$

Для упрощения анализа и построения графиков представим полный потенциал в переменных $x = B_1\phi$ и $y = B_2\psi$. Отметим, что $x \in (0, \frac{\pi}{2})$, а $y \in (-\infty, \infty)$.

$$V(x, y) = V_1(x) + V_2(y) = \frac{1}{\kappa} \left(\frac{\alpha^2}{8} \sin^2(2x) \left[\frac{3}{2} \tan^2(x) + 1 \right] + \frac{2\epsilon c^2}{a_i^2(1 + e^{\alpha y})} \right). \quad (11.44)$$

Рассмотрим пределы для потенциала $V(x, y)$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow -\infty}} (V(x, y)) = \frac{1}{\kappa} \frac{2\epsilon c^2}{a_i^2}, \quad \lim_{\substack{x \rightarrow \frac{\pi}{2} \\ y \rightarrow \infty}} (V(x, y)) = \frac{1}{\kappa} \frac{3\alpha^2}{4}. \quad (11.45)$$

График потенциала $V(x, y)$ приведен на Рис. 11.26. Эволюция поля протекает от значения $V(0, -\infty)$ до $V(\frac{\pi}{2}, \infty)$. Зависимость $x(y)$ на решении анзаца $[\pm 3a]$ приведена на Рис. 11.27. При проекции данной кривой на плоскость $V(x, y)$ графика 11.26, мы получим путь эволюции потенциала в этом случае.

Решение и иллюстрации этого раздела справедливы для обобщенного режима ранней инфляции на интервале $t \in (0, \infty)$, $x \in (\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$, $y \in (0, \infty)$.

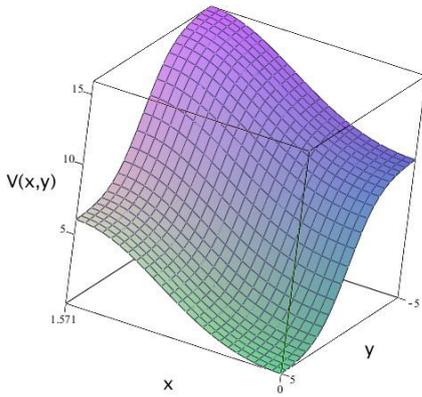


Рис. 11.26. График $V(x, y)$ для анзаца $[\pm 3a]$

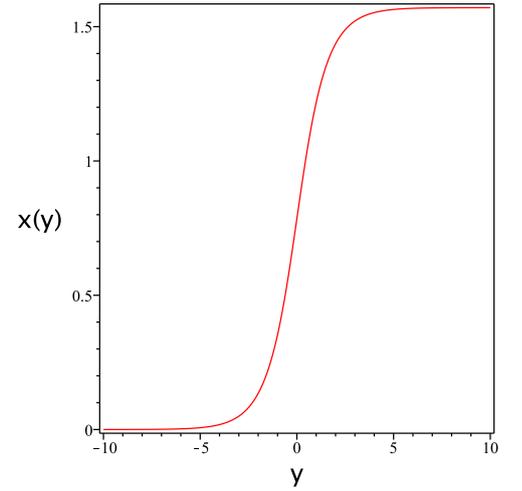


Рис. 11.27. Траектория переменной x в зависимости от y на решении анзаца $[\pm 3a]$

Анзац $[\pm 3d]$

Одно из решений для анзаца $[\pm 3d]$ имеет следующий вид ($h_{11} = -1$):

$$\phi(t) = \frac{1}{B_1} \arctan\left(\frac{e^{\frac{\alpha}{2}t}}{\sqrt{\beta}}\right), \quad (11.46)$$

$$V_1(\phi) = \frac{1}{\kappa} \frac{m\alpha^2}{4} \sin^2(2\phi B_1) [3m \tan^2(\phi B_1) + 1], \quad (11.47)$$

$$\psi = \frac{1}{B_2} \arctan(Dt), \quad (11.48)$$

$$h_{22}(\psi) = \frac{\left(1 + \frac{\tan^2(B_2\psi)}{D^2}\right)^2}{A^2 \left(\beta + e^{\frac{\alpha}{D} \tan(B_2\psi)}\right)^{2m}}, \quad (11.49)$$

$$V_2(\psi) = \frac{2\epsilon}{\kappa} \frac{1}{A^2 (\beta + e^{\frac{\alpha}{D} \tan(B_2\psi)})}, \quad (11.50)$$

где $B_1 = \pm \frac{1}{2\sqrt{\frac{2m}{\kappa}}}$, $B_2 = \pm \frac{1}{\sqrt{\frac{2\epsilon}{\kappa}}}$, $D = const$.

Поля ϕ и ψ для $\epsilon = -1$ – фантомные. Запишем $V(\phi, \psi)$ в терминах x и y , где $x = B_1\phi$ и $y = B_2\psi$, восстанавливая скорость света:

$$V(x, y) = V_1(x) + V_2(y) = \frac{1}{\kappa} \left(\frac{\alpha^2}{8} \sin^2(2x) \left[\frac{3}{2} \tan^2(x) + 1 \right] + \frac{2\epsilon}{a_i^2} \frac{c^2}{(1 + e^{\frac{\alpha}{D} \tan(y)})} \right). \quad (11.51)$$

Область изменения x была установлена ранее, а область изменения $y \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

Рассмотрим поведение потенциала при крайних значениях x и y независимо друг от друга, а также рассмотрим двойные пределы, когда обе величины имеют крайние значения:

$$\lim_{x \rightarrow 0} (V(x, y)) = V_2(y), \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (V(x, y)) = \frac{1}{\kappa} \frac{3\alpha^2}{4} + V_2(y). \quad (11.52)$$

Соответственно для y имеем:

$$\lim_{y \rightarrow -\infty} (V(x, y)) = V_1(x) + \frac{2\epsilon c^2}{a_i^2 \kappa}, \quad \lim_{y \rightarrow \infty} (V(x, y)) = V_1(x). \quad (11.53)$$

Двойные пределы принимают значения:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow -\frac{\pi}{2}}} (V(x, y)) = \frac{1}{\kappa} \frac{2\epsilon c^2}{a_i^2}, \quad \lim_{\substack{x \rightarrow \frac{\pi}{2} \\ y \rightarrow \frac{\pi}{2}}} (V(x, y)) = \frac{1}{\kappa} \frac{3\alpha^2}{4}. \quad (11.54)$$

График потенциала (11.51) приведен на Рис. 11.28. Эволюция потенциала протекает от значения $V(0, -\frac{\pi}{2})$ до $V(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Зависимость $x(y)$ на решении анзаца $[\pm 3d]$ приведена на Рис. 11.29. При проекции данной кривой на плоскость $V(x, y)$ графика 11.28, мы получим путь эволюции потенциала в этом случае.

Решение и иллюстрации этого раздела справедливы для специальной инфляции на интервале $t \in (0, \infty)$, $x \in (\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$, $y \in (0, \frac{\pi}{2})$.

Пространственно плоская Вселенная

Анзац [01]

Решение для анзаца [01] имеет следующий вид ($h_{11} = -1$):

$$\phi(t) = \frac{1}{B_1} \arctan \left(\frac{e^{\frac{\alpha}{2}t}}{\sqrt{\beta}} \right), \quad (11.55)$$

$$V_1(\phi) = \frac{\lambda m \alpha^2}{\kappa} \frac{1}{4} \sin^2(2\phi B_1) [3m \tan^2(\phi B_1) + 1], \quad (11.56)$$

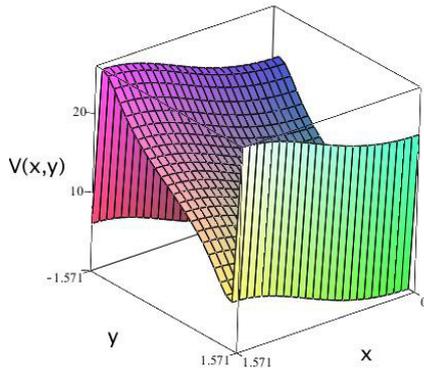


Рис. 11.28. График $V(x,y)$ для анзаца $[\pm 3d]$

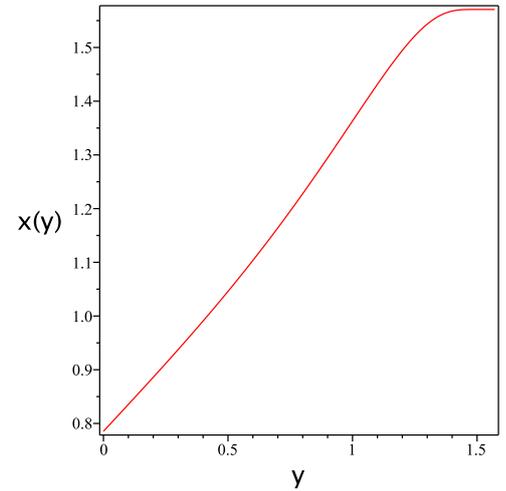


Рис. 11.29. Траектория переменной x в зависимости от y на решении анзаца $[\pm 3d]$

$$\psi(t) = \frac{1}{B_2} t, \quad (11.57)$$

$$h_{22}(\psi) = -\frac{m\beta\alpha^2 e^{\alpha(B_2\psi)}}{(\beta + e^{\alpha(B_2\psi)})^2}, \quad (11.58)$$

$$V_2(\psi) = \frac{1 - \lambda}{\kappa} \frac{\alpha^2 m e^{\alpha(B_2\psi)} (3m e^{\alpha(B_2\psi)} + \beta)}{(\beta + e^{\alpha(B_2\psi)})^2}, \quad (11.59)$$

где $B_1 = \pm \frac{1}{2\sqrt{\frac{2m\lambda}{\kappa}}}$, $B_2 = \pm \frac{1}{\sqrt{\frac{2(1-\lambda)}{\kappa}}}$, $0 < \lambda < 1$.

Запишем $V(\phi, \psi)$ в полной форме для случая $\beta = 1$, $m = \frac{1}{2}$, $A = a_i$:

$$V(\phi, \psi) = V_1(\phi) + V_2(\psi) = \frac{1}{\kappa} \left(\frac{\lambda\alpha^2}{8} \sin^2(2\phi B_1) \left[\frac{3}{2} \tan^2(\phi B_1) + 1 \right] + \frac{1 - \lambda}{2} \frac{\alpha^2 e^{\alpha(B_2\psi)} \left[\frac{3}{2} e^{\alpha(B_2\psi)} + 1 \right]}{(1 + e^{\alpha(B_2\psi)})^2} \right). \quad (11.60)$$

Далее введем следующие переменные для облегчения анализа $x = B_1\phi$ и $y = B_2\psi$. Области значения этих переменных $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ и $y \in (-\infty, \infty)$.

$$V(x, y) = V_1(x) + V_2(y) = \frac{1}{\kappa} \left(\frac{\lambda\alpha^2}{8} \sin^2(2x) \left[\frac{3}{2} \tan^2(x) + 1 \right] + \frac{1 - \lambda}{2} \frac{\alpha^2 e^{\alpha y} \left[\frac{3}{2} e^{\alpha y} + 1 \right]}{(1 + e^{\alpha y})^2} \right). \quad (11.61)$$

Рассмотрим поведение потенциала при крайних значениях x и y независимо друг от друга, а также рассмотрим двойные пределы, когда обе величины имеют крайние значения.

$$\lim_{x \rightarrow 0} (V(x, y)) = \frac{1}{\kappa} \frac{1 - \lambda \alpha^2 e^{\alpha y} \left[\frac{3}{2} e^{\alpha y} + 1 \right]}{2(1 + e^{\alpha y})^2},$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (V(x, y)) = \frac{1}{\kappa} \left(\frac{3\alpha^2 \lambda}{4} + \frac{1 - \lambda \alpha^2 e^{\alpha y} \left[\frac{3}{2} e^{\alpha y} + 1 \right]}{2(1 + e^{\alpha y})^2} \right). \quad (11.62)$$

Соответственно для y имеем:

$$\lim_{y \rightarrow -\infty} (V(x, y)) = V_1(x), \quad \lim_{y \rightarrow \infty} (V(x, y)) = V_1(x) + \frac{1}{\kappa} \frac{1 - \lambda 3\alpha^2}{2}. \quad (11.63)$$

Рассмотрим двойные пределы $x \rightarrow 0, y \rightarrow -\infty$, что соответствует $t \rightarrow -\infty$ и $x \rightarrow \frac{\pi}{2}, y \rightarrow \infty$, что соответствует $t \rightarrow \infty$:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow -\infty}} (V(x, y)) = 0, \quad \lim_{\substack{x \rightarrow \frac{\pi}{2} \\ y \rightarrow \infty}} (V(x, y)) = \frac{1}{\kappa} \frac{3\alpha^2}{4}. \quad (11.64)$$

График потенциала (11.61) приведен на Рис. 11.30. Для данного решения характерен рост потенциала от значения $V = 0$ до $V = \frac{1}{\kappa} \frac{3\alpha^2}{4}$.

Зависимость $x(y)$ на решении для анзаца [01] приведена на Рис. 11.31. При проекции данной кривой на плоскость $V(x, y)$ графика 11.30, мы получим путь эволюции потенциала в этом случае.

Решение и иллюстрации этого раздела справедливы для обобщенного режима ранней инфляции на интервале $t \in (0, \infty), x \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right), y \in (0, \infty)$.

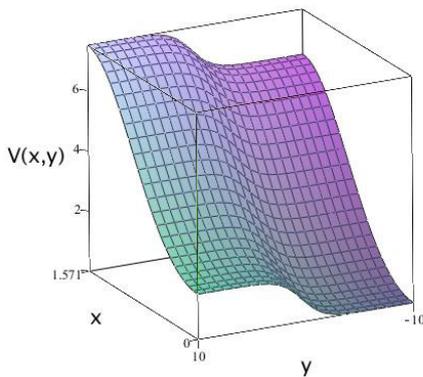


Рис. 11.30. График $V(x, y)$ для анзаца [01] в случае $0 < \lambda < 1$.

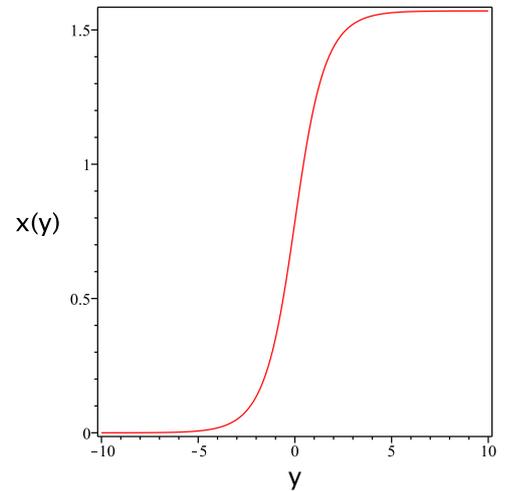


Рис. 11.31. Траектория переменной x в зависимости от y на решении анзаца [01]

Следует отметить, что в литературе встречаются потенциалы не только из физики высоких энергий, но и космологические. В работе [88] рассматривался потенциал вида $V(\phi) = V_0[\alpha \cosh(p\phi) + \beta \sinh(p\phi)]^q$, исследовались точные решения.

11.4. Космологические параметры для «появляющейся» вселенной и обобщенного режима ранней инфляции

В работе [87], опираясь на результаты [42], были получены космологические параметры для «появляющейся» вселенной в 4-х мерном пространстве ФРУ. Представленные результаты справедливы и для обобщенного режима ранней инфляции.

Результаты получены для масштабного фактора в общей форме $a(t) = A(\beta + e^{\alpha t})^m$, A , β , α , $const$.

Спектры мощности скалярных и тензорных возмущений имеют вид:

$$P_R(k) = \frac{\kappa m^3 \alpha^2 e^{3\alpha t_*}}{8\beta(\beta + e^{\alpha t_*})^2}, \quad P_G(k) = \frac{\kappa m^2 \alpha^2 e^{2\alpha t_*}}{2(\beta + e^{\alpha t_*})^2}. \quad (11.65)$$

Спектральные индексы скалярных и тензорных возмущений записываются в форме:

$$n_S(k) - 1 = \frac{3\beta + e^{\alpha t_*}}{m e^{\alpha t_*} + \beta}, \quad n_G = \frac{2\beta}{m e^{\alpha t_*} + \beta}. \quad (11.66)$$

Скалярно-тензорное отношение по квадрату амплитуд, а также отношение спектральных индексов тензорного и скалярного возмущений принимают значение:

$$\frac{T}{S} = 4 \frac{\beta}{m e^{\alpha t_*}}, \quad r = \frac{2\beta}{4\beta + (m+1)e^{\alpha t_*}}. \quad (11.67)$$

Убегание спектральных индексов скалярных и тензорных возмущений имеют вид:

$$\frac{dn_S}{d \ln(k)} = \frac{e^{\alpha t_*} \beta [e^{\alpha t_*} (1 - 5m) - \beta (3m + 1)]}{(\beta + m e^{\alpha t_*})^3}, \quad \frac{dn_G}{d \ln(k)} = -\frac{2m\beta e^{2\alpha t_*}}{(\beta + e^{\alpha t_*})^3}. \quad (11.68)$$

При этом t_* , характеризует момент времени выхода возмущений за горизонт.

Приведенные формы космологических параметров, полученные на основе точных решений, поддерживаются точной динамикой киральных полей. Поэтому при расчете космологических параметров мы можем использовать методику их вычисления для одного скалярного поля. Хотя, возможно, для некоторых режимов преобладания кинетической энергии одного поля над другим могут быть получены и отличные от приведенных параметров результаты. Дальнейшее сопоставление с наблюдательными данными возможно при точных вычислениях времени t_* пересечения горизонта для выбранных возмущений. Следует так же отметить, что в литературе рассматриваются космологические параметры для двух полей, например, работа Старобинского и др. [90].

Глава 12.

«Появляющаяся» вселенная в гравитации ЭГБ

12.1. Двухкомпонентная киральная космологическая модель для гравитации Эйнштейна-Гаусса-Бонне

Действие для гравитации Эйнштейна-Гаусса-Бонне (ЭГБ) имеет вид [91]

$$S = \frac{1}{2} \int d^5x \sqrt{-g} (R + \alpha_{GB} R_{GB}) + S_m. \quad (12.1)$$

Действие для материи S_m представим как действие для киральной космологической модели (ККМ) в случае пятимерия

$$S_m = S_{cctm} = \int d^5x \sqrt{-g} \left[\frac{1}{2} h_{AB}(\varphi) \varphi_{,a}^A \varphi_{,b}^B g^{ab} - V(\varphi) \right]. \quad (12.2)$$

Здесь мы полагаем, что эйнштейновская пятимерная гравитационная постоянная $\kappa = 1$. Индексы a, b, \dots пробегает значения 0, 1, 2, 3, 4 и α_{GB} – параметр связи Гаусса-Бонне. Описание ККМ для 4-х мерной гравитации было изложено в работе [92]. Слабое Гаусса-Бонне имеет вид:

$$R_{GB} = R^2 - 4R_{ab}R^{ab} + R_{abcd}R^{abcd}. \quad (12.3)$$

Вариация действия (12.1) дает уравнения гравитации ЭГБ

$$G_{ab} - \alpha_{GB} H_{ab} = T_{ab}, \quad (12.4)$$

где $G_{ab} = R_{ab} - \frac{1}{2} g_{ab} R$ – тензор Эйнштейна, и H_{ab} – тензор Лавлока, записанный следующим образом:

$$H_{ab} = 4R_{ac}R_b^c + 4R^{cd}R_{acbd} - 2RR_{ab} - 2R_a^{cde}R_{bcde} + \frac{1}{2}g_{ab}R_{GB}. \quad (12.5)$$

Киральные полевые уравнения получаются при вариации действия (12.2) по φ^C

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_a (\sqrt{-g} \varphi_{,A}^a) - \frac{1}{2} \frac{\partial h_{BC}}{\partial \varphi^A} \varphi_{,a}^C \varphi_{,b}^B g^{ab} + V_{,A} = 0, \quad (12.6)$$

где $V_{,A} = \frac{\partial V}{\partial \varphi^A}$.

Запишем пятимерную метрику ФРУ в следующей форме:

$$dS^2 = -dt^2 + a(t)^2 \left(\frac{dr^2}{1 - \epsilon r^2} + r^2(d\theta + \sin^2 \theta(d\varphi^2 + \sin^2 \varphi d\chi^2)) \right), \quad (12.7)$$

здесь $\epsilon = -1, 0, +1$ для открытой, плоской и замкнутой Вселенной соответственно.

Запишем метрику пространства-целей в форме:

$$ds_{ts} = h_{11}d\phi^2 + h_{22}(\phi, \psi)d\psi^2. \quad (12.8)$$

Тензор энергии-импульса для пространства-целей (12.8) и пятимерного пространства-времени (12.7) имеет вид:

$$T_{ab} = h_{11}\phi_{,a}\phi_{,b} + h_{22}\psi_{,a}\psi_{,b} - g_{ab} \left[\frac{1}{2}h_{11}\phi_{,c}\phi^{,c} + \frac{1}{2}h_{22}\psi_{,c}\psi^{,c} - V(\phi, \psi) \right], \quad (12.9)$$

где $h_{11} = const$.

Представим основные уравнения ККМ (12.6) и гравитации ЭГБ (12.4) в пятимерном случае для пространства-времени ФРУ.

$$H^2 + \frac{\epsilon}{a^2} + \alpha_{GB} \left(H^2 + \frac{\epsilon}{a^2} \right)^2 = \frac{1}{6} \left(\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}h_{22}(\phi, \psi)\dot{\psi}^2 + V(\phi, \psi) \right), \quad (12.10)$$

$$\left[1 + 2\alpha_{GB} \left(H^2 + \frac{\epsilon}{a^2} \right) \right] \left(\dot{H} - \frac{\epsilon}{a^2} \right) = -\frac{1}{3} \left(h_{11}\dot{\phi}^2 + h_{22}(\phi, \psi)\dot{\psi}^2 \right), \quad (12.11)$$

$$h_{11}\ddot{\phi} + 4Hh_{11}\dot{\phi} - \frac{1}{2}\frac{\partial h_{22}}{\partial \phi}\dot{\psi}^2 + \frac{\partial V}{\partial \phi} = 0, \quad h_{11} = constant, \quad (12.12)$$

$$h_{22}(\phi, \psi)\ddot{\psi} + \dot{h}_{22}(\phi, \psi)\dot{\psi} + 4Hh_{22}(\phi, \psi)\dot{\psi} - \frac{1}{2}\frac{\partial h_{22}}{\partial \psi}\dot{\psi}^2 + \frac{\partial V}{\partial \psi} = 0. \quad (12.13)$$

12.2. Гравитация ЭГБ для пространственно-плоского случая

Запишем уравнения (12.10) и (12.11) в несколько иной форме для пространственно-плоской Вселенной:

$$[1 + 2\alpha_{GB}H^2] \dot{H} = -\frac{1}{3} \left(h_{11}\dot{\phi}^2 + h_{22}(\phi, \psi)\dot{\psi}^2 \right), \quad (12.14)$$

$$\frac{V}{6} = H^2 + \frac{1}{4}\dot{H} + \alpha_{GB}H^2 \left(H^2 + \frac{1}{2}\dot{H} \right). \quad (12.15)$$

Воспользуемся подходом определения анзацев для отыскания точных решений второй главы диссертации. Сделаем соответствующие разбиения для ККМ в гравитации ЭГБ для пространственно-плоского случая:

$$h_{11}\dot{\phi}^2 = -3\dot{H}, \quad h_{22}(\psi)\dot{\psi}^2 = -6\alpha_{GB}H^2\dot{H}, \quad (12.16)$$

$$V(\phi, \psi) = V_1(\phi) + V_2(\psi), \quad (12.17)$$

$$V_1(\phi) = 6H^2 + \frac{3}{2}\dot{H}, \quad V_2(\psi) = 6\alpha_{GB}H^2 \left(H^2 + \frac{1}{2}\dot{H} \right). \quad (12.18)$$

Если осуществить подстановку (12.16)–(12.18) в (12.12)–(12.15), то мы придем к тождеству $0 \equiv 0$.

Рассмотрим точные решения на примере «появляющейся» вселенной [93] с масштабным фактором:

$$a(t) = A(\beta + e^{\alpha t})^m. \quad (12.19)$$

Вначале исследуем поведение $K(t)$ и $V(t)$, выразив их из (12.14) и (12.15):

$$V(t) = 6 \left(\frac{\alpha^2 m e^{\alpha t} (m e^{\alpha t} + \frac{1}{4}\beta)}{(\beta + e^{\alpha t})^2} + \alpha_{GB} \frac{\alpha^4 m^3 e^{3\alpha t} (m e^{\alpha t} + \frac{1}{2}\beta)}{(\beta + e^{\alpha t})^4} \right), \quad (12.20)$$

$$K(t) = -\frac{3}{2} \left(\frac{\beta \alpha^2 m e^{\alpha t}}{(\beta + e^{\alpha t})^2} + 2\alpha_{GB} \frac{\alpha^4 m^3 \beta e^{3\alpha t}}{(\beta + e^{\alpha t})^4} \right). \quad (12.21)$$

Следует отметить, что кинетическая энергия имеет отрицательное значение. На интервале $0 < t < \infty$ график $K(t)$ ведет себя так, как показано на Рис. 12.1. Кинетическая энергия имеет минимум и асимптотически приближается к нулю. Потенциал начинается с некоторого начального значения $V(t=0)$ и также асимптотически приближается к $V(t=\infty)$.

Рассмотрим пределы для случая $t \rightarrow \infty$:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} V(t) = 6\alpha^2 m^2 (1 + \alpha_{GB} \alpha^2 m^2), \quad \lim_{t \rightarrow \infty} K(t) = 0.$$

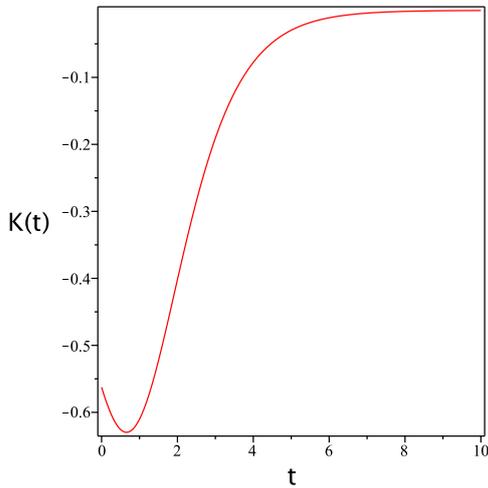


Рис. 12.1. График $K(t)$

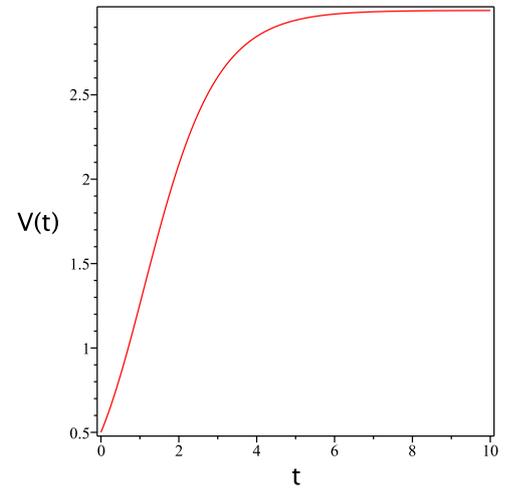


Рис. 12.2. График $V(t)$

Точное решение для случая линейной зависимости поля ψ от времени имеет вид:

$$\phi = \frac{1}{B_1} \arctan\left(\frac{e^{\frac{\alpha t}{2}}}{\sqrt{\beta}}\right), \quad V_1(\phi) = \frac{3m\alpha^2}{2} \sin^2(2B_1\phi) \left(m \tan^2(B_1\phi) + \frac{1}{4}\right) \quad (12.22)$$

где $\frac{1}{B_1} = 2\sqrt{3m}$,

$$h_{22}(\psi) = -\frac{e^{3\alpha B_2\psi}}{(\beta + e^{\alpha B_2\psi})^4} \quad (12.23)$$

$$\psi = \frac{1}{B_2} t, \quad V_2(\psi) = 6\alpha_{GB} \frac{m^3 \alpha^4 e^{3\alpha B_2\psi} (m e^{\alpha B_2\psi} + \frac{1}{2}\beta)}{(\beta + e^{\alpha B_2\psi})^4}, \quad (12.24)$$

где $\frac{1}{B_2} = \sqrt{6\alpha_{GB} m^3 \alpha^4 \beta}$.

Поле $V_1(\phi)$ имеет практически такую же форму что и в случае ФРУ для открытой и замкнутой Вселенной из предыдущей главы за исключением коэффициентов в скобках и при $\sin^2(2B_1\phi)$. Одно полевое уравнение из системы $h_{11}\ddot{\phi} + 4Hh_{11}\dot{\phi} + \frac{\partial V}{\partial \phi} = 0$ (здесь учтено $h_{22}(\psi)$) на решении при $m = \frac{1}{4}$ сводится к уравнению типа *sin*-Гордона вида $\ddot{\tilde{\phi}} - \frac{\alpha^2}{2} \sin \tilde{\phi} = 0$, где $\tilde{\phi} = 4iB_1\phi$. График потенциала поля $V_2(\psi)$ представлен на Рис. ???. Как видно из рисунка потенциал $V_2(\psi)$ с ростом ψ возрастает, выходя на насыщение.

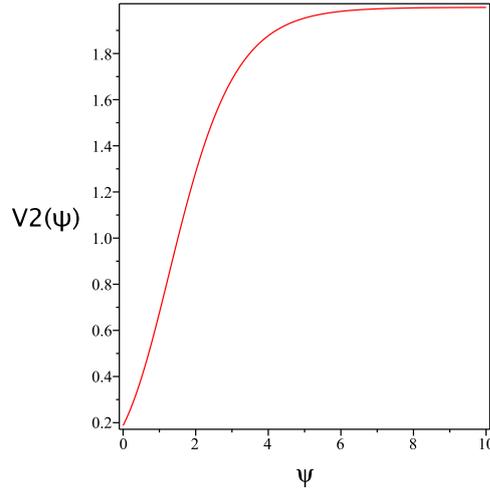
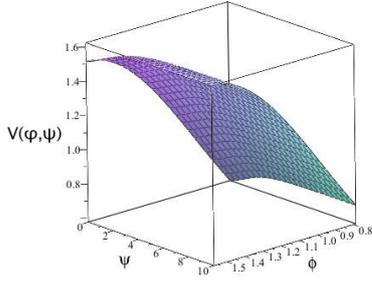
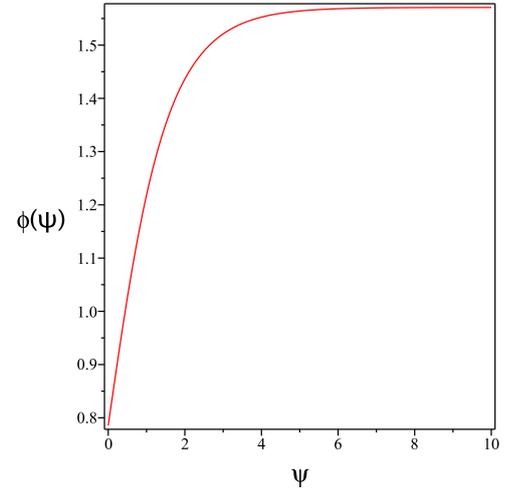


Рис. 12.3. График $V_2(\psi)$

Зависимость $\phi(\psi)$ на решении для гравитации ЭГБ приведена на Рис. 12.5. При проекции данной кривой на плоскость $V(x, y)$ графика 12.4, мы получим путь эволюции потенциала в этом случае.

12.3. Гравитация ЭГБ для открытого и замкнутого случая

В предыдущем разделе мы исследовали пространственно-плоский случай. Расширим рассматриваемую модель до открытого и замкнутого случая, введением третьего

Рис. 12.4. График $V_2(\psi)$ Рис. 12.5. Траектория переменной x в зависимости от u на решении

поля χ . Уравнения для кинетической, потенциальной энергии и полевые уравнения принимают вид:

$$K_{(\chi)} = \frac{1}{2} h_{33} \dot{\chi}^2 = \frac{3}{2} \frac{\epsilon}{a^2} \left(1 + 2\alpha_{GB} \left(H^2 - \dot{H} + \frac{\epsilon}{a^2} \right) \right), \quad (12.25)$$

$$V_{(\chi)} = 3\alpha_{GB} \frac{\epsilon^2}{a^4} + \frac{\epsilon}{a^2} \left(\frac{9}{2} + 3\alpha_{GB} \left(\dot{H} + 3H^2 \right) \right), \quad (12.26)$$

$$h_{33} \ddot{\chi} + 4H h_{33} \dot{\chi} + \frac{\partial V_{\chi}}{\partial \chi} = 0. \quad (12.27)$$

Метрика пространства-целей, дополненная $h_{33} = const$, остается диагональной. В случае «появляющейся» вселенной интеграл для поля χ имеет сложную форму:

$$\chi = \frac{\sqrt{3}}{A\sqrt{h_{33}}} \int (\beta + e^{\alpha t})^{-m} \sqrt{\epsilon \left[1 + 2\alpha_{GB} \left(\frac{m\alpha^2 e^{\alpha t} (m e^{\alpha t} - \beta)}{(\beta + e^{\alpha t})^2} + \frac{\epsilon}{A^2 (\beta + e^{\alpha t})^{2m}} \right) \right]} dt. \quad (12.28)$$

Поле χ – каноническое, если в подынтегральном выражении подкоренная зависимость больше нуля (в этом случае $h_{33} = 1$), χ – фантомное, если та же зависимость меньше нуля ($h_{33} = -1$). В случае $\beta \approx 0$ уравнение (12.28) упрощается (однако данное предположение рассматривается только для третьего поля):

$$\chi = \frac{\sqrt{3}}{A} \int dt e^{-2m\alpha t} \sqrt{e^{2m\alpha t} + 2\alpha_{GB} \left(m^2 \alpha^2 e^{2m\alpha t} + \frac{\epsilon}{A^2} \right)}. \quad (12.29)$$

Чтобы проинтегрировать полученное выражение, введем следующие зависимости:

$$Z = e^{2m\alpha t}, \quad B^2 = 1 + 2\alpha_{GB} m^2 \alpha^2, \quad D^2 = \frac{2\alpha_{GB}}{A^2 B^2}. \quad (12.30)$$

Таким образом, получается два решения для поля χ :

$$\epsilon = +1, h_{33} = +1, \quad (12.31)$$

$$\chi - \chi_* = \pm \frac{\sqrt{3}B}{Am\alpha} \left[-\frac{1}{2} \frac{\sqrt{Z + D^2}}{Z} + \frac{1}{4D} \ln \left(\frac{\sqrt{Z + D^2} - D}{\sqrt{Z + D^2} + D} \right) \right], \quad (12.32)$$

$$\epsilon = -1, h_{33} = -1, \quad (12.33)$$

$$\chi - \chi_* = \pm \frac{\sqrt{3}B}{Am\alpha} \left[-\frac{1}{2} \frac{\sqrt{Z - D^2}}{Z} + \frac{1}{4D} \arctan \left(\frac{\sqrt{Z - D^2}}{D} \right) \right], Z \geq D^2 \quad (12.34)$$

Неравенство $Z \geq D^2$ означает, что решение имеет силу лишь при значениях времени:

$$t \geq \frac{\ln(2\alpha_{GB}A^{-2}\alpha^{-2})}{2m\alpha}. \quad (12.35)$$

Когда $t \rightarrow \infty$ третье скалярное поле стремится к постоянной величине.

Таким образом, мы показали, что в теории гравитации ЭГБ для генерирования решений в «появляющейся» вселенной возникает необходимость введения дополнительного, канонического или фантомного поля, при рассмотрении замкнутой или открытой вселенной в рамках разработанного метода.

Авторы

Литература

- [1] Riess A. G. et al. Observational evidence from supernovae for an accelerating universe and a cosmological constant //The Astronomical Journal. – 1998. – Vol. 116, №. 3. – P. 1009-1038.
- [2] Perlmutter S. et al. Measurements of Ω and Λ from 42 high-redshift supernovae //The Astrophysical Journal. – 1999. – Vol. 517, №. 2. – P. 565-586.
- [3] Smoot G. COBE observations and results //arXiv preprint astro-ph/9902027. – 1999.
- [4] Bennett C. et al. Nine-Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations: Final Maps and Results,(2012) //arXiv preprint arXiv:1212.5225.
- [5] Hinshaw G. et al. Nine-year wilkinson microwave anisotropy probe (wmap) observations: Cosmological parameter results, ApJS 208 (2013) 19 //arXiv preprint arXiv:1212.5226.
- [6] Ade P. A. R. et al. Planck 2013 results. XVI. Cosmological parameters //arXiv preprint arXiv:1303.5076. – 2013.
- [7] Ade P. A. et al. BICEP2 I: Detection Of B-mode Polarization at Degree Angular Scales //arXiv preprint arXiv:1403.3985. – 2014.
- [8] Иванов Г.Г. Симметрии, законы сохранения и точные решения в нелинейной сигма-модели // Теоретическая и математическая физика. – 1983. – Т.57, №1. – С. 45-54.
- [9] Червон С.В. Плоско-симметричные решения в $SO(4)$ -инвариантной самогравитирующей σ -модели // Известия вузов. Физика. – 1983. – N 8. – С.89-93.
- [10] Червон С.В. Точные решения в $SO(3)$ -инвариантной нелинейной сигма модели в специальной теории относительности. // Известия вузов. Физика. – 1985. – N 10. – С. 22.
- [11] Червон С.В. Точные решения в самогравитирующих $SO(N)$ -инвариантных нелинейных сигма моделях. // В книге: Гравитация и теория относительности. – Казань, издательство Казанского университета 1986. – вып. 23. – С. 103.
- [12] S.V. Chervon. Chiral non-linear sigma models and cosmological inflation // Gravitation and Cosmology. – 1995. – Vol.1, No.2. – P.91-96.
- [13] Червон С.В. О киральной модели космологической инфляции. // Известия вузов. Физика. – 1995. – N 5.– С. 114.

- [14] Chervon S.V. Chiral nonlinear sigma models and problems of cosmological inflation // Proceedings of 11 th Workshop "Large Scale Structure in The Universe" 18-24 September 1994, AIP. – Potsdam, Germany, 1995. – P. 343.
- [15] Червон, С.В. Нелинейные поля в теории гравитации и космологии/ С.В. Червон. – Ульяновск: УлГУ, 1997. – 191 с.
- [16] Червон С.В., Панина О.Г. Эффекты жесткого воздействия полей темного сектора на космологические возмущения // Вестник Российского университета дружбы народов. Серия: Математика, информатика, физика. – 2010. – №4. – С. 121-132.
- [17] Аббязов Р.Р., Червон С.В. Киральная космологическая модель, включающая темную энергию и темную материю // Вестник Российского университета дружбы народов. Серия: Математика, информатика, физика. – 2013. – №2. – С. 125-138.
- [18] Chervon S.V. Chiral Cosmological Models: Dark Sector Fields Description. // Quantum Matter. – 2013. – Vol.2 – P.1-8
- [19] Starobinsky A. A. A new type of isotropic cosmological models without singularity //Physics Letters B. – 1980. – Vol. 91, №. 1. – P. 99-102.
- [20] Chaadaev A. A., Chervon S. V. New class of cosmological solutions for a self-interacting scalar field //Russian Physics Journal. – 2013. – Vol. 56, №. 7. – P. 725-730.
- [21] Guth A. H. The inflationary universe: a possible solution to the horizon and flatness problems, 1981 //Phys. Rev. D. – Vol. 23, №. 347. – P. 10.
- [22] Linde A. D. A new inflationary universe scenario: A possible solution of the horizon, flatness, homogeneity, isotropy and primordial monopole problems //Physics Letters B. – 1982. – Vol. 108, №. 6. – P. 389-393.
- [23] Linde A. D. Chaotic inflation //Physics Letters B. – 1983. – Vol. 129, №. 3. – P. 177-181.
- [24] Albrecht A., Steinhardt P. J. Cosmology for grand unified theories with radiatively induced symmetry breaking //Physical Review Letters. – 1982. – Vol. 48, №. 17. – P. 1220.
- [25] Barrow J. D. Graduated inflationary universes //Physics Letters B. – 1990. – Vol. 235, №. 1. – P. 40-43.
- [26] Ellis G. F. R., Madsen M. S. Exact scalar field cosmologies //Classical and Quantum Gravity. – 1991. – Vol. 8, №. 4. – P. 667-676.
- [27] Chervon S. V. Gravitational field of the early universe: I. non-linear scalar field as the source //Gravitation and Cosmology. – 1997. – Vol. 3, №. 2. – P. 145-150.
- [28] Chervon S. V., Zhuravlev V. M., Shchigolev V. K. New exact solutions in standard inflationary models //Physics Letters B. – 1997. – Vol. 398, №. 3. – P. 269-273.
- [29] Beesham A., Chervon S. V. New exact solutions for non-linear scalar field in (1+1) dimensions //Gravitation and Cosmology. – 1997. – Vol. 3, №. 3. – P. 172-174.

- [30] Zhuravlev V. M., Chervon S. V., Shchigolev V. K. New classes of exact solutions in inflationary cosmology //Journal of Experimental and Theoretical Physics. – 1998. – Vol. 87., №. 2. – P. 223-228.
- [31] Barrow J. D. New types of inflationary universe //Physical Review D. – 1993. – Vol. 48, №. 4. – P. 1585.
- [32] Barrow J. D. Inflationary cosmology without restrictions on the scalar field potential //General Relativity and Gravitation. – 1993. – Vol. 48, №. 4. – P. 1585.
- [33] Chervon S. V. Exact inflationary universes with potential minima //Physical Review D. – 2004. – Vol. 36, №. 7. – P. 1547-1553.
- [34] Lidsey J. E. Towards a solution of the Omega-problem in power law and chaotic inflation //Classical and Quantum Gravity. – 1991. – Vol. 8, №. 5. – P. 923-933.
- [35] Burd A. B., Barrow J. D. Inflationary models with exponential potentials //Nuclear Physics B. – 1988. – Vol. 308, №. 4. – P. 929-945.
- [36] Иванов Г. Г. О самогравитирующем скалярном поле с кубической нелинейностью //Известия ВУЗов, сер. Физика. – 1980. – Т. 23, №12. – С. 22-25.
- [37] Иванов Г. Г. Космологические модели Фридмана с нелинейным скалярным полем // Гравитация и теория относительности – 1981. – вып.18 – С. 54-60.
- [38] Иванов Г. Г. Точные решения уравнений Эйнштейна для нелинейных скалярных полей типа Син-Гордона, Лиувилля и Хиггса // Гравитация и теория относительности – 1983. – вып.20 – С. 37-47.
- [39] Muslimov A. G. On the scalar field dynamics in a spatially flat Friedman universe //Classical and Quantum Gravity. – 1990. – Vol. 7, №. 2. – P. 231-237.
- [40] Liddle A. R., Lyth D. H. The Cold dark matter density perturbation //Physics Reports. – 1993. – Vol. 231, №. 1. – P. 1-105.
- [41] Chervon S. V., Novello M., Triay R. Exact Cosmology and Specification of an Inflationary Scenario //Gravitation and Cosmology. – 2005. – Vol.11, №. 4. – P. 329-332.
- [42] Chervon S. V., Fomin I. V. On calculation of the cosmological parameters in exact models of inflation //Gravitation and Cosmology. – 2008. – Vol. 14, №. 2. – P. 163-167.
- [43] Copeland E. J., Sami M., Tsujikawa S. Dynamics of dark energy //International Journal of Modern Physics D. – 2006. – Vol. 15, №. 11. – P. 1753-1935.
- [44] Hoyle F. On the cosmological problem //Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. – 1949. – Vol. 109,№. 3. – P. 365-371.
- [45] Hoyle F., Narlikar J. V. The C-field as a direct particle field //Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences. – 1964. – N. 282, №. 1389. – P. 178-183.

- [46] Sami M., Toporensky A. Phantom Field and the Fate of the Universe //Modern Physics Letters A. – 2004. – Vol. 19, №. 20. – P. 1509-1517.
- [47] Singh P., Sami M., Dadhich N. Cosmological dynamics of a phantom field //Physical Review D. – 2003. – Vol. 68, №. 2. – P. 023522.
- [48] Kolb E. W., Turner M. S. The early universe //Front. Phys., Vol. 69,. — 1990. — Vol. 1.
- [49] Copeland E. J., Sami M., Tsujikawa S. Dynamics of dark energy //International Journal of Modern Physics D. – 2006. — Vol. 15, №. 11. – P. 1753-1935.
- [50] Chervon S.V. On the chiral model of cosmological inflation // Russ.Phys.J. – 1995. – Vol. 38. – P. 539–543.
- [51] Perelomov A.M. CHIRAL MODELS: GEOMETRICAL ASPECTS // Phys.Rept. – 1987. – Vol. 146. – P. 135–213.
- [52] De Alfaro V., Fubini S., Furlan G. Gauge theories and strong gravity //Il Nuovo Cimento A. – 1979. – Vol. 50, №. 4. – P. 523-554.
- [53] Chervon S. V. Nonlinear sigma model for inflation scenarios; 2. – P00021000, 1993. – №. IUCAA-93-26.
- [54] Jaffe A. H. Quasilinear evolution of compensated cosmological perturbations: The nonlinear s model //Physical Review D. – 1994. – Vol. 49, №. 8. – P. 3893.
- [55] Berkin A. L., Hellings R. W. Multiple field scalar-tensor theories of gravity and cosmology //Physical Review D. – 1994. – Vol. 49, №. 12. – P. 6442.
- [56] Aichelburg P. C., Lechner C. s model on de Sitter space //Physical Review D. – 1998. – Vol. 57, №. 10. – P. 6176.
- [57] Sahni V., Wang L. New cosmological model of quintessence and dark matter //Physical Review D. – 2000. – Vol. 62, №. 10. – P. 103517.
- [58] Sahni V. Scalar field models for an accelerating universe //arXiv preprint astro-ph/0101016. – 2001.
- [59] Matos T., Urena-Lopez L. A. Quintessence and scalar dark matter in the universe //Classical and Quantum Gravity. – 2000. – Vol. 17, №. 13. – P. L75.
- [60] Matos T., Urena-Lopez L. A. Further analysis of a cosmological model with quintessence and scalar dark matter //Physical Review D. – 2001. – Vol. 63, №. 6. – P. 063506.
- [61] Koivisto T. Growth of perturbations in dark matter coupled with quintessence //Physical Review D. – 2005. – Vol. 72, №. 4. – P. 043516.
- [62] Capozziello S., Nojiri S., Odintsov S. D. Unified phantom cosmology: inflation, dark energy and dark matter under the same standard //Physics Letters B. – 2006. – Vol. 632, №. 5. – P. 597-604.

- [63] Zhao G. B. et al. Perturbations of the quintom models of dark energy and the effects on observations //Physical Review D. – 2005. – Vol. 72, №. 12. – P. 123515.
- [64] Bohmer C. G. et al. Dynamics of dark energy with a coupling to dark matter //Physical Review D. – 2008. – Vol. 78, №. 2. – P. 023505.
- [65] Valiviita J., Majerotto E., Maartens R. Large-scale instability in interacting dark energy and dark matter fluids //Journal of Cosmology and Astroparticle Physics. – 2008. – Vol. 2008, №. 07. – P. 020.
- [66] Chimento L. P. et al. Internal space structure generalization of the quintom cosmological scenario //Physical Review D. – 2009. – Vol. 79, №. 4. – P. 043502.
- [67] Setare M. R., Saridakis E. N. The quintom model with O (N) symmetry //Journal of Cosmology and Astroparticle Physics. – 2008. – Vol. 2008., №. 09. – P. 026.
- [68] van de Bruck C., Weller J. M. Quintessence dynamics with two scalar fields and mixed kinetic terms //Physical Review D. – 2009. – Vol. 80, №. 12. – P. 123014.
- [69] Saridakis E. N., Weller J. M. Quintom scenario with mixed kinetic terms //Physical Review D. – 2010. – Vol. 81, №. 12. – P. 123523.
- [70] Ellis G. F. R., Maartens R. The emergent universe: Inflationary cosmology with no singularity //Classical and Quantum Gravity. – 2004. – Vol. 21, №. 1. – P. 223.
- [71] Mukherjee S. et al. Emergent universe with exotic matter //Classical and Quantum Gravity. – 2006. – Vol. 23, №. 23. – P. 6927.
- [72] Mukherjee S. et al. Emergent universe in Starobinsky model //arXiv preprint gr-qc/0505103. – 2005.
- [73] Ellis G. F. R., Murugan J., Tsagas C. G. The emergent universe: an explicit construction //Classical and Quantum Gravity. – 2004. – Vol. 21, №. 1. – P. 233.
- [74] Harrison E. R. Classification of uniform cosmological models //Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. – 1967. – Vol. 137, №. 1. – P. 69-79.
- [75] Chervon S. V. A Global Evolution of the Universe Filled by Scalar or Chiral Fields //Gravitation and Cosmology. – 2002. – Vol. 3. – P. 32.
- [76] Chervon, S.V. Exact solutions in standard and chiral inflationary models//Proceedings of 9th Marcell Grossman Conference. – Roma, 2000. World Scientific. – p.1909 (Pt.C. 2001.)
- [77] S.V. Chervon Izv.Vyssh.Ucheb.Zaved. Fiz. 5 114, 1995.
- [78] Червон С.В., Кубасов А.С. Новые методы построения инфляционных решений в киральной космологической модели // Вестник Российского университета дружбы народов. Серия: Математика, информатика, физика. – 2011. - №1. – С. 134-143.

- [79] Кубасов, А.С., Червон, С.В. Методы конструирования точных решений в двухкомпонентной киральной космологической модели // Труды международного семинара «Нелинейные поля в теории гравитации и космологии» и Российской школы «Математическое и компьютерное моделирование фундаментальных объектов и явлений». – Казань, 2013. – С. 224.
- [80] Журавлев В.М., Червон С.В., Щиголов В.К. Новые классы точные решения в инфляционной космологии // ЖЭТФ. – 1998. – том 114, вып. 2(8) – С. 406-417.
- [81] Padmanabhan T. Accelerated expansion of the universe driven by tachyonic matter //Physical Review D. – 2002. – Vol. 66, №. 2. – P. 0213011-0213014.
- [82] Andrianov A. A. et al. Reconstruction of scalar potentials in two-field cosmological models //Journal of Cosmology and Astroparticle Physics. – 2008. – Vol. 2008, №. 02. – С. 015.
- [83] Beesham A. et al. An Emergent Universe with Dark Sector Fields in a Chiral Cosmological Model //Quantum Matter. – 2013. – Vol. 2, №. 5. – P. 388-395.
- [84] Линде, А.Д. Физика элементарных частиц и инфляционная космология. / А.Д. Линде – Москва, «Наука», 1990. – 277с.
- [85] Mithani A., Vilenkin A. Did the universe have a beginning? //arXiv preprint arXiv:1204.4658. – 2012.
- [86] Yurov A. V., Astashenok A. V., Elizalde E. The cosmological constant as an eigenvalue of a Sturm-Liouville problem //arXiv preprint arXiv:1212.4268. – 2012.
- [87] Beesham A. et al. Exact Inflationary Solutions Inspired by the Emergent Universe Scenario //International Journal of Theoretical Physics. – 2015. – Vol.54, №3 – P. 884-895.
- [88] Paliathanasis A. et al. Dynamical analysis in scalar field cosmology//arXiv preprint arXiv:1503.05750v1. – 2015.
- [89] Starobinsky A. A., Tsujikawa S., Yokoyama J. Cosmological perturbations from multi-field inflation in generalized Einstein theories //Nuclear Physics B. – 2001. – Vol.610, №1. – P. 383-410.
- [90] Starobinsky A. A., Tsujikawa S., Yokoyama J. Cosmological perturbations from multi-field inflation in generalized Einstein theories //Nuclear Physics B. – 2001. – Vol. 610, №. 1. – P. 383-410.
- [91] Clifton T. et al. Modified gravity and cosmology //Physics Reports. – 2012. – Vol. 513, №. 1. – P. 1-189.
- [92] Beesham A., Chervon S. V., Maharaj S. D. An emergent universe supported by a nonlinear sigma model //Classical and Quantum Gravity. – 2009. – Vol. 26, №. 7. – P. 075017.
- [93] Chervon S. V. et al. An Emergent Universe supported by chiral cosmological fields in Einstein–Gauss–Bonnet gravity //arXiv preprint arXiv:1405.7219. – 2014.

Компьютерная вёрстка: Николаев А.В.
Монография опубликована в авторской редакции.