

И.В. Фомин, С.В. Червон, А.Н. Морозов

Гравитационные волны ранней Вселенной

Монография

Москва

Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана

2018

УДК

ББК

Ф

Рецензенты: доктор физико-математических наук, академик РАН В.Н. Пустовойт; доктор физико-математических наук, профессор Московского педагогического государственного университета Б.Н. Фролов

Фомин И.В., Червон С.В., Морозов А.Н.

Гравитационные волны ранней Вселенной. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2018. 178 с.

ISBN

Ф В монографии рассматривается применение скалярных полей в космологии и методы построения моделей ранней Вселенной на основе эволюции скалярных полей. Также проводится анализ динамики Вселенной на различных стадиях ее эволюции, расчет параметров космологических возмущений, предлагаются методы верификации инфляционных моделей и новые методы детектирования гравитационных волн.

Книга предназначена для физиков, интересующихся проблемами нелинейной теории поля, теории гравитации, космологии и гравитационно-волновыми исследованиями, а также для студентов старших курсов, магистров и аспирантов.

УДК

ББК

© И.В. Фомин, С.В. Червон, А.Н. Морозов, 2018

© Оформление. Издательство МГТУ

им. Н.Э. Баумана, 2018

ISBN

Предисловие

Монография посвящена теоретическим и экспериментальным исследованиям гравитационных волн ранней Вселенной. На сегодняшний момент, после экспериментального обнаружения гравитационных волн от слияния черных дыр и нейтронных звезд, приоритетным направлением исследований является детектирование реликтовых гравитационных волн.

При анализе ранней Вселенной в стандартной инфляционной парадигме, основанной на включение в космологические модели скалярных полей, широко используется приближенный метод, основанный на нивелировании вклада кинетической энергии поля в динамику, следствием которого является то, что основная энергия реликтовых гравитационных волн находится в диапазоне низких частот от 100 до 1000 Гц.

В данной монографии предложен другой подход к проблеме анализа космологических моделей, основанный на точных решениях уравнений космологической динамики и, как следствие, появлении возможности экспериментального обнаружения высокочастотных реликтовых гравитационных волн.

Монография состоит из семи частей. Первая часть представляет собой введение в теорию ранней Вселенной. Во второй части представлен обзор и историческая панорама по скалярным полям в ОТО. Материалы первых двух частей представляют собой существенно дополненные и переработанные части I-II монографии [1]. В третьей части изложены приближенные и точные методы анализа космологической динамики. Четвертая часть посвящена расчету точных значений параметров космологических возмущений. В частях 5 и 6 рассматривается новый метод детектирования высокочастотных гравитационных волн на основе низкочастотного оптического резонанса в интерферометрах Фабри-Перо. В заключительной 7

части рассмотрено уширение спектральных линий света при воздействии стохастических гравитационных волн.

Авторы благодарны рецензентам В.Н. Пустовойту и Б.Н. Фролову за сделанные замечания, которые позволили улучшить содержание монографии.

ЧАСТЬ 1. ПРЕДПОСЫЛКИ И СЛЕДСТВИЯ ТЕОРИИ КОСМОЛОГИЧЕСКОЙ ИНФЛЯЦИИ

Стандартная теория Большого Взрыва утверждает, что Вселенная была рождена приблизительно 13,7 миллиардов лет назад, в состоянии бесконечно большой плотности и температуры. С быстрым расширением Вселенной средняя энергия частиц быстро уменьшилась, и Вселенная стала холодной. Эта теория стала особенно популярной после открытия реликтового излучения.

Однако к концу 70-ых годов 20 века стало ясно, что эта теория не совместима с существующей теорией элементарных частиц и имеет много внутренних трудностей (проблема горизонта, проблема однородности и изотропности, и т.д.). Все эти проблемы могут быть решены одновременно в контексте относительно простого сценария развития Вселенной - инфляционного сценария [2-7].

Главная идея этого сценария состоит в том, что Вселенная на ранней стадии развития расширилась экспоненциально (стадия инфляции) в состоянии с преобладанием потенциальной энергии $V(\phi)$ некоторого скалярного поля ϕ . Это быстрое расширение сделало Вселенную плоской, однородной и изотропной.

Впоследствии, энергия скалярного поля преобразовалась в тепловую энергию, а в более поздний период, Вселенная описывается стандартной теорией горячей Вселенной, предсказывающей существование реликтового излучения.

Рассмотрение эволюции Вселенной начинается с точного энергетического масштаба равного массе Планка

$$M_P = \sqrt{\frac{c}{8\pi G}}, \quad (1.1)$$

где G – постоянная Ньютона, c – скорость света в вакууме. Массу Планка $M_p = 4,342 \times 10^{-6}$ г. можно записать в энергетических единицах $2,435 \times 10^{20}$ ГэВ. В рамках теории Эйнштейна невозможно превысить этот масштаб. Посредством комбинации постоянной Планка \hbar , скорости света c и массы Планка M_p можно получить время Планка $T_p \equiv \hbar / (c^2 M_p) = 2,70 \times 10^{-43}$ сек. и длину Планка $L_p \equiv \hbar / (c M_p) = 8,10 \times 10^{-33}$ см., которые являются важными параметрами в теории ранней Вселенной.

При анализе космологических моделей часто используется следующая система единиц $M_p = \hbar = c = 1$, которую мы также будем использовать во всей книге.

Первые модели инфляции были сформулированы в контексте теории Большого Взрыва. Их успех в решении внутренних проблем (проблемы плоскостности, горизонта и т.д.) удалил последние сомнения относительно этой теории. Несмотря на это, инфляционная теория продолжает претерпевать значительные изменения, отдаляясь от старой теории Большого Взрыва. Для описания наблюдаемой части нашей Вселенной все еще можно говорить о Большом Взрыве, так же, как можно использовать теорию гравитации Ньютона, чтобы описать динамику в Солнечной системе с достаточно высокой точностью. Однако для описания ранней Вселенной или ее глобальной структуры, некоторые из понятий теории Большого Взрыва становятся неадекватными.

Например, один из главных принципов теории Большого Взрыва – однородность Вселенной. Утверждение однородности, казалось, было настолько важным, что это называлось "космологическим принципом". Действительно, без использования этого принципа нельзя было доказать, что целая Вселенная появилась в единственный момент времени, который ассоциировался с Большим Взрывом. Теория космологической инфляции остается единственной теорией, которая объясняет, почему заметная часть

Вселенной практически однородна. Однако почти все версии инфляционной космологии предсказывают, что в намного большем масштабе Вселенная должна быть чрезвычайно неоднородна, с плотностью энергии, изменяющейся от планковской до почти нулевой. Таким образом, развитие инфляционной теории значительно изменило привычную космологическую парадигму.

Первая версия инфляционной космологии была предложена Старобинским [2] в 1979 году. Однако в предложенной теории было не совсем ясно, в каком начальном состоянии должна находиться Вселенная.

Одна из наиболее важных стадий развития инфляционной космологии была связана с инфляционным сценарием Вселенной Алана Гуса [3].

Главная идея этого инфляционного сценария Вселенной была очень проста и привлекательна, и ее роль в развитии современной космологии была очень важна.

Инфляция является эпохой, в течение которой масштабный фактор Вселенной соответствует ускоренному расширению $\ddot{a} > 0$.

Эквивалентным путем определения инфляции является рассмотрение инфляционной стадии как эпохи, в течение которой сопутствующее расстояние Хаббла $(aH)^{-1}$ убывает со временем

$$\frac{d}{dt} \frac{1}{aH} < 0,$$

что помогает решить проблему плоскостности.

Модели инфляции задаются видом эффективного потенциала $V(\phi)$ некоторого скалярного поля ϕ (инфлатона), которое, в процессе инфляции, скатывается к минимуму $V(\phi)$. Конец инфляции приводит к нарушению условий медленного скатывания, поле осциллирует около минимума потенциала и начинается процесс постинфляционного нагревания. Этот

процесс связан с несколькими различными стадиями, такими как распад инфлатонного конденсата, рождением частиц стандартной модели, их нагреванием и последующей рекомбинацией [8-9].

Космологическое ускорение указывает на то, что в настоящее время во Вселенной доминирует равномерно распределенная медленно изменяющаяся космическая жидкость с отрицательным давлением, так называемая темная энергия [17-18].

Для спецификации различных типов космической жидкости обычно используется феноменологическое соотношение между давлением p и плотностью энергии ρ каждой из компонент жидкости $p = w\rho$, где w является параметром состояния. Современные эксперименты [19-20] свидетельствуют о том, что Вселенная является пространственно плоской и в настоящее время параметр состояния темной энергии $w = -1 \pm 0.1$.

Стандартным способом получения зависящего от времени параметра состояния является включение скалярных полей в космологическую модель. При достаточно общих предположениях в рамках четырехмерной модели с одним скалярным полем могут быть реализованы модели с квинтэссенцией $-1 < w < 1/3$ и фантомные модели $w < -1$ [8-15].

В стандартной космологии геометрическое описание Вселенной основано на пространстве-времени Фридмана-Робертсона-Уокера (ФРУ), что, в значительной степени, связано с высокой степени изотропностью пространства, измеренной на космическом микроволновом фоне [19,20]; эта идентификация опирается на формальный результат, известный как теорема Элерса-Герена-Сакса [21], что относится к Вселенной, заполненной любой идеальной баротропной жидкостью [22]. Отметим, что верхняя граница локальной анизотропии пространства-времени по зависимости скорости света от направления наблюдения, согласно современным экспериментам, составляет $\delta c(\theta)/c < 10^{-10} - 10^{-14}$ [23-25].

Метрика пространства-времени Фридмана-Робертсона-Уокера записывается следующим образом

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \left(\frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) \right), \quad (1.2)$$

где значения $k=0$, $k=1$, $k=-1$ соответствуют пространственно плоской, замкнутой и открытой моделям Вселенной.

Динамика скалярного поля

Рассмотрим действие для скалярного поля ϕ , которое определяет плотность энергии и давление во Вселенной на инфляционной стадии

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} L = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{1}{2} R - g^{\mu\nu} \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - V(\phi) \right]. \quad (1.3)$$

Из вариации действия (1.3) по полю, с учетом метрики (1.2), получим уравнение, определяющее динамику инфлатона

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} - \frac{\nabla^2 \phi}{a^2} + V'_\phi(\phi) = 0, \quad V'_\phi = \frac{dV(\phi)}{d\phi}. \quad (1.4)$$

Поскольку скалярное поле в силу равенства нулю недиагональных компонент тензора Эйнштейна зависит только от времени [1], отбросим третье слагаемое в уравнении (1.4), в результате, получим

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + V'_\phi(\phi) = 0. \quad (1.5)$$

Также, вариация действия (1.3) по метрике $g^{\mu\nu}$ дает два уравнения, которые в пространственно-плоском случае ($k=0$) записываются следующим образом

$$3H^2 = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + V(\phi), \quad (1.6)$$

$$-2\dot{H} - 3H^2 = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 - V(\phi). \quad (1.7)$$

Из трех уравнений (1.5)-(1.7) только два являются независимыми.

Запишем уравнения динамики скалярного поля, сложив (1.6) и (1.7), в следующем виде

$$V(\phi) = 3H^2 + \dot{H}, \quad (1.8)$$

$$\dot{\phi}^2 = -2\dot{H}. \quad (1.9)$$

Другую форму записи мы получим, продифференцировав уравнение (1.6) по полю и приравняв к (1.5), с учетом соотношения $\frac{d}{d\phi}\left(\frac{1}{2}\dot{\phi}^2\right) = \ddot{\phi}$,

$$V(\phi) = 3H^2 - 2H_\phi'^2, \quad (1.10)$$

$$\dot{\phi} = -2H_\phi'. \quad (1.11)$$

Таким образом, уравнения (1.8)-(1.9) или (1.10)-(1.11) определяют динамику на инфляционной стадии эволюции Вселенной.

Плотность энергии и давление

Варьируя действие (1.2) по метрике $g^{\mu\nu}$, получим следующее выражение для тензора энергии-импульса

$$T_{\mu\nu} = \partial_\mu\phi\partial_\nu\phi - g_{\mu\nu}L. \quad (1.12)$$

Сравнивая с релятивистским тензором энергии-импульса идеальной жидкости

$$T^{\mu\nu} = (p + \rho)u^\mu u^\nu + g^{\mu\nu}p \quad (1.13)$$

получим следующие уравнения для плотности энергии ρ и давления p

$$T_0^0 = \rho = \frac{\dot{\phi}^2}{2} + V(\phi), \quad (1.14)$$

$$T_i^i = p = \frac{\dot{\phi}^2}{2} - V(\phi). \quad (1.15)$$

При выполнении условия $V(\phi) \gg \dot{\phi}^2$, уравнение состояния

$$\rho \simeq -p, \quad (1.16)$$

что является условием инфляционной стадии. Инфляция управляется вакуумной энергией инфляционного поля, которая приводит к быстрому расширению на ранней стадии эволюции Вселенной.

Для фантомных полей с отрицательной кинетической энергией $\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 < 0$ получим

$$\rho_{ph} = -\frac{\dot{\phi}^2}{2} + V(\phi) \quad (1.17)$$

$$p_{ph} = -\frac{\dot{\phi}^2}{2} - V(\phi) \quad (1.18)$$

Также, определим параметр состояния для канонических и фантомных полей

$$w = \frac{p}{\rho} = \frac{\dot{\phi}^2 - 2V}{\dot{\phi}^2 + 2V} = -1 - \frac{2}{3} \frac{\dot{H}}{H^2}, \quad w_{ph} = -1 + \frac{2}{3} \frac{\dot{H}}{H^2} \quad (1.19)$$

Для стадии де Ситтера с постоянным параметром Хаббла $H = const$, параметр состояния $w = -1$, стадии инфляции с каноническим скалярным полем соответствует $-1 < w < -1/3$.

Число е-фолдов

Число возрастных масштабного фактора в е-раз или *число е-фолдов* характеризует стадию ускоренного расширения и обычно записывается как логарифм отношения масштабного фактора в конце инфляции к масштабному фактору в начале

$$N(t) = \ln \frac{a(t_{end})}{a(t)} = \int_{t_i}^{t_{end}} H dt, \quad (1.20)$$

где t_i и t_{end} – время начала и завершения инфляционной стадии.

Важной характеристикой при описании динамики ранней Вселенной является *пересечение радиуса Хаббла* $k = aH$, где k - сопутствующее волновое число. Сопутствующий масштаб k^{-1} меньше радиуса Хаббла в

течение инфляции. В некоторое время $t_H < t_e$ он будет пересекать радиус Хаббла, то есть $k^{-1} = (aH)^{-1}$. После завершения стадии инфляции сопутствующий масштаб k^{-1} пересекает горизонт повторно [15,16].

Разобьем эволюцию Вселенной на следующие стадии:

- от $k^{-1} = (aH)^{-1}$ к концу инфляции
- стадия повторного нагревания
- стадия преобладания излучения
- стадия преобладания вещества

Соответствующие масштабы связаны соотношением [15]

$$\frac{k}{a_0 H_0} = \frac{a_k H_k}{a_0 H_0} \frac{a_k}{a_{end}} \frac{a_{end}}{a_{reh}} \frac{a_{reh}}{a_{eq}} \frac{a_{eq}}{a_0} \frac{H_k}{H_0}$$

Далее, следуя [15], запишем

$$N(k) = 62 - \ln \frac{k}{a_0 H_0} - \ln \frac{10^{16} \text{ ГэВ}}{V_k^{1/4}} + \ln \frac{V_k^{1/4}}{V_{end}^{1/4}} - \ln \frac{V_k^{1/4}}{\rho_{reh}^{1/4}}$$

Последние три слагаемых вводятся ввиду неопределенности в различных энергетических масштабах, связанных с инфляцией. Таким образом, устанавливается связь между значениями e -фолдов в различные эпохи эволюции Вселенной.

Также, на данный момент, Вселенная расширяется ускоренно повторно, отметим, что темп расширения гораздо ниже, чем на стадии космологической инфляции [17,18].

Наблюдательные данные

При исследовании ранней Вселенной достижением инфляционной космологии является возможность сопоставления наблюдательных данных с предсказаниями теории.

Также, в рамках теории космологических возмущений, появляется возможность рассчитать спектры начальных возмущений плотности вещества и первичных гравитационных волн в зависимости от значений космологических параметров [26-30].

В нулевом порядке теории космологических возмущений Вселенная описывается единственной функцией времени - масштабным фактором $a(t)$. В первом (линейном) порядке возмущения метрики являются суммой трех независимых мод - скалярной, векторной и тензорной (реликтовые гравитационные волны), каждая из которых характеризуется спектральной функцией волнового числа k [14].

Данные о влиянии скалярных и тензорных мод можно получить из наблюдений анизотропии и поляризации реликтового излучения, которые возникли в результате совместного воздействия на распределение фотонов всех трех мод возмущений.

Сопоставление предсказаний теории с наблюдениями производится по некоторым спектральным характеристикам космологических возмущений, которые определяются по измерениям анизотропии реликтового излучения спутниками PLANCK [19], WMAP [20], также в ряде других экспериментов [31-33].

Совместный анализ данных о распределении галактик [17,18] и анизотропии реликтового излучения [19,20,31-33] позволяет рассматривать начальные условия и эволюцию отдельно.

Анизотропия реликтового излучения

При расширении Вселенной происходит ее остывание. Темп расширения значительно медленнее характерного времени установления равновесия в горячей плазме, поэтому можно считать, что частицы, в том числе и реликтовые фотоны, находятся в термодинамическом равновесии.

В горячей плотной плазме из-за рассеяния на электронах фотоны распространяются гораздо медленнее скорости света. Когда Вселенная расширяется настолько, что плазма остывает до температуры рекомбинации, электроны начинают соединяться с протонами, образуя нейтральный водород, а фотоны начинают распространяться свободно. Точки, из которых фотоны доходят до наблюдателя, образуют «поверхность последнего рассеяния».

Температура реликтового излучения изотропна с точностью 10^{-5} , малая анизотропия обусловлена разницей температуры в различных направлениях и ее величина равна примерно 3 мК.

Кинетическая составляющая анизотропии реликтового излучения обусловлена движением наблюдателя относительно реликтового излучения, ей соответствует дипольная гармоника.

Кроме кинетической составляющей в анизотропии реликтового излучения есть потенциальные члены, связанные с эффектами в гравитационных полях очень больших масштабов, которые сравнимы с расстоянием до поверхности последнего рассеяния, низшая мультипольная гармоника для которых - квадрупольная, именно:

- эффект Сакса-Вольфа, который соответствует изменению энергии фотонов в переменном гравитационном поле Вселенной [34].

- эффект Силка, обусловленный адиабатическим поджатием излучения и барионными акустическими осцилляциями до эпохи рекомбинации в зонах повышенной и пониженной плотности [35, 36].

Поскольку поверхность последнего рассеяния есть сфера, то проще анализировать наблюдательные данные, разложив в ряд по сферическим функциям, которые являются полным и ортогональным набором функций на сфере [36,37]

$$\frac{\delta T(\mathbf{e})}{T} = \sum_{lm} a_{lm} Y_{lm}(\mathbf{e}), \quad (1.30)$$

где a_{lm} - мультипольные коэффициенты, Y_{lm} - сферические гармоники.

Также, обычно выделяют следующую вращательно-инвариантную величину

$$C_l = \frac{1}{2l+1} \sum_{l=-m}^{l=m} |a_{lm}|^2$$

и спектр строят для величины $l(l+1)C_l/2\pi$. В таком виде представляется большинство экспериментальных данных по мультипольным спектрам космологических возмущений.

Гравитационные волны, как и скалярные возмущения, являются источником крупномасштабной анизотропии реликтового излучения. Качественные отличия в характеристиках анизотропии, генерируемой скалярными возмущениями и гравитационными волнами можно понять, анализируя особенности их эволюции.

Прежде всего важнейшим отличием гравитационных волн от скалярных возмущений метрики, в силу тензорного характера первых, является независимость от распределения материи – гравитационные волны малой амплитуды не вызывают перераспределения плотности и скорости материи и эволюционируют независимо.

При этом распределение анизотропии реликтового излучения по углу наблюдения полностью определяется заданием спектра гравитационных волн $P_T(k)$. В простейших моделях инфляции, предсказывающих масштабно инвариантный спектр возмущений метрики $P_a(k) \propto k^{-3}$, спектр гравитационных волн также является масштабно-инвариантным: $P_T(k) \propto k^{-3}$ [37]. Это означает, что для угловых масштабов $\theta \gg \theta_{rec}$, где θ_{rec} - угловая мера

горизонта рекомбинации, мультипольная структура C_l^T будет близка к структуре C_l^S для скалярных мод.

Соотношение между вкладом гравитационных волн и скалярных возмущений в анизотропию реликтового излучения характеризуют в терминах тензорно-скалярного отношения [15,27,37]

$$r = \frac{C_l^T}{C_l^S} = k_l |n_T|, \quad (1.33)$$

где $k_l = 6.2$ при $l \gg 1$ и $|n_T| \ll 1$.

В настоящее время оценки тензорно-скалярного отношения различаются в зависимости от рассматриваемых моделей инфляции, верхний предел значений которого, согласно наблюдениям спутника PLANCK, равен $r < 0.112$ [19].

Реликтовые гравитационные волны не наблюдались непосредственно, что приводит к большому числу теоретических моделей космологической инфляции, которые дают объяснение происхождению и эволюции крупномасштабной структуры Вселенной и соответствуют имеющимся в настоящий момент наблюдательным данным.

Очевидно, что прямое измерение характеристик реликтовых гравитационных волн позволяет существенно сократить число возможных моделей.

ЧАСТЬ 2. СКАЛЯРНЫЕ ПОЛЯ В КОСМОЛОГИИ

Введение скалярного поля в ОТО, как источника гравитационного поля часто встречает разумную критику на основе того факта, что скалярные поля не обнаружены экспериментально. К настоящему времени появилось вполне разумное с физической точки зрения обоснование, основанное на экспериментальном обнаружении бозона Хиггса в эксперименте на БАК [38]. Таким образом, скалярное поле, описывающее бозон Хиггса, может рассматриваться как источник гравитационного поля ранней Вселенной. Более того, Хиггсовское поле может рассматриваться как инфлатон, приводящий к раннему ускорению в расширении Вселенной (инфляции).

Ранние представления о скалярных полях в космологии

Обращаясь к более ранним представлениям о включении скалярного поля, как источника гравитационного, приведем некоторые исторические замечания.

Йордан в 1949 году [39] отметил, что в теории объединения гравитации и электромагнетизма Калуцы-Клейна с неизбежностью возникает новое макроскопическое взаимодействие гравитационного напряжения, переносчиком которого является скалярное поле, при оценке масштаба 5-го измерения. Поскольку такое скалярное поле приводило к оценке 5-го измерения через координаты пространства-времени, то оно, впоследствии, получило название “компактон”.

Фиртц (1956) [40], Йордан (1959) [41], Бранс и Дикке (1961) [42] предложили теорию гравитации, описываемую метрическим тензором и скалярным полем с неминимальным взаимодействием с гравитацией. Такая модель содержит только один свободный параметр, устремление которого к бесконечности приводит к совпадению теории с ОТО. Позднее Бергман (1968) [43], Нордтвед (1970) [44] и Вагонер (1970) [45] обобщили теорию Фиртца-Йордана-Бранса-Дикке на случай более общей тензорно-скалярной

теории гравитации за счет введения свободной функции перед кинетическим членом и введения потенциала самодействия.

Интерес к обобщению тензорно-скалярных теорий гравитации вызван, в частности, несостоятельностью теории Фиртца-Йордана-Бранса-Дикке дать принципиально новые (отличные от ОТО) результаты расчетов по экспериментам в Солнечной системе на основе пост-ньютоновского формализма. Тензорно-мульти-скалярная (ТМС) теория гравитации, по мнению ее авторов, Дамура и Эспозито-Фарезе, дает разумные предсказания для четырех различных режимов наблюдений: 1) квази-стационарный режим слабых полей (в условиях Солнечной системы); 2) быстро меняющиеся слабые поля (гравитационные волны); квази-стационарные сильные поля (нейтронные звезды или черные дыры); 4) эффекты смещения сильных полей и полей излучения для гравитационного излучения в системе многих компактных тел. Подробное изложение вышеуказанных результатов можно найти в пионерской работе Дамура и Эспозито-Фарезе 1992 года [46]. Следует отметить, что ТМС теория гравитации имеет много общего с самогравитирующей нелинейной сигма моделью и киральной космологической моделью [1].

Среди физических полей, рассматриваемых в рамках ОТО, скалярные поля занимают особое место. Во-первых, они имеют совершенно прозрачную физическую интерпретацию как поле, отвечающее за сильные взаимодействия (короткодействующее поле). Во-вторых, как эффективное поле, описывающее результат действия других физических полей (дальнодействующее скалярное поле). В последние несколько десятков лет особенно интенсивно исследовалось самодействующее скалярное поле, как источник гравитационного поля, приводящее Вселенную в стадию экспоненциально быстрого расширения (инфляционную стадию). Кроме того модель скалярного поля может рассматриваться как своего рода теоретическая лаборатория для отработки методов решения

самосогласованной системы уравнений гравитационного и физических полей.

Вначале рассмотрим основные соотношения для модели самогравитирующего скалярного поля в рамках эйнштейновской теории гравитации. Основные методы, используемые в теории гравитации, космологии, квантовой теории поля, в теории нелинейных волн и солитонов, достаточно широко представлены в монографиях [8,47-52].

Массивное скалярное поле, минимально взаимодействующее с гравитацией, описывается интегралом действия [1]¹

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \{L_g + L_{sf}\}, \quad (2.1)$$

в котором лагранжиан гравитационного поля $L_g = R/2\kappa$, где R - скалярная кривизна, κ - постоянная Эйнштейна, которая в выбранной системе единиц равна 1.

Лагранжиан массивного скалярного поля определяется таким образом

$$L_{sf} = \frac{1}{2}(\phi_{,\mu}\phi_{,\nu}g^{\mu\nu} - m^2\phi^2).$$

Здесь и далее принято обозначение $\phi_{,\mu} \equiv \partial_{\mu}\phi \equiv \frac{\partial\phi}{\partial x^{\mu}}$.

Тензор Энергии-Импульса (ТЭИ) скалярного поля имеет вид

$$T_{\mu\nu} = \phi_{,\mu}\phi_{,\nu} - g_{\mu\nu} \frac{1}{2}(\phi_{,\mu}\phi_{,\nu}g^{\mu\nu} - m^2\phi^2). \quad (2.2)$$

Принцип наименьшего действия $\delta S = 0$ приводит при варьировании по гравитационному и скалярному полям к уравнениям Эйнштейна и Клейна-Гордона соответственно

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \kappa T_{\mu\nu}, \quad (2.3)$$

¹Здесь и далее, если нет специальных оговорок, используются стандартные обозначения, принятые в монографии Ландау Л.Д. и Лифшица Е.М. Теоретическая физика, т.2, "Теория поля" [214].

$$\phi_{;\mu}^{i;\mu} - m^2 \phi = 0. \quad (2.4)$$

Самосогласованная система уравнений ЭКГ (2.3)-(2.4) является основным объектом исследований для модели скалярного поля в ОТО. Заметим, что уравнение Клейна-Гордона (2.4) является дифференциальным следствием уравнений Эйнштейна (2.3) с ТЭИ (2.2).

Впервые в рамках ОТО скалярное поле введено в рассмотрение в конце сороковых годов. В 1947 году Папапетроу [53] исследовал случай взаимодействия скалярного, электромагнитного и гравитационного полей. В отсутствие электромагнитного поля самосогласованная система уравнений Эйнштейна-Клейна-Гордона была рассмотрена в 1947 году в работе Фишера [54].

Отметим, что в контексте стандартной космологии исследуется системы уравнений ЭКГ "в чистом виде", то есть в отсутствие взаимодействия с другими физическими полями.

Несмотря на то, что работа [54] подверглась критике [55-57] за погрешности анализа асимптотического поведения метрики, само решение было вычислено корректно. Кроме того, данная работа подвергла сомнению распространенное в то время мнение, что для элементарных частиц можно всегда пренебрегать гравитационными силами. Здесь интересно отметить, что вопрос о возможной роли гравитации в физике элементарных частиц был поставлен Эйнштейном [58] (см. стр.664).

Теперь представим результаты работы [54] для самогравитирующего скалярного поля.

Полученная Фишером метрика имеет вид

$$ds^2 = \left\{ \frac{z - z_0}{z + z_1} \right\}^p dt^2 - \frac{r^2}{z^2} \left\{ \frac{z - z_0}{z + z_1} \right\}^p dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2), \quad (2.5)$$

где

$$z_{0,1} \equiv (\kappa^2 m^2 + \kappa G^2)^{1/2} \mp \kappa m,$$

$$p = \frac{\kappa m}{\sqrt{\kappa^2 m^2 + \kappa G^2}},$$

G - скалярный заряд, функция z определяется из уравнения

$$(z - z_0)^{1-p} (z + z_1)^{1+p} = r^2.$$

Скалярное поле определяется соотношением

$$\phi = \frac{Gp}{2\kappa m} \ln \left\{ \frac{z + z_1}{z - z_0} \right\}. \quad (2.6)$$

В работах пятидесятых годов исследуется система уравнений ЭКГ в случае сферически-симметричной и аксиально-симметричной метрики пространства-времени. В работе И-ши [59] найдено статическое сферически-симметричное решение для безмассового скалярного поля, которое логарифмически убывает с расстоянием. Аналогичное решение получено в работе Бергмана и Лейпника [60]. Особо следует отметить работы Бакдала [61-63], где был предложен метод отыскания точных решений для самосогласованной системы уравнений ЭКГ, исходя из вакуумных статических решений уравнений Эйнштейна, в классе метрик, который включает в себя сферическую и аксиальную симметрию.

В работах 60-ых годов основной акцент сделан на поисках несингулярных решений для сферически-симметричного и аксиально-симметричного гравитационных полей, взаимодействующих с безмассовым скалярным полем космологического характера.

Ключевой работой этого периода является работа Яниса-Ньюмана-Виникура [64], в которой, в очередной раз, рассматривается статическое сферически-симметричное гравитационное поле, минимально взаимодействующее с безмассовым скалярным полем. В отличие от работ

[54,59,62] используется система координат, в которой метрика гравитационного поля записывается в шварцшильдовском виде²

$$ds^2 = \left\{ \frac{2R + r_0(\mu + 1)}{2R - r_0(\mu - 1)} \right\}^{1/\mu} dR^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) - \left\{ \frac{2R - r_0(\mu - 1)}{2R + r_0(\mu + 1)} \right\}^{1/\mu} dt^2, \quad (2.7)$$

где радиальная координата $R(r)$ определяется из соотношения

$$r^2 = \frac{1}{4} \left\{ 2R + r_0(\mu + 1) \right\}^{1+\frac{1}{\mu}} \left\{ 2R - r_0(\mu - 1) \right\}^{1-\frac{1}{\mu}}, \quad (2.8)$$

$$\mu \equiv \sqrt{1 + 4\kappa A^2 / r_0^2} \geq 1, \quad A = \text{const}, \quad r_0 = 2m = \text{const}.$$

Скалярное поле определяется формулой

$$\phi = \frac{A}{\mu} \ln \left| \frac{2R - r_0(\mu - 1)}{2R + r_0(\mu + 1)} \right|. \quad (2.9)$$

Работа [64] также содержит погрешности при исследовании асимптотического поведения метрики.

Пенней в работе [65] получил решение системы ЭКГ в квадратурах для аксиально-симметричной метрики

$$ds^2 = e^{2\nu - 2\lambda} (dr^2 + dz^2) + r^2 e^{-2\lambda} d\varphi^2 - e^{2\lambda} dt^2. \quad (2.10)$$

Если функция $\lambda(r, z)$ и скалярное поле $\phi(r, z)$ удовлетворяют уравнению Лапласа, записанному в цилиндрических координатах, тогда

$$\nu = \int (r(\lambda_1^2 - \lambda_2^2) dr + 2\lambda_1 \lambda_2 dz) + \frac{1}{2} \kappa \int (r(\phi_1^2 - \phi_2^2) dr + 2\phi_1 \phi_2 dz),$$

где $\lambda_1 \equiv \partial_1 \lambda$.

Также в работе [65], при анализе сферически-симметричного случая, найдено простое преобразование координат

$$r^2 = R(R - 2m) \sin^2 \theta, \quad z = (R - m) \cos \theta, \quad (2.11)$$

²Здесь и далее сигнатура метрики и обозначения координат соответствует той, которая используется в оригинальной работе.

позволяющее получить сферически-симметричное решение. Как выяснилось, найденное решение, после преобразования трансляции радиальной координаты и переопределения параметров, совпадает с решением Яниса-Ньюмена-Виникура (2.7).

Обобщение статических решений для безмассового скалярного поля на случай дополнительного взаимодействия с электромагнитным полем и в рамках теории гравитации Бранса-Дикке предложено в работе Яниса-Робертсона-Виникура [66].

Следует отметить появление работ по геометризации скалярного поля [67,68], в которых предпринимается попытка найти систему дифференциальных уравнений для метрического тензора эквивалентную системе уравнений ЭКГ (для безмассового и массивного скалярного поля), установив связь между функцией поля и тензором Риччи. Короткодействующее скалярное поле рассматривалось в работе Пеннея [68], в связи с проблемой геометризации массивного скалярного поля.

Другим важным моментом является понимание необходимости введения других физических полей, кроме скалярного, для получения устойчивых конфигураций. Заметна большая активность в исследовании системы уравнений Эйнштейна-Клейна-Гордона-Максвелла (ЭКГМ) [68,69].

В лекциях Пенроуза "Конформная трактовка бесконечности", прочитанных в 1963 году на летней школе по теоретической физике при Гренобльском университете (см., например, в сборнике [70]), предложено обобщение уравнения свободного скалярного поля, которое не меняет своего вида при конформном преобразовании метрики $dS^2 = \Omega^2 d\tilde{S}^2$. Конформно-инвариантное уравнение безмассового скалярного поля имеет вид

$$\nabla_{\mu} \nabla^{\mu} \phi + \frac{1}{6} R \phi = 0. \quad (2.12)$$

Это уравнение может быть получено варьированием по полю ϕ действия

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ L_g + L_{sf} + \frac{1}{12} R\phi^2 \right\}. \quad (2.13)$$

Метрический ТЭИ для теории с конформной связью (13) получен в работе Тагирова и Черникова [71], где рассматривается квантовая теория скалярного поля в конформно-инвариантной форме в пространстве де Ситтера.

В работах 70-ых - 80-ых годов много внимания уделяется анализу системы уравнений ЭКГМ и поискам устойчивых решений для этой системы. В эти же годы впервые появляется интерес к плоско-симметричным и конформно-плоским решениям.

Мы не ставим своей целью дать обзор работ по взаимодействующим электромагнитным, скалярным и гравитационным полям, однако исследования некоторых групп будут отмечены особо.

В семидесятые годы активные исследования решений с физическими полями в ОТО, которые позволяют изучить возможное влияние гравитации в микромире, предприняты в группе Станюковича. В число таких задач входит и изучение скалярного поля в искривленном пространстве. Учитывая необходимость правильного квазиклассического предела при рассмотрении квантовых эффектов в микромире, много внимания уделяется конформно-инвариантной версии скалярного поля, с акцентом на исследовании комплексного скалярного поля. Обзор работ по исследованиям в этом направлении подробно представлен в монографии Станюковича и Мельникова [47]. Отметим также и исследования, проведенные в группе Станюковича-Мельникова, по поискам частицеподобных решений для взаимодействующих скалярных, электромагнитных и гравитационных полей. Результаты этих исследований отражены в монографии [47].

Приведем результаты работ по исследованию безмассового скалярного поля в пространствах ОТО.

В классе метрик Эйнштейна-Розена

$$ds^2 = e^{\eta-\psi} (dt^2 - dr^2) - r^2 e^{-\psi} d\varphi^2 - e^{\psi} dz^2 \quad (2.14)$$

безмассовое скалярное поле рассматривалось в работах Сингха [72], Лала и Сингха [73].

В работе Патела [74] найдены плоско-симметричные решения систем уравнений ЭКГ и ЭКГМ. Для самогравитирующего безмассового скалярного поля в классе метрик

$$ds^2 = e^{2\alpha} (dt^2 - dx^2) - e^{2\beta} (dy^2 + dz^2) \quad (2.15)$$

найден статическое решение в виде

$$\alpha = \frac{c_3}{c_1} \ln(c_1 x + c_2) + c_4, \quad 2\beta = \ln(c_1 x + c_2), \quad \phi = \frac{c_5}{c_1} \ln(c_1 x + c_2), \quad (2.16)$$

где c_a - константы, удовлетворяющие условию

$$c_1^2 + 4c_1 c_3 = 16\pi c_5^2, \quad c_1 \neq 0.$$

Для линейного элемента

$$ds^2 = e^{2h} \{ dt^2 - dr^2 - r^2 d\varphi^2 - S^2 dz^2 \}, \quad (2.17)$$

где r, φ, z - цилиндрические координаты, h, S - функции от t , найдено нестатическое решение

$$S = A e^{hc_1/c_2}, \quad \phi = h c_3 / c_2,$$

$$e^{h(2+c_1/c_2)} = (2 + c_1/c_2)(c_2 A^{-1} t + c_3),$$

$$A = \text{const} \neq 0, \quad 3c_2^2 + 2c_1 c_2 = 4\pi c_3^2, \quad c_2 \neq 0.$$

Интересно отметить, что при занулении констант c_5 и c_3 в приведенных решениях, восстанавливаются известные вакуумные решения Тауба и Бера.

Аналогичные исследования для плоско-симметричной и цилиндрически-симметричной метрики проведены в работе Зайцева и Шикина [75].

Работа Лала и Прадхана [76] посвящена поиску и исследованию волновых решений системы ЭКГ в классе обобщенной метрики Переса, линейный элемент которой представлен в виде

$$ds^2 = -Adx^2 - Bdy^2 - (1-E)dz^2 - 2Edzdt + (1+E)dt^2, \quad (2.18)$$

где A, B, E – функции от (x, y, Z) ; $Z = z - t$.

Предполагая зависимость $A = Bf$, $f = f(Z)$ найдено точное плоско-волновое решение для $A = A(x, Z)$, $B = B(y, Z)$, $E = E(x, y, Z)$ и $\phi = \phi(Z)$.

Вышеперечисленные функции удовлетворяют уравнению

$$A^{-1} \{ A'' - E_{xx} - (A'^2 - A_x E_x) / 2A \} + B^{-1} \{ B'' - E_{yy} - B'^2 - B_y E_y / 2B \} = 16\pi\phi'^2. \quad (2.19)$$

В последнем уравнении штрих означает производную по Z .

Скалярное поле в конформно-плоских пространствах рассматривалось в работах [77-80]. В классе конформно-плоских метрик

$$ds^2 = e^\psi d\eta^2 \equiv e^\psi \{ (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2 - (dt)^2 \} \quad (2.20)$$

в работе [77] найдены нестационарные решения системы ЭКГ

$$e^\psi = \sqrt{\frac{2\kappa}{3}} \xi + c_2, \quad \xi = k_a x^a - \omega t, \quad a = 1, 2, 3,$$

$$\phi = \sqrt{\frac{3}{2\kappa}} \ln \left\{ \sqrt{\frac{2\kappa}{3}} \xi + c_2 \right\} + c_3. \quad (2.21)$$

Полученные решения аналогичны тем, которые следуют из решений Патела (2.15) при переходе от плоско-симметричной к конформно-плоской метрике.

В работе Федосеева и Дородных [78] найдено обобщение приведенного решения для тахионных скалярных полей. Кроме того показано, что существует решение для массивного скалярного поля типа плоских волн. Однако примеров решений не приводится, представлена лишь система двух обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка, которая имеет 3-х параметрическое семейство решений.

Аналогичные исследования скалярного поля в конформно-плоских пространствах проведены в работах [79,80].

Нестационарные решения волнового и автомодельного типа системы ЭКГ в случае ортогональной метрики

$$ds^2 = D(dt)^2 - A(dx^1)^2 - B(dx^2)^2 - C(dx^3)^2 \quad (2.22)$$

исследованы в работах Шикина [82] и [83] соответственно.

Продолжается исследование геометризации моделей скалярного поля, начатого в работах Кучара [67] и Пеннея [68].

В этом направлении отметим систематическое исследование комплексного скалярного поля, предпринятое в серии статей Людвига [84, 85].

Следует особо отметить работу Мельникова и Орлова [86], где представлено решение в несингулярной космологии как проявление квантового вакуума, что является близким по духу к моделям инфляции, открытыми в восьмидесятые годы.

В работе Детвейлера [87] анализируются уравнения массивного скалярного поля в гравитационном поле вращающейся черной дыры. Аналитическими методами исследуется вопрос о стабильности скалярного поля относительно малых возмущений, когда масса скалярного поля и частота возмущений значительно меньше обратной массы M черной дыры. На больших расстояниях r от черной дыры решение радиальной части

уравнения Клейна-Гордона записывается через конфлюэнтные гипергеометрические функции. При приближении к горизонту событий решение радиальных уравнений выражается в гипергеометрических функциях. При анализе роста неустойчивости установлено, что наибольший рост неустойчивости аналогичен случаю $2p$ -состояния атома водорода и имеет время e -кратного роста

$$\tau = 24(a\mu^9 M^7)^{-1},$$

где μ - масса скалярного поля, a - параметр углового момента.

Следует заметить, что, по мнению Детвейлера, результаты работы могут оказаться полезными при анализе испарения черных дыр, когда неустойчивость играла определяющую роль. На современном же этапе эволюции Вселенной, в частности при рассмотрении пионного поля вокруг черной дыры, рассмотренное приближение неприменимо.

Уаймэном [88] продолжено исследование статического сферически симметричного гравитационного поля, порожденного скалярным полем. В специально подобранной системе координат найдены решения Бергмана-Лейпника (1957)[89], Йилмаза (1958) [89], Бакдала (1959) [63]. (Заметим, что на решение Фишера (2.5) в этих работах нет ссылок.) Существенным прогрессом работы [88] можно считать постановку вопроса о существовании статических сферически симметричных метрик в случае зависимости скалярного поля от времени. Хотя полностью решить систему ЭКГ для этого случая Уаймэну не удастся, найдено одно частное аналитическое решение и рассмотрено приближение при $r \rightarrow 0$.

Квантовые аспекты для конформно-инвариантного скалярного поля в космологии ранней Вселенной рассматривались в работах Бергер [90-91].

Космологические пространства (II, VIII, IX типа по Бианки) заполненные идеальной жидкостью с уравнением состояния

$$p = (\gamma - 1)\varepsilon, \quad 1 \leq \gamma \leq 2,$$

скалярным и электромагнитными полями рассматривались в работе Лоренца [92]. В случае предельно жесткого вещества ($\gamma = 2$) найдено новое точное решение в параметрической форме для перечисленных выше космологических пространств.

В работе Фролова и Зельникова [93] рассматривается безмассовое скалярное поле с точечным зарядом медленно погружающееся в черные дыры Шварцшильда и Райснера-Нордстрема. Анализ полученного точного решения позволяет сделать вывод, что скалярное поле будет расплываться, и черная дыра не будет разрушаться.

Работа Клебера, Сома и Тейксейра [94] посвящена поиску точных решений для дальнодействующего скалярного поля в статических плоско-симметричных пространствах. Найденный однопараметрический класс точных решений с космическим временем изучается в гармонических координатах. Решены уравнения геодезических. Скалярное поле линейно возрастает (или убывает) пропорционально пространственной координате z

$$\phi(z) = \pm k/z + const.$$

Любопытно отметить, что из анализа компонент ТЭИ следует вывод об анизотропном состоянии вещества для полученного решения, которое характеризуется соотношением между компонентами

$$T_0^0 = T_1^1 = T_2^2 = -T_3^3 > 0.$$

Такая анизотропия вызывает поле ускорения, зависящее от скорости движущихся пробных частиц.

В работе [95] рассматривается эмиссионный тепловой поток в рамках Вселенной де Ситтера, заполненной безмассовым конформно-инвариантным скалярным полем. Методом разделения переменных решается уравнение конформно-инвариантного скалярного поля на фоне метрики де Ситтера,

записанной в шварцшильдовой форме. Решение выражается через гипергеометрические функции. Данная работа продолжает исследования уравнения скалярного поля на фоне физически значимых пространств, начатого в работах Роувана и Стефенсона [96].

Решение в квадратурах системы уравнений безмассового самогравитирующего скалярного поля для стационарных аксиально-симметрических пространств представлено в работе [97].

Система уравнений ЭКГМ в стационарных аксиально симметричных гравитационных полях исследовалась в работе Банерджи и Чаудхари [98]. Найден метод генерирования новых решений системы ЭКГМ из известных вакуумных решений уравнений Эйнштейна. Некоторые ранее полученные частные решения, например решения Яниса-Робертсона-Виникура [64] и Тейксейра-Уолка-Сома [99], воспроизводятся при подходящем выборе постоянных интегрирования. Найденны два класса новых точных решений, которые не сводятся к известным.

В работе Гюрсеса [100] показано, что существуют только два класса различных конформно-плоских решений для системы уравнений ЭКГ, один из которых найден Пеннеем [101].

Изотропное скалярное поле $\phi^{\nu}\phi_{,\nu} = 0$ в полях тяготения алгебраически специальных типов III, N и O по классификации Петрова исследовалось в работе Червона [102]. С использованием метода квазиортогональной вещественной тетрады найдены пространственно-временные многообразия, допускающие изотропное скалярное поле, и приведены примеры точных решений для самогравитирующего скалярного поля.

Нелинейные скалярные поля

Система уравнений ЭКГ представляет собой нелинейную систему дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка,

проинтегрировать которую удастся лишь в предположении о дополнительной симметрии гравитационного поля и некоторых специальных предположениях (анзацах) о соотношении скалярного и гравитационного полей. В виду сказанного, первоначально, основные исследования физических полей в ОТО были выполнены для безмассового скалярного поля. Только в некоторых работах (например [103,104]) были рассмотрены массивные скалярные поля. Однако значительного прогресса здесь не было достигнуто. Поэтому введение нелинейных скалярных полей для решения самосогласованной задачи гравитации значительно запоздало по времени от постановки соответствующей проблемы в рамках полевой теории.

Побудительными причинами исследования нелинейных скалярных полей в теории относительности послужили следующие факторы. Во-первых, это прогресс нелинейных теорий мезон-нуклонных взаимодействий, которые возникли как попытки объяснить существенно нелинейные эффекты в физике элементарных частиц, такие как явление ядерного насыщения и оболочечной структуры ядра [104]. Во-вторых, учет квантовых явлений на ранней стадии эволюции Вселенной, указывает на необходимость рассмотрения конформно-инвариантной версии скалярного поля, которая также приводит к наличию дополнительного слагаемого (нелинейной добавки) в уравнении Клейна-Гордона (2.12), вызванного неминимальным взаимодействием с гравитацией.

Интересно отметить, что уже в 50-ые годы, когда появились первые работы по нелинейным скалярным полям, модель нелинейного комплексного скалярного поля, заданная лагранжианом

$$L = \frac{1}{2} \phi^{\mu} \phi_{,\mu}^* + m^2 \phi \phi^* - \frac{\gamma}{2} (\phi \phi^*)^2, \quad (2.23)$$

рассматривалась в качестве теоретической лаборатории в работе [105] (см. также в книге [106], стр.256.) для отработки метода решения задачи о собственных значениях уравнения спинорного поля.

Программа исследования нелинейного уравнения мезонного поля была провозглашена в работе Шиффа [104,107] при попытке объяснения эффекта ядерного насыщения и оболочечной структуры ядра. "...мы надеемся, что дальнейшие работы в этом направлении будут посвящены изучению других типов мезонных полей и других форм нелинейности, а также проблеме квантования." (цитируется по книге [107], стр.304).

В предложенной модели Шиффа [104,107] нуклоны являются источниками скалярного поля, которое описывается классическим образом, исходя из лагранжиана

$$L = \frac{1}{2} \phi^{\mu} \phi_{,\mu} - G(\phi) + f(\mathbf{r}, t) F(\phi), \quad (2.24)$$

где $f(\mathbf{r}, t)$ - плотность нуклонных источников, $F(\phi)$ - функция, описывающая нелинейное взаимодействие с источником, $G(\phi)$ - нелинейный потенциал.

Если $F(\phi) = \phi$ и $G(\phi) = \frac{1}{2} m^2 \phi^2$ (в системе единиц $c = \hbar = 1$), то мы переходим к обычной линейной теории. В дальнейшем в работе [104] показано, что тяжелые ядерные системы могут существовать для нелинейного потенциала следующего вида

$$G(\phi) = \frac{1}{2} m^2 \phi^2 + \frac{1}{4} \alpha^2 \phi^4, \quad (2.25)$$

причем второе слагаемое соответствует точно-контактному отталкиванию между мезонами. Постоянная α определяется из сравнения с экспериментом.

Важно отметить, что аналогичная (2.23)-(2.25) релятивистская полевая модель со спонтанно нарушенной симметрией (модель Голдстоуна) [108]

$$L = \frac{1}{2} \phi^{\nu} \phi_{,\nu}^* + \frac{1}{2} \mu^2 \phi \phi^* - \frac{\lambda}{4} (\phi \phi^*)^2, \quad (\lambda, \mu > 0) \quad (2.26)$$

является основой механизма Хиггса наделения массой калибровочных полей [48].

В семидесятые годы активно исследовались различные формы нелинейностей в уравнении Клейна-Гордона.

Для удобства последующего изложения запишем нелинейное уравнение Клейна-Гордона в виде

$$\nabla_{\mu} \nabla^{\mu} \phi + \frac{dV(\phi)}{d\phi} = 0 \quad (2.27)$$

Это уравнение следует из лагранжиана Шиффа (2.24) при отсутствии источников $f(\mathbf{r}, t) \equiv 0$ и $G(\phi) \equiv V(\phi)$, и встречается во многих физических задачах (см., например, в монографии Уизема [52]).

В двумерном случае когда

$$V'_{\phi}(\phi) = \sin \phi$$

нелинейное уравнение Клейна-Гордона (2.27), которое в данном случае имеет историческое название Sin-Гордон, исследовалось в XIX веке при изучении поверхностей отрицательной гауссовой кривизны.

Уравнение Sin-Гордона, как соответствующее киральному полю $u(x, t) = \exp\{i\varphi(x, t)\}$, принимающему значения в группе $U(1) \cong SO(2)$, рассмотрено в работе Будагова и Тахтаджяна [109]. Исследование решений методом обратной задачи рассеяния (МОЗР) рассмотрено ранее в работе [110] и вошло в монографию Тахтаджяна и Фаддеева [51].

Особый интерес представляют исследования посвященные поискам частицеподобных и солитонных решений нелинейного уравнения Клейна-Гордона. Классическое описание элементарных частиц при помощи локализованных решений уравнений поля является конечной целью таких исследований.

Исследование солитонных решений для массивного скалярного поля с кубической нелинейностью в рамках специальной теории относительности

(СТО) проведено в работе Давыдова и Кислухи [111]. Нелинейный потенциал самодействия выбирался в виде

$$V(\phi) = m^2 \phi^2 - \frac{\lambda}{2} \phi^4, \quad \lambda > 0, \quad m^2 > 0. \quad (2.28)$$

Полученное решение интерпретируется авторами как устойчивая релятивистская частица³.

Серия работ Барта [112-115] посвящена исследованию классических и квантовых аспектов теории самодействующего скалярного поля (ССП) более общего вида, чем в работе [111]. Потенциал самодействия был выбран в виде

$$V(\phi) = \frac{\alpha}{2p+2} \phi^{2p+2} + \frac{\lambda}{2} \frac{\phi^{4p+2}}{4p+2}, \quad \left(p \neq 0, -\frac{1}{2}, -1 \right). \quad (2.29)$$

Найдены плоско-волновые и сферически-симметричные решения, некоторые из которых анализируются в квантовом случае.

Отметим также исследования осциллирующих частицеподобных решений нелинейного уравнения Клейна-Гордона с потенциалом самодействия (2.28) предпринятые в работе Боголюбского [116].

В работе [117] представлено точное решение солитонного типа для хиггсовского скалярного поля с таким же потенциалом самодействия (2.28). Гетмановым [118] предложена модель, где рассматривается комплексное хиггсовское скалярное поле с лагранжианом

$$L = \frac{|\partial_\mu \psi|^2}{1 - \lambda^2 |\psi|^2} - m^2 |\psi|^2 \quad (2.30)$$

как вполне интегрируемая гамильтонова система. Найден явный вид N-солитонных решений с асимптотикой $|\psi| \rightarrow \lambda^{-1}$ при $|x| \rightarrow \infty$.

³Вопрос устойчивости данного решения вызывает дополнительную дискуссию.

Условие существования солитоноподобных решений в теории ССП в случае D-мерного пространства-времени исследовано в работе [119]. Для уравнения поля

$$\frac{1}{r^{D-1}} \frac{d}{dr} \left\{ r^{D-1} \frac{d\phi}{dr} \right\} - \kappa^2 \phi^2 + g^2 \phi^{p-1} - a\phi^{q-1} = 0. \quad (2.31)$$

найден пример устойчивых солитонов в $(\phi^4 - a\phi^6)$ теории поля.

Сферически-симметричные решения для комплексной теории поля, описываемой динамическим уравнением

$$\phi_{tt} - \phi_{xx} + m^2 \phi - \phi F(|\phi|^2) = 0, \quad (2.32)$$

исследовались на устойчивость в работе [120].

Теория самодействующего комплексного скалярного поля с лагранжианом

$$L = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi^* - \phi \phi^* + F(\phi \phi^*) \quad (2.33)$$

рассматривалась в работе Кумара [121], в которой исследовались регулярные сферически-симметричные решения для

$$F'_\phi = \begin{cases} 0, & \phi^2 < a \\ \lambda \ln(\alpha \phi^2), & \phi^2 \geq a \end{cases}$$

Здесь $\lambda = const$, $\alpha = 1/a$.

Другая работа Кумара [122] посвящена поиску зарядово-стабильных решений в моделях конфайнмента, описываемых теорией заряженного скалярного поля

$$L = -\frac{1}{2} F(s, p, q),$$

$$s = \phi^* \phi; \quad p = -\partial \phi^* \partial \phi; \quad q = I_\mu I^\mu; \quad \mu = 0, 1, 2, 3;$$

$$I_\mu = \frac{i}{2} \{ \phi^* \partial_\mu \phi - \partial_\mu \phi^* \phi \},$$

в которой рассматривались две конкретные модели для заданной функции F .

Отметим, что в данном разделе не ставится целью дать исчерпывающий обзор по всем работам, связанным с поиском частицеподобных, солитонных решений и применением метода ОЗР в теории нелинейного уравнения Клейна-Гордона, однако указывается тенденция изучения данного уравнения в рамках классической теории поля.

Как уже отмечалось, интерес к таким исследованиям продиктован надеждой построения реалистических моделей протяженных частиц на основе солитонных решений. В частности, в работе [123] рассматриваются нелинейные теории комплексного скалярного поля с зарядом. Отмечается локализованность решений с ненулевым зарядом, которые в случае статического сферически-симметричного состояния могут интерпретироваться как классический конфайнмент: заряд и энергия в нижнем энергетическом состоянии такой системы "замурованы" в конечном объеме (мешке).

В работе Чаудхари [124] найдена пара Лакса (в двумерном случае), которая приводит к нелинейному уравнению Клейна-Гордона с потенциалом

$$V(\phi) = \phi^m a_m, \quad m = 2, 3, 4. \quad (2.34)$$

Аналогичную модель при $a_3 = 0$ геометрическими методами исследовал Джеффри [125].

Исследование системы нелинейных скалярных и спинорных полей с учетом неминимального взаимодействия выполнено в работе [126]. Лагранжиан рассматриваемой модели выбирался в виде

$$L = -\frac{1}{2} \phi_{,\mu} \phi^{,\mu} - \lambda \phi^4 - \frac{1}{2} \bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi - \frac{3}{4} f (\bar{\psi} \psi)^{4/3} + g \bar{\psi} \psi \phi. \quad (2.35)$$

В работе [127] рассматривались модели конфайнмента в (2+1) -мерном пространстве-времени для комплексного скалярного поля для фракционной модели $V(\phi) = \lambda\phi^{2-\alpha}$ и в полиномиальной модели $V(\phi) = a_4\phi^4 + a_6\phi^6$. Адронные свойства полученных в работе солитонных решений исследовались численными методами.

Численными методами в работе [128] исследовалась устойчивость решений для нелинейного уравнения Клейна-Гордона с различными типами потенциалов:

- Хиггса

$$V(\phi) = \frac{1}{4}(\phi^2 - 1)^2, \quad (2.36)$$

- Sin-Гордона

$$V(\phi) = 2 \sin(\phi/2), \quad (2.37)$$

- кубический потенциал

$$V(\phi) = \frac{1}{2}\phi^2 \left(1 - \frac{1}{2}\phi^2 \right). \quad (2.38)$$

Сингулярные решения уравнения гиперболического Sinh-Гордона исследовались в работе Погребкова [129].

Двумерная модель с нелинейностью Лиувилля

$$V(\phi) = \lambda e^\phi, \quad \lambda = const \quad (2.39)$$

рассматривалась в работах [130,131].

В дальнейшем, потенциалы, аналогичные приведенным в данном разделе, рассматривались в моделях самогравитирующего скалярного поля как потенциалы, разумные с физической точки зрения.

Самогравитирующие скалярные поля

В теории гравитации нелинейные скалярные поля значительно усложняли исследование с математической точки зрения. Одной из первых работ, где рассматривается нелинейное скалярное поле в ОТО является работа [132], в которой исследовалось безмассовое скалярное поле. Лагранжиан модели самогравитирующего нелинейного безмассового скалярного поля выбирался в виде

$$L = \frac{R}{2} + \frac{1}{2} \phi_{,\mu} \phi^{,\mu} + \frac{\gamma}{2} F(\phi) \{ \phi_{,\mu} \phi^{,\mu} \}, \quad (2.40)$$

где γ - параметр нелинейности, $F(\phi)$ - функция скалярного поля ϕ . Рассматривался случай статических аксиально-симметричных гравитационных полей. Отметим, что исходный лагранжиан (2.40) может быть приведен к стандартной модели безмассового скалярного поля, вообще говоря, нелинейным преобразованием

$$\tilde{\phi} = \int \sqrt{1 - \gamma F(\phi)} d\phi.$$

Как направление исследования нелинейного скалярного поля в ОТО может рассматриваться исследование неминимально взаимодействующего с гравитацией скалярного поля. Представим лагранжиан такой теории в виде трех слагаемых

$$L = L_g + L_{sf} + L_{int},$$

где L_g - лагранжиан гравитационного поля, L_{sf} - лагранжиан скалярного поля, L_{int} - лагранжиан взаимодействия полей.

Взаимодействие вида

$$L_{int} = \frac{1}{2} \xi R \phi^2, \quad (2.41)$$

где ξ - произвольный параметр, может рассматриваться как обобщение конформно-инвариантной связи [70,71], когда $\xi = 1/6$. Этого типа модели

исследовались, например, в работе [133]. В работе Коркиной [134] найдено обобщение решения Фишера (5) для модели с обобщенной конформной связью.

Что касается моделей с конформной связью, то значительный прогресс был достигнут в работе Бекенштейна [135], где был предложен метод генерирования решений из модели скалярного поля с минимальным взаимодействием.

В работе [136] рассматривалось самогравитирующее нелинейное скалярное поле с потенциалом самодействия

$$V(\phi) = -\frac{1}{2} \left[\frac{\mu}{f} \right]^2 (1 - f^2 \phi^2) \phi^2. \quad (2.42)$$

Численным интегрированием системы уравнений ЭКГ найдено решение типа "кинк" в сферически-симметричном случае.

Исследование самогравитирующего нелинейного скалярного поля в ОТО с кубической нелинейностью, с нелинейностью Лиувилля и Хигса, с нелинейностью типа Sin-Гордон было предпринято в серии работ Г. Иванова [137-140]. В цитируемых работах были получены точные аналитические решения во вселенной Фридмана, для статической сферически-симметричной и плоско-симметричной метрики, а также для конформно-плоских пространств.

Нелинейное скалярное поле также широко изучалась в 80-ые годы в моделях инфляционной космологии. Однако акцент на поиски точных решений в таких моделях появляется лишь в начале 90-ых годов.

Скалярные поля в конформно-плоских пространствах

Поскольку класс метрик ФРУ принадлежит к классу конформно-плоских пространств, рассмотрим пространства с линейным элементом

$$dS^2 = A(x^3, x^4) \left(-(dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2 + (dx^4)^2 \right). \quad (2.43)$$

Используя идею тонкой подстройки потенциала [141] из уравнений ЭКГ (2.3) выразим потенциал $V(\phi)$ и производную по времени от поля ϕ_4^2 через конформный множитель $A(x^3, x^4)$ и его производные

$$V(\phi(x^3, x^4)) = \frac{A_{33} - A_{44}}{2A^2}, \quad (2.44)$$

$$\phi_3^2 + \phi_4^2 = -\frac{A_{33} + A_{44}}{A} + \frac{3(A_3^2 + A_4^2)}{2A^2}. \quad (2.45)$$

Здесь нижний индекс означает частную производную по соответствующей координате: $A_{33} = \frac{\partial}{\partial x^3} \left(\frac{\partial A}{\partial x^3} \right)$.

Будем искать потенциал $V(\phi)$ и ϕ_4^2 задавая гравитационный потенциал в нужном нам режиме $A(x^3, x^4)$. Определив из уравнений (2.44)-(2.45) $V(t)$ и $\phi(t)$ (скалярное поле определяется по крайней мере в квадратурах), можно найти параметрическую зависимость $V(\phi)$. В некоторых частных случаях удастся найти явную зависимость V как функцию от ϕ .

Космологические и статические решения

Рассмотрим несколько примеров, которые иллюстрируют метод тонкой подстройки потенциала.

- Пусть $A = A_0 e^{H_0 \eta}$, $\eta = x^4$. Решение (2.44)-(2.45) принимает вид

$$V(\phi(\eta)) = -\frac{H_0^2}{\kappa A_0} e^{\mp \sqrt{2\kappa} \phi}, \quad (2.46)$$

$$\phi = \pm \frac{H_0}{\sqrt{2\kappa}} \eta. \quad (2.47)$$

- Пусть $A = A_0 e^{H_0 z}$, $z = x^3$. Тогда решение (2.44)-(2.45) таково

$$V(\phi(z)) = \frac{H_0^2}{\kappa A_0} e^{\mp \sqrt{2\kappa} \phi}, \quad (2.48)$$

$$\phi = \pm \frac{H_0}{\sqrt{2\kappa}} z. \quad (2.49)$$

Оба случая (2.46) и (2.48) соответствуют нелинейности Лиувилля для потенциала $V(\phi)$. Такие решения были получены в работе [137] в предположении лиувиллевской формы потенциала $V(\phi)$ при постановке задачи. Ясно, что космологическое решение (2.46) и (2.47) соответствует частному решению степенной инфляции [142], которое записано в конформном времени η .

1. Пусть $A = e^\beta$, где $\beta = \frac{1}{2}c_1\eta^2 + c_2\eta + c_3$. Тогда, интегрируя (2.44) и (2.45), можно получить

$$V(\phi(\eta)) = -\kappa^{-1}e^{-\beta} \left\{ c_1 + (c_1\eta + c_2)^2 \right\}, \quad (2.50)$$

$$\phi(\eta) = \pm \frac{\sqrt{2}}{c_1} \left(\frac{1}{2} \tilde{\eta} \sqrt{\tilde{\eta}^2 - c_1} - \frac{1}{2} c_1 \ln \left| \tilde{\eta} + \sqrt{\tilde{\eta}^2 - c_1} \right| \right), \quad (2.51)$$

$$\tilde{\eta} = \frac{c_1\eta + c_2}{\sqrt{2}}. \quad (2.52)$$

2. Пусть $A = e^\beta$, где $\beta = \frac{1}{2}c_1z^2 + c_2z + c_3$. Ввиду симметрии уравнений (44) и (45) по отношению к x^3 и x^4 (с точностью до знака) мы можем найти статистический аналог для космологического решения (2.50) и (2.52) используя замены: $\eta \rightarrow z$, $V(\phi(\eta)) \rightarrow -V(\phi(z))$.

3. Пусть $A = e^\beta$, где $\phi_{;\mu}^{;\mu} - m^2\phi = 0$. Тогда потенциал может быть представлен в виде

$$V(\phi(\eta)) = e^{-\beta} \left(a_1\eta^2 + \frac{a_1^2}{9}\eta^6 \right). \quad (2.53)$$

Скалярное поле определяется по формуле

$$\phi(\eta) = \pm \frac{3}{2a_1\sqrt{2}} \left(\frac{1}{2} \tilde{\eta} \sqrt{\tilde{\eta}^2 - c_1} - \frac{1}{2} c_1 \ln \left| \tilde{\eta} + \sqrt{\tilde{\eta}^2 - c_1} \right| \right), \quad (2.54)$$

где $\tilde{\eta} = \frac{a_1\eta^2}{3}$.

4. Пусть $A = e^\beta$, где $\beta = \frac{a_1}{12}z^4 + a_3$. Статический аналог может быть

получен из предыдущего случая при помощи замены $\eta \rightarrow z$, $V(\phi(\eta)) \rightarrow -V(\phi(z))$.

Следует отметить, что перечень аналитических решений может быть расширен. Для этого нужно решить (2.45) для заданного гравитационного поля $A(x^3, x^4)$.

Решения солитонного типа

Пусть $A = A(\theta)$, $\phi = \phi(\theta)$, где $\theta = z - u_0 \eta$. Это означает, что мы ищем решения типа уединенной волны. Уравнения (2.44)-(2.45) преобразуются к следующему виду

$$V(\phi(\theta)) = (1 - u_0^2) \frac{A_{\theta\theta}}{2A^2}, \quad (2.55)$$

$$\phi_\theta^2 = -\frac{A_{\theta\theta}}{A} + \frac{3A_\theta^2}{2A^2}. \quad (2.56)$$

Используя подобие формы уравнений (2.55)-(2.56) уравнениям для космологических и статических решений рассмотренных выше можно прийти к выводу, что на основе решений, полученных в предыдущем параграфе, можно построить решения солитонного типа, используя подстановки:

$$\eta \rightarrow \theta, \quad V(\phi(\eta)) \rightarrow \pm(1 - u_0^2)^{-1} V(\phi(\theta)).$$

Интересно отметить, что когда $u_0^2 = 1$, то есть u_0^2 равно скорости света, потенциал зануляется.

Массивное скалярное поле

Массивное скалярное поле может рассматриваться как простейшая модель хаотической инфляции [143]. Анализ модели хаотической инфляции базируется на асимптотическом решении когда $m \ll 1$, $\phi \gg 1$. Поиск точных решений в рамках ОТО с массивным скалярным полем представляет собой

пример нерешенной проблемы. Чтобы понять причину этой проблемы зафиксируем потенциал

$$V(\phi) = \frac{1}{2} m^2 \phi^2, \quad (2.57)$$

в общих формулах (2.44)-(2.45). После некоторых преобразований с (2.44)-(2.45), используя (2.57) можно найти уравнение, которое является тестом для точного решения самогравитирующего массивного скалярного поля в конформно-плоских пространствах (2.43)

$$\frac{1}{2m^2} \left[\left(\frac{A_{44}}{2A^2} \right)_4 \right]^2 + \frac{A_{44}}{2A^2} \left(\frac{3}{2} \frac{A_4^2}{A^2} - \frac{A_{44}}{A} \right) = 0. \quad (2.58)$$

Точное решение вида $A = A_0 \eta^{-2}$ приводит к постоянному скалярному полю $\phi = const$ и может быть идентифицировано с решением для гравитационного вакуума с постоянным потенциалом, дающим эффективную космологическую постоянную $V(\phi) = const = \Lambda$.

Таким образом, доказано следующее утверждение:

Точное решение для самогравитирующего массивного скалярного поля в конформно-плоских пространствах удовлетворяет уравнению (2.58) относительно функции $A(x^4)$.

Теперь становится понятным, что трудности, связанные с поиском точных решений для массивного скалярного поля в ОТО, так или иначе связаны с необходимостью интегрировать нелинейное дифференциальное уравнение третьего порядка. Тем не менее, полученное уравнение (2.58) можно использовать для оценки отклонения численных и асимптотических решений от точных.

Различные варианты инфляционного сценария базируются на теории самодействующего скалярного поля (ССП), взаимодействующего с гравитацией в рамках космологических пространств. Нелинейная теория

скалярного поля с потенциалом самодействия $V(\phi)$ может рассматриваться как простейшая эффективная модель, которая описывает явления в физике элементарных частиц на стадии ранней Вселенной, такие как спонтанное нарушение и восстановление калибровочной симметрии ТВО [8]. При этом потенциал самодействия $V(\phi)$ отражает эпоху ТВО Ранней Вселенной: при учёте квантовых процессов форма потенциала изменяется с изменением температуры. Кроме того, выбор формы потенциала фактически определяет модель инфляции.

На основе теории ССП минимально взаимодействующего с эйнштейновской гравитацией в рамках изотропной и однородной Вселенной рассматривались различные версии модели инфляции: модели "старой", "новой" и хаотической инфляции. Анизотропные и неоднородные космологии наряду с многомерными пространство-временами также были исследованы рядом авторов (см., например, [144-146]).

Модель расширенной инфляции базируется на теории гравитации Бранса-Дикке и фактически содержит два скалярных поля. А именно, скалярное поле Бранса-Дикке и скалярное поле "материи" [147,148]. Известно, что скалярно-тензорные теории гравитации, типа Бранса-Дикке, также как и модели R^2 и индуцированной гравитации конформно эквивалентны эйнштейновской теории гравитации, минимально взаимодействующей с самодействующим скалярным полем [149,150].

Все вышеперечисленные модели инфляционного сценария тесно связаны с гравитационным полем, порожденным единичным скалярным полем. Однако прогресс ТВО и теории суперполей показывает, что гравитационное поле ранней Вселенной, скорее всего, порождается несколькими (эффективными) скалярными полями, что учитывалось в моделях мульти-компонентной инфляции и "двойного поля" [151-153]. Такой подход базируется на модели невзаимодействующих скалярных полей с

различными потенциалами самодействия и приводит к устранению ряда проблем стандартной космологической модели и проблем оригинальной модели инфляции Гуса [3,154]. Следующей ступенью на этом пути должно быть введение взаимодействия между скалярными полями, что может быть сделано по крайней мере двумя способами [155-158]. Первый - введение потенциала, зависящего от всех скалярных полей. Такой тип моделей рассматривался, например, в работах [143,159,160]. Вторым способом - киральная космологическая модель (или нелинейная сигма модель с потенциалом), где взаимодействие вводится геометрически, при помощи ограничения на значения скалярных полей [161].

Модель ССП представляет собой лишь простейший вариант эффективной теории, описывающей калибровочные и хиггсовские поля ТВО, взаимодействующие с гравитацией.

Нелинейные поля в моделях инфляции

Сценарий космологической инфляции, то есть стадии экспоненциального расширения (раздувания) Вселенной на ранних этапах её эволюции, как правило, базируется на модели самодействующего скалярного поля (ССП) ϕ , минимально взаимодействующего с гравитацией

$$S_{GSF} = \int \sqrt{-g} d^4x \left\{ \frac{R+2\Lambda}{2} + \frac{1}{2} \phi_{\nu\mu} \phi_{\mu\nu} g^{\nu\mu} - V(\phi) \right\}. \quad (2.59)$$

Предпочтение отдается теории ССП потому, что квантовая теория скалярного поля позволяет описать космологические фазовые переходы и восстановление симметрии при высоких температурах в Ранней Вселенной. Кроме того модель ССП допускает точное решение де Ситтера при постоянном потенциале самодействия $V(\phi) = V_0$, который при этом трактуется как космологическая постоянная Λ . Однако заметим, что ССП служит лишь простейшей эффективной моделью, удовлетворительно описывающей

эффекты гравитации и физики элементарных частиц на инфляционной стадии.

Строго говоря, если мы хотим быть последовательными при рассмотрении гравитационного поля на ранних этапах эволюции Вселенной, то в качестве источника гравитационного поля следует рассматривать материю (ТЭИ), которая описывается ТВО. То есть в качестве источника гравитационного поля следует рассматривать калибровочные и хиггсовские поля.

Следует заметить, что, несмотря на кажущуюся простоту модели ССП, при построении инфляционного сценария приходится ограничиваться различными приближениями при решении самосогласованной системы уравнений, соответствующей модели (2.63). Вполне вероятно, что именно отсутствие точных решений модели инфляции (2.63) приводит к некоторым противоречиям с ожидаемыми в наблюдательной астрофизике результатами [162,163]. Более того, иногда при построении инфляционного сценария приходится рассматривать области пространства-времени, для которых существует противоречие с самосогласованной системой уравнений Эйнштейна и скалярного поля. А именно, речь идет о существовании градиента скалярного поля отличного от нуля $\nabla\phi \neq 0$, что противоречит следствию уравнений Эйнштейна о том, что скалярное поле $\phi = \phi(t)$.

ЧАСТЬ 3. АНАЛИЗ КОСМОЛОГИЧЕСКОЙ ДИНАМИКИ ВО ВСЕЛЕННОЙ ФРИДМАНА

Космологические модели инфляции могут быть представлены самосогласованной системой уравнений Эйнштейна и нелинейных (скалярных, киральных, калибровочных) полей. На основе этих уравнений строится инфляционный сценарий: анализ физических предпосылок и механизмов, способствующих возникновению чрезвычайно быстрого расширения (раздувания) Вселенной. Обычно инфляционный сценарий связан с фазовыми переходами в рамках квантовой теории скалярного поля конечной температуры, спонтанным нарушением и восстановлением калибровочной симметрией, другими физическими явлениями. При этом активно используются различные приближения при анализе инфляционной модели, то есть самосогласованной системы уравнений гравитации и физических полей [15]. После ярких успехов в начале восьмидесятых годов в объяснении ключевых проблем стандартного сценария (проблема горизонта, монополей, крупномасштабной структуры), в девяностые годы возникает необходимость дать анализ используемым приближениям для согласования модели инфляции с наблюдаемыми данными по крупномасштабной структуре Вселенной. Кроме того, возникает необходимость в поисках именно точных решений модели, так как существует подозрение о наличии псевдоэффектов при анализе спектра возмущений плотности, вызванных сделанными приближениями при решении уравнений стандартной инфляционной модели: самосогласованной системы уравнений Эйнштейна и скалярного поля с потенциалом самодействия.

Несколько вариантов модификаций и обобщений моделей инфляции было предложено в работах [157-159]. Также, новый метод получения точных решений в рамках стандартной модели инфляции, базирующейся на теории самодействующего скалярного поля (ССП) был представлен в работе [141].

Первые модели космологической инфляции основывались на ССП взаимодействующим минимальным образом с гравитацией в рамках пространств Фридмана-Робертсона-Уокера (ФРУ). Причем потенциал самодействия $V(\phi)$, его форма, отражали тот физический механизм, который эффективно описывался ССП.

Для построения непротиворечивой модели космологической инфляции необходимо выполнение следующих условий:

- Стадия ускоренного расширения, которая подразумевает $-1 < w < -1/3$;
- Стадия ускоренного расширения завершается вторичным разогревом с последующим образованием фотонов, то есть переходом на стадию преобладания излучения, которой соответствует $w = 1/3$;
- Соответствие полученных параметров космологических возмущений наблюдениям.

В настоящее время, наряду с другими моделями, рассматриваются несколько типов моделей космологической инфляции, которые различаются как видом потенциала, так и начальными условиями, при которых возникает инфляционная стадия - скалярное поле может находиться в одном из минимумов своего потенциала или ускоренное расширение происходит не в минимуме, а при любых условиях, допускающих возникновение инфляции при значениях плотности энергии скалярного поля сравнимых с планковскими [8-11].

Возможны различные режимы развития стадии ускоренного расширения, также модели различаются условием окончания стадии инфляции, например, в случае медленного скатывания скалярного поля к минимуму потенциала, при котором впоследствии происходят осцилляции поля около минимума. В моделях хаотической инфляции завершение стадии ускоренного расширения происходит, когда плотность энергии скалярного

поля уменьшается достаточно для того чтобы «трение» $3H\dot{\phi}$ также уменьшалось и скалярное поле начинало осциллировать около минимума потенциала и, в дальнейшем, происходила потеря энергии за счет рождения элементарных частиц с повторным (постинфляционным) нагреванием скалярного поля и последующим установлением термодинамического равновесия [8-11].

В большинстве инфляционных моделей повторное нагревание происходит из-за осцилляций инфлатона, которые приводят к большому количеству коротких периодов образования элементарных частиц [8-11].

Рассмотрим основные классы инфляционных потенциалов, которые представлены на Рис. 2.1.

Первый класс потенциалов соответствует экспоненциальным или полиномиальным потенциалам которые, как правило, рассматриваются в контексте хаотической инфляции [8]; второй класс потенциалов также соответствует полиномиальным потенциалам, но приводит к спонтанному

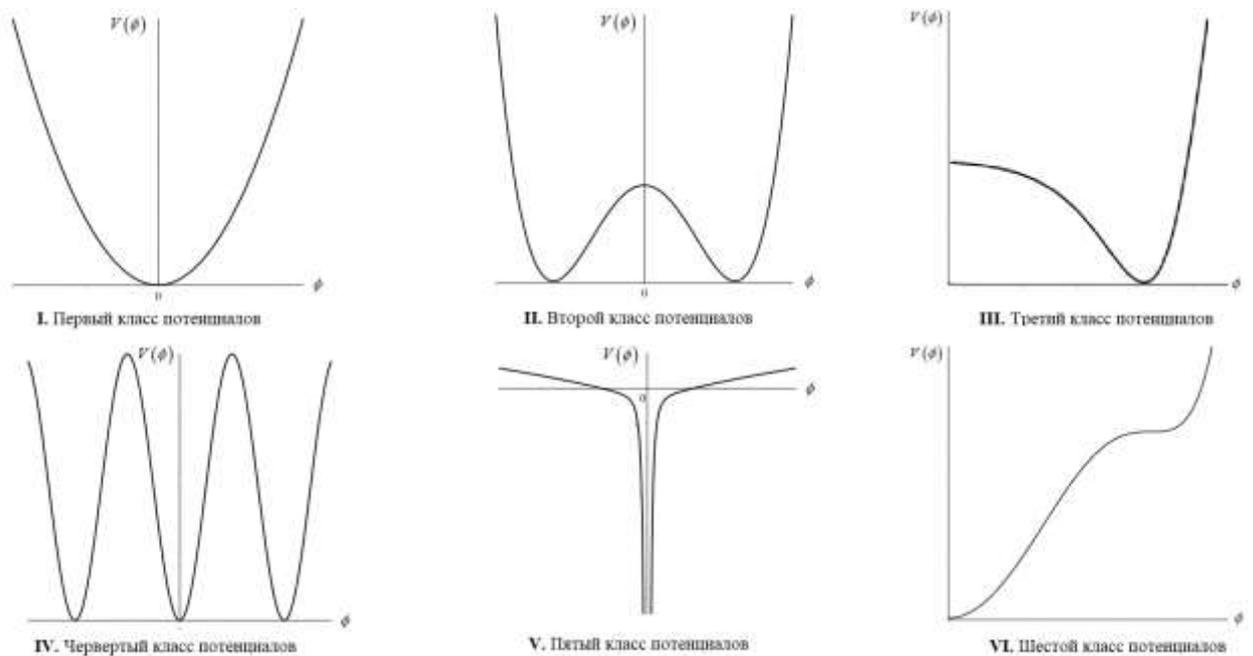


Рис. 2.1. Основные классы потенциалов скалярного поля в моделях космологической инфляции.

нарушению симметрии, например, посредством механизма Хиггса, где хиггсовский бозон является инфлатоном [8]; третий класс потенциалов также соответствует стадии инфляции, наиболее известный потенциал третьего класса рассматривался в работах Коулмана и Вайнберга, в которых учитывались радиационные поправки [164]; четвертый класс потенциалов определяется гармоническими функциями и, как правило, связан с осциллирующей динамикой, при которой стадии ускоренного расширения (инфляции) сменяются стадиями быстрого сжатия (дефляции) [165]; пятый класс соответствует потенциалам с обратной зависимостью потенциала от поля и рассматривается в контексте так называемой промежуточной инфляции [166]; для шестого класса потенциалов, который, в некоторых случаях, получается в низкоэнергетическом пределе теории суперструн и супергравитации [167,168], инфляция происходит при переходе скалярного поля из определенного состояния фальшивого вакуума в состояние истинного вакуума.

Также, рассматриваются модели с плоским потенциалом $V = const$, который соответствует стадии де Ситтера с постоянным параметром Хаббла $H = const$.

Физические механизмы, соответствующие различным инфляционным потенциалам, рассматривались в обзоре [169].

Параметры медленного скатывания

При анализе инфляционной динамики и расчете параметров космологических возмущений важное значение имеют параметры медленного скатывания, которые мы определим из уравнений динамики (1.5)-(1.6) для плоской Вселенной Фридмана, записанных в следующем виде:

$$V(\phi) = 3H^2 - 2H_\phi'^2, \quad (3.1)$$

$$\dot{\phi} = -2H'_\phi. \quad (3.2)$$

Разделив уравнение (3.1) на H^2 , мы получим первый параметр медленного скатывания ϵ

$$\frac{V}{H^2} = 3 - 2 \frac{H_\phi'^2}{H^2} = 3 - \epsilon, \quad \epsilon \equiv 2 \frac{H_\phi'^2}{H^2}, \quad (3.3)$$

$$V = H^2(3 - \epsilon). \quad (3.4)$$

Далее, продифференцируем уравнение (3.1) по ϕ

$$V'_\phi = 6H'_\phi - 4H'_\phi H''_\phi \quad (3.5)$$

и разделим на H^2

$$\frac{V'_\phi}{H^2} = 6 \frac{H'_\phi}{H} - 4 \frac{H'_\phi}{H} \frac{H''_\phi}{H}.$$

Теперь выразим, где это возможно, слагаемые справа в терминах ϵ

$$\frac{V'_\phi}{H^2} = 6\sqrt{\frac{\epsilon}{2}} - 4\sqrt{\frac{\epsilon}{2}} \left(\frac{H''_\phi}{H} \right)$$

и, из последнего слагаемого, определим второй параметр медленного скатывания δ

$$\frac{V'_\phi}{H^2} = 6\sqrt{\frac{\epsilon}{2}} - 2\sqrt{\frac{\epsilon}{2}}\delta, \quad \delta \equiv 2 \frac{H''_\phi}{H}.$$

Подставляя $\epsilon = 2H_\phi'^2/H^2$ в уравнение (3.5), получим

$$V'_\phi = 2H'_\phi H(3 - \delta). \quad (3.6)$$

Связь между параметрами ϵ и η получим, продифференцировав уравнение (3.4) и приравняв его к (3.6)

$$\delta = \epsilon + \frac{d}{d\phi}(\sqrt{2\epsilon}). \quad (3.7)$$

Третий параметр получим, продифференцировав (3.5) по полю и разделив результат на H^2 , в результате

$$\frac{V''_\phi}{H^2} = -4 \frac{H''_\phi H'_\phi}{H^2} + 6 \frac{H_\phi'^2}{H^2} + 6 \frac{H''_\phi}{H} - 4 \frac{H_\phi'^2}{H^2} = -4 \frac{H''_\phi H'_\phi}{H^2} + 3(\epsilon + \delta) - \delta^2.$$

Первое слагаемое представляет собой третий параметр

$$\frac{V''}{H^2} = -\xi + 3(\epsilon + \delta) - \delta^2, \quad \xi \equiv 4 \frac{H''H'}{H^2}. \quad (3.8)$$

Таким образом, запишем

$$V'' = H^2 [-\xi + 3(\epsilon + \delta) - \delta^2]. \quad (3.9)$$

Связь между параметрами ϵ , η и ξ получим, продифференцировав (3.6) по полю и приравняв к (3.9), в результате получим соотношение

$$\xi = \delta'_\phi \sqrt{2\epsilon + \epsilon\delta}. \quad (3.10)$$

Эту процедуру можно повторять до любого порядка, таким образом, параметры медленного скатывания определяются рекуррентным соотношением

$$\epsilon_n = 2^n \frac{(H'_\phi)^{n-1}}{H^n} \frac{d^{(n+1)}H}{d\phi^{(n+1)}}, \quad n \geq 1 \quad (3.11)$$

Запишем первые три параметра медленного скатывания

$$\epsilon \equiv 2 \frac{H'^2_\phi}{H^2} = -\frac{\dot{H}}{H^2} \quad (3.12)$$

$$\delta \equiv 2 \frac{H''_\phi}{H} = \epsilon - \frac{\dot{\epsilon}}{2H\epsilon} = -\frac{\ddot{H}}{2H\dot{H}} \quad (3.13)$$

$$\xi \equiv 4 \frac{H''H'_\phi}{H^2} = \epsilon\delta - \frac{1}{H} \dot{\delta} \quad (3.14)$$

Исходя из соотношений (3.12)-(3.14), можно рассматривать параметры медленного скатывания как функции времени или поля.

Завершение стадии инфляции определяется условием $\epsilon = 1$, последующей стадии преобладания излучения соответствует значение $\epsilon = 2$.

Также отметим, что параметры медленного скатывания связаны как с динамикой Вселенной, так и с параметрами космологических возмущений, что делает анализ моделей космологической инфляции, основанный на этих параметрах, достаточно удобным.

Приближение медленного скатывания

Одним из наиболее популярных методов анализа моделей космологических моделей ранней Вселенной является *приближение медленного скатывания*, основанное на малости параметров медленного скатывания относительно единицы на стадии инфляции. Поскольку, в данном приближении, $\epsilon \approx 0$ из определения (3.12) следует $H \approx const$, то есть стадия инфляции является *квазидеситтеровской*, что соответствует ускоренному расширению.

Кинетическая энергия $X = \dot{\phi}^2/2$ и «ускорение» изменения скалярного поля $\ddot{\phi}$, в таком случае, приближенно равны нулю и исключаются из уравнений динамики, которые записываются следующим образом

$$3H^2 \approx V(\phi), \quad (3.15)$$

$$3H\dot{\phi} \approx -V'_{\phi}(\phi). \quad (3.16)$$

На основе данного приближения, параметры медленного скатывания можно рассчитать через потенциал скалярного поля

$$\epsilon \approx \frac{1}{2} \left(\frac{V'_{\phi}}{V} \right)^2 \equiv \epsilon_V, \quad (3.17)$$

$$\eta \approx \frac{V''_{\phi}}{V} - \frac{1}{2} \left(\frac{V'_{\phi}}{V} \right)^2 \equiv \eta_V - \epsilon_V, \quad (3.18)$$

$$\xi \approx \frac{VV'''_{\phi}}{V^2} - \frac{3}{2} \frac{V''_{\phi}}{V} \left(\frac{V'_{\phi}}{V} \right)^2 + \frac{3}{4} \left(\frac{V'_{\phi}}{V} \right)^4 \equiv \xi_V - 3\eta_V \epsilon_V + 3\epsilon_V^2. \quad (3.19)$$

Отметим, что, несмотря на очевидные преимущества такого подхода к анализу космологических моделей, существует возможность достаточно больших расхождений с результатами, основанными на точных решениях уравнений динамики, метод оценки которых мы рассмотрим в дальнейшем.

С более подробным описанием методов анализа космологических моделей на основе приближения медленного скатывания можно ознакомиться в работах [11,15,170] и многих других работах.

Кинетическое приближение

Альтернативный, по отношению к приближению медленного скатывания, подход основан на приближенной линейной связи кинетической энергии скалярного поля и параметра состояния [171-173]. Из такой связи, как и в случае приближения медленного скатывания, следует квазидеситтеровское расширение, но с учетом кинетической энергии поля.

Для описания этого метода запишем уравнения динамики в следующем виде

$$3H^2 = X + V(\phi), \quad (3.20)$$

$$3H\sqrt{2X} = \frac{d}{d\phi}(X + V(\phi)), \quad (3.21)$$

$$\dot{H} = -X, \quad (3.22)$$

с учетом соотношений $\ddot{\phi} = \frac{1}{2} \frac{d\dot{\phi}^2}{d\phi}$ и $\dot{\phi} = -\sqrt{2X}$.

Рассмотрим кинетическую энергию скалярного поля X как линейную функцию параметра состояния w таким образом, чтобы при $w = -1$ выполнялось условие $X = 0$, которое соответствует ускоренному расширению, обусловленному космологической постоянной, то есть

$$X = \beta(w+1), \quad (3.23)$$

где β - положительная постоянная.

Запишем параметр состояния

$$w = \frac{X - V}{X + V}$$

Подставляя w в уравнение (3.23), с учетом уравнения (3.20), получим

$$3H^2 = X + V = 2\beta, \quad H = \text{const}. \quad (3.24)$$

Следовательно, определение кинетической энергии скалярного поля в виде $X \approx \beta(w+1)$, которое определим как *кинетическое приближение*, обеспечивает ускоренное расширение $H \approx \text{const}$ и дает возможность нахождения решений уравнений динамики скалярных полей посредством соответствующего выбора параметра состояния.

Рассмотрим параметр состояния следующего вида

$$w(t) = -1 + \frac{A}{B \exp[-\alpha(t-t_e)] + 1}, \quad A = 4/3, \quad (3.25)$$

где t_e - время завершения инфляционной стадии, которое определяется условием $w = -1/3$.

Далее, из соотношения (3.23), запишем кинетическую энергию скалярного поля

$$X(t) = \frac{A\beta}{B \exp[-\alpha(t-t_e)] + 1}.$$

Из уравнения (3.23) получим зависимость скалярного поля от времени

$$\phi(t) = \phi(t) - C = \pm \frac{2\sqrt{2A\beta}}{\alpha} \operatorname{arcth} \left(\sqrt{1 + B e^{-\alpha(t-t_e)}} \right) \quad (3.26)$$

где C - постоянная интегрирования.

Из уравнения (3.22) запишем параметр Хаббла

$$H(t) = C_1 + \frac{A\beta}{\alpha} \left(\ln B + e^{\alpha(t-t_e)} \right), \quad C_1 = H_0 - \frac{A\beta}{\alpha} \ln(B). \quad (3.27)$$

Масштабный фактор

$$a(t) = a_0 \exp \left[C_1 t - \frac{A\beta}{\alpha^2} f \left(1 + B e^{\alpha(t-t_e)} \right) \right], \quad (3.28)$$

где функция f - дилогарифм и определяется следующим образом

$$f(\zeta) = \int_1^\zeta \frac{\ln(\zeta)}{1-\zeta} d\zeta \quad (3.29)$$

Запишем параметр Хаббла как функцию скалярного поля

$$H(\varphi) = H_0 + \frac{A\beta}{\alpha} \ln \left[\cosh^2 \left(\frac{\alpha\varphi}{2\sqrt{2A\beta}} \right) + 1 \right]. \quad (3.30)$$

Из уравнения (3.21) получим потенциал

$$V(\varphi) = 3 \left(H_0 + \frac{A\beta}{\alpha} \ln \left[\cosh^2 \left(\frac{\alpha\varphi}{2\sqrt{2A\beta}} \right) + 1 \right] \right)^2 + \frac{\frac{A\beta}{4\alpha^2} \sinh^2 \left(\frac{\alpha\varphi}{\sqrt{2A\beta}} \right)}{\left[\cosh^2 \left(\frac{\alpha\varphi}{2\sqrt{2A\beta}} \right) + 1 \right]^2}. \quad (3.31)$$

Также запишем кинетическую энергию как функцию скалярного поля

$$X(\varphi) = \frac{A\beta}{\tanh^2 \left(\frac{\alpha\varphi}{2\sqrt{2A\beta}} \right)}. \quad (3.32)$$

Для определения поведения потенциала и скалярного поля после завершения инфляционной стадии рассмотрим следующие условия: $\phi_0 - \phi \ll 1$ или $\varphi \ll 1$.

В результате, получим

$$V(\varphi) = V_1 \varphi^4 + V_2 \varphi^2 + V_0 + \mathcal{O}(\varphi^6),$$

где

$$V_0 = \frac{3[H_0 - A\beta \ln(2)]^2}{\alpha^2},$$

$$V_1 = \frac{1}{\alpha^2} \left(\frac{3H_0 + 3A\beta \ln(2)}{768A\beta} - \frac{1}{768A\beta} + \frac{3}{256} \right),$$

$$V_2 = \frac{3}{8\alpha^2} \left(H_0 + A\beta \ln(2) - \frac{1}{4} \right).$$

Задавая различные значения постоянных β , α и H_0 , получим следующие типы потенциалов с учетом V_0 :

- При $V_1 = 0$ получим потенциал $V(\varphi) = V_2\varphi^2 + V_0 + \mathcal{O}(\varphi^6)$ класса I,
- При $V_2 = 0$ потенциал $V(\varphi) = V_1\varphi^4 + V_0 + \mathcal{O}(\varphi^6)$ также класса I,
- При $V_1 > 0, V_2 < 0$ получим потенциал Хиггса $V(\varphi) = V_1\varphi^4 - V_2\varphi^2 + V_0 + \mathcal{O}(\varphi^6)$,

соответствующий классу II в принятой нами классификации.

Покажем, что поведение скалярного поля (3.27) при условии $\phi_0 - \phi \ll 1$ соответствует полученным потенциалам.

Для этого разложим (3.27) в ряд по малому параметру $e^{-\alpha(t-t_e)}$, в результате, для положительного знака, получаем

$$\phi - C \approx \frac{\sqrt{2A\beta}}{2\pi\alpha} + \frac{\sqrt{2A\beta}}{2\pi\alpha} e^{-\alpha(t-t_e)}.$$

Определяя $C = -\frac{\sqrt{2A\beta}}{\pi\alpha} + \phi_0$, где $\phi_0 = \frac{\sqrt{2A\beta}}{2\pi\alpha}$, запишем

$$\phi \approx \phi_0 e^{-\alpha(t-t_e)},$$

что соответствует динамике скалярного поля для потенциалов $V(\phi) = V_0\phi^4$ и $V(\phi) = V_1\phi^4 - V_2\phi^2 + V_0$ с различными значениями ϕ_0 и α . В первом случае вторичный разогрев происходит за счет осцилляций скалярного поля около минимума потенциала и реализуется сценарий хаотической инфляции.

Второй случай подразумевает фазовый переход из одного локального минимума в другой с повышением плотности энергии и спонтанным нарушением симметрии.

Для малого параметра $(t-t_e)$, раскладывая (3.27) в ряд, в случае положительного знака, получим

$$\phi \approx C + \frac{4\sqrt{A\beta}}{\alpha} - \sqrt{A\beta}(t-t_e),$$

$$\phi \approx \phi_0 - \sqrt{A\beta}(t-t_e), \quad \phi_0 = C + \frac{4\sqrt{A\beta}}{\alpha}.$$

Скалярное поле ϕ , в данном случае, соответствует потенциалу $V(\phi) = V_0\phi^2$.

Теперь рассмотрим модель космологической инфляции, которую зададим, определяя параметр состояния как функцию параметра Хаббла в уравнении (3.20)

$$V = 3H^2 - \beta[w(H)+1]$$

Для параметра состояния $w(H) = -1 - \frac{2A^2}{\beta}H^2 + 2A^2\lambda^2$ получим решения уравнений (3.20) - (3.22) в следующем виде

$$\phi(t) = A \ln[\text{th}(\lambda t)],$$

$$H(t) = A^2 \lambda \coth(2\lambda t),$$

$$a(t) = a_0 [\sinh(2\lambda t)]^{A^2/2},$$

$$V(\phi) = A^2 \lambda^2 \left[(3A^2 - 2) \cosh^2\left(\frac{\phi}{A}\right) + 2 \right].$$

Параметр состояния, отличный от $w(t) = -1 - 2\dot{H}/3H^2$, запишем следующим образом

$$w(t) = -1 - \frac{2A^6 \lambda^2}{\beta} \coth^2(2\lambda t) + 2A^2 \lambda^2.$$

Естественный выход из инфляции, вторичный разогрев и дальнейший корректный переход к стадии преобладания излучения ($w = 1/3$) происходит при выборе параметра модели $\lambda = \sqrt{2\beta/3A(\beta - A^4)}$, где $\beta > A^4$.

Точные решения уравнений космологической динамики

Несмотря на эффективность приближения медленного скатывания при рассмотрении моделей космологической инфляции важную роль играют точные решения уравнений космологической динамики, а также, вычисленные на их основе, точные значения параметров космологических возмущений, которые сопоставляются с наблюдательными данными. Также точные решения являются критерием проверки моделей и основой оценки погрешности приближенных методов решения.

Методы точных решений уравнений космологической динамики (1.5)-(1.6) можно разделить на несколько групп:

- Выбор одного из параметров в уравнениях (1.5)-(1.6) и восстановление по ним потенциала и остальных параметров модели;
- Приведение уравнений (1.5)-(1.6) к известным, с разработанными методами их решения;
- Метод генерирующих функций, приводящий к упрощению уравнений динамики;
- Использование симметрий, законов сохранения и форм-инвариантных преобразований.

В рамках первого метода, в работах [143,165,166,174-176] задавались зависимости масштабного фактора $a = a(t)$ или скалярного поля $\phi = \phi(t)$ от

времени и, на основе этих зависимостей, записывались точные решения уравнений (1.5)-(1.6).

В контексте второго метода, уравнения (1.5)-(1.6) приводились к одномерному стационарному уравнению Шредингера [177], уравнениям Риккати [178], Абеля [179], Ермакова [180] и другим уравнениям.

Третий подход включает большое число генерирующих функций, которые выбирают как функцию одного из параметров модели (или их комбинации) [181-184]; среди них отметим суперпотенциал $W(\phi) = V(\phi) + \dot{\phi}^2/2$, представляющий собой плотность полной энергии скалярного поля [184]. Также, в работе [185], в качестве генерирующей функции рассматривалось тензорно-скалярное отношение.

В работе Иванова [141] и, впоследствии, Салопека-Бонда [186] был предложен метод приведения (1.5)-(1.6) к уравнениям (3.1)-(3.2), в которых параметр Хаббла H рассматривается как функция скалярного поля ϕ и точные решения получаются посредством выбора $H = H(\phi)$. Этот метод соответствует первым трем группам методов точных решений. Следует отметить, что в литературе уравнения (3.1)-(3.2) получили названия уравнения *типа Гамильтона-Якоби*.

В рамках четвертого подхода для получения точных решений используется симметрия Нётер для экспоненциальных потенциалов [187], закон сохранения Хожмана [188] и другие нелокальные законы сохранения для произвольных потенциалов [189], а также форм-инвариантные преобразования уравнений (1.5)-(1.6) [190].

Отметим, что в случае точных решений, в отличие от приближения медленного скатывания или кинетического приближения, требуется обоснование наличия стадии ускоренного расширения, исходя из вида масштабного фактора или параметра состояния.

Точные решения на основе выбора параметра Хаббла

Рассмотрим точные решения уравнений динамики на основе выбора параметра Хаббла как функции времени, то есть путем априорного задания динамики Вселенной, соответствующей стадии ускоренного расширения.

Для этого запишем уравнения космологической динамики на стадии инфляции в следующем виде

$$V(\phi) = 3H^2 + \dot{H}, \quad (3.33)$$

$$\dot{\phi}^2 = -2\dot{H}. \quad (3.34)$$

Точные решения этой системы уравнений можно получить задавая параметр Хаббла $H = H(t)$ или масштабный фактор, исходя из соотношения $H \equiv \dot{a}/a$. После решения уравнения (3.34) и получения эволюции скалярного поля в явном виде $\phi = \phi(t)$, подставляя обратную зависимость $t = t(\phi)$ в уравнение (3.33) мы получаем потенциал скалярного поля в виде $V = V(\phi)$.

Некоторые известные точные решения уравнений динамики (3.33)-(3.34) на основе различных методов, которые, однако, можно рассматривать в рамках предложенного подхода, приведены в таблице 3.1 [140-142,174-184].

В таблице 3.2 приведены параметры моделей с явной зависимостью космического времени от числа е-фолдов $t = t(N)$. В таблице 3.3 представлены параметры для моделей без явной зависимости $t = t(N)$.

Параметр Хаббла	Эволюция скалярного поля	Потенциал скалярного поля
$H(t) = -\frac{2}{3}Bt$	$\phi(t) = 2\sqrt{\frac{B}{3}}t$	$V(\phi) = B\phi^2 - \frac{2}{3}B$
$H(t) = B\exp(-At)$	$\phi(t) = \sqrt{\frac{8B}{A}} \exp\left(-\frac{A}{2}t\right)$	$V(\phi) = \frac{A}{8}\phi^2 \left(\frac{3A}{8}\phi^2 - A\right)$

$H(t) = -\frac{AB}{3} \tan(At)$	$\phi(t) = \sqrt{\frac{2B}{3}} \ln \sqrt{\frac{1+\sin(At)}{1-\sin(At)}}$	$V(\phi) = \frac{A^2}{3} B(B-1) \cosh^2 \left(\sqrt{\frac{3}{2B}} \phi \right) - \frac{A^2 B^2}{3}$
$H(t) = \frac{AB}{3} \tanh(At)$	$\phi(t) = \sqrt{-\frac{2B}{3}} \arcsin(\tanh(At))$	$V(\phi) = \frac{1}{3} A^2 B \left(B \sin^2 \left(\sqrt{-\frac{3}{2B}} \phi \right) + \cos^2 \left(\sqrt{-\frac{3}{2B}} \phi \right) \right)$
$H(t) = \frac{B}{3t} - \frac{A}{3B}$	$\phi(t) = \sqrt{\frac{2B}{3}} \ln(t)$	$V(\phi) = \frac{B(B-1)}{3} \left[e^{-2\sqrt{\frac{3}{2B}}\phi} - \frac{2A}{B(B-1)} e^{-\sqrt{\frac{3}{2B}}\phi} \right] + \frac{A^2}{3B^2}$
$H(t) = A \left[\frac{(B+4)}{6AB} t \right]^{\frac{B}{B+4}}$	$\phi(t) = \left[\frac{(B+4)}{6AB} t \right]^{\frac{2}{B+4}}$	$V(\phi) = 3A^2 \phi^{-B} \left(1 - \frac{B^2}{6} \phi^{-2} \right)$
$H(t) = A^2 B \coth(2Bt)$	$\phi(t) = A \ln(\tanh(Bt))$	$V(\phi) = A^2 B^2 \left[(3A^2 - 2) \cosh^2 \left(\frac{\phi}{A} \right) + 2 \right]$
$H(t) = \frac{A^2 B}{6} \coth^3(Bt)$	$\phi(t) = \frac{A}{\sinh(Bt)}$	$V(\phi) = \frac{B^2}{12A^2} \phi^2 (\phi^2 + A) \left(\frac{\phi^4}{A^2} + 2\phi^2 + A^2 - 6 \right)$
$H(t) = C \ln(At + B)$	$\phi(t) = \sqrt{-\frac{8C}{A}} (At + B)$	$V(\phi) = 3C^2 \ln^2 \left(-\frac{A}{8C} \phi^2 \right) - \frac{8C^2}{\phi^2}$
$H(t) = C \arctan(At + B)$	$\phi(t) = \sqrt{-\frac{2C}{A}} \arcsin(At + B)$	$V(\phi) = 3C^2 \arctan^2 \left[\sinh \left(\sqrt{-\frac{A}{2C}} \phi \right) \right] + \frac{AC}{\cosh^2 \left(\sqrt{-\frac{A}{2C}} \phi \right)}$

Таблица 3.1. В таблице представлены точные решения уравнений динамики (3.33)-(3.34) для некоторых моделей космологической инфляции. Константы A , B и C принимают произвольные значения, исходя из условия ускоренного расширения. Скалярное поле и время в решениях записаны с точностью до константы, именно, $\phi \rightarrow \phi - \phi_0$ и $t \rightarrow t - t_0$, где t_0 - время начала инфляции, соответственно, $\phi_0 = \phi(t = t_0)$.

Параметр Хаббла и масштабный фактор	Параметры медленного скатывания ϵ и δ	Прямая и обратная зависимости числа е-фолдов $N = \ln(a/a_0)$ от времени
$H(t) = -\frac{2}{3}Bt,$ $a(t) = a_0 \exp\left(-\frac{B}{3}t^2 + C_1\right)$ <p>C_1 - постоянная интегрирования</p>	$\epsilon = \frac{3}{2Bt^2},$ $\delta = 0$	$N(t) = -\frac{B}{3}t^2 + C_1$ $t^2 = \frac{3}{B}(C_1 - N)$
$H(t) = B \exp(-At)$ $a(t) = a_0 \exp\left(-\frac{B}{A}e^{-At} + \frac{C_1}{A}\right)$	$\epsilon = \frac{A}{B} \exp(At)$ $\delta = \frac{A}{2B} \exp(At)$	$N(t) = -\frac{B}{A} \exp(-At) + \frac{C_1}{A}$ $\exp(At) = \frac{B}{C_1 - AN}$
$H(t) = -\frac{AB}{3} \tan(At)$ $a(t) = a_0 \cos^{B/3}(At)$	$\epsilon = \frac{3}{B \sin^2(At)}$ $\delta = 3/B$	$N(t) = \frac{B}{3} \ln(\cos(At))$ $\cos(At) = \exp\left(\frac{3N}{B}\right)$
$H(t) = \frac{AB}{3} \tanh(At)$ $a(t) = a_0 \cosh^{B/3}(At)$	$\epsilon = \frac{3}{B \sinh^2(At)}$ $\delta = 3/B$	$N(t) = \frac{B}{3} \ln(\cosh(At))$ $\cosh(At) = \exp\left(\frac{3N}{B}\right)$
$H(t) = \frac{B}{3t} - \frac{A}{3B}$ $a(t) = a_0 t^{B/3} \exp\left(-\frac{A}{3B}t\right)$	$\epsilon = \frac{3B^3}{(At + B^2)^2}$ $\delta = \frac{3B}{B^2 - At}$	$N(t) = \frac{1}{3}B \ln(t) - \frac{A}{3B}t$ $t = \exp\left[\frac{1}{B}\left(3N - \hat{W}\left(-\frac{A}{B^2}e^{\frac{3N}{B}}\right)\right)\right]$ <p>\hat{W} - функция Ламберта</p>

$H(t) = A \left[\frac{(B+4)}{6AB} t \right]^{\frac{B}{B+4}}$ $a(t) = a_0 \exp \left(\frac{A(B+4)t}{4} \left[\frac{(B+4)}{6AB} t \right]^{\frac{B}{B+4}} \right)$	$\epsilon = \frac{B \left[\frac{(B+4)}{6AB} t \right]^{\frac{B}{B+4}}}{A(B+4)t}$ $\delta = \frac{(B+2) \left[\frac{(B+4)}{6AB} t \right]^{\frac{B}{B+4}}}{A(B+4)t}$	$N(t) = \frac{A(B+4)t}{4} \left[\frac{(B+4)}{6AB} t \right]^{\frac{B}{B+4}}$ $t = \frac{4N}{A(B+4)} \left(\frac{2N}{3BA^2} \right)^{B/4}$
$H(t) = A^2 B \coth(2Bt)$ $a(t) = a_0 \sinh^{A^2/2}(2At)$	$\epsilon = \frac{2}{A \cosh^2(2Bt)}$ $\delta = 2/A^2$	$N(t) = \frac{A^2}{2} \ln(\sinh(2At))$ $\sinh(2At) = \exp\left(\frac{2N}{A^2}\right)$
$H(t) = C \ln(At), \quad B=0$ $a(t) = a_0 (At)^{Ct} \exp(-Ct)$	$\epsilon = -\frac{1}{2Ct \ln^2(At)}$ $\delta = \frac{1}{2Ct \ln(At)}$	$N(t) = Ct [\ln(At) - 1]$ $t = \frac{N}{C \hat{W}\left(\frac{AN}{eC}\right)}$

Таблица 3.2. В таблице приведены параметры космологических моделей, в которых возможно найти обратную функцию $t = t(N)$. Знаки параметров медленного скатывания в некоторых случаях зависят от выбора свободных параметров моделей.

Параметр Хаббла и масштабный фактор	Параметры медленного скатывания ϵ и δ	Зависимость числа е-фолдов $N = \ln(a/a_0)$ от времени
$H(t) = \frac{A^2 B}{6} \coth^3(Bt)$ $a(t) = a_0 \sinh^{A^2/2}(2At) \exp\left(-\frac{A^2}{12} \coth(Bt)\right)$	$\epsilon = \frac{18(\cosh^2(Bt) - 1)}{A^2 \cosh^4(Bt)}$ $\delta = \frac{6(\cosh^4(Bt) - 1)}{A^2 \cosh^4(Bt)}$	$N(t) = \frac{C}{A} [(At+B) \ln(At+B) - (At+B)]$
$H(t) = C \arctan(At+B)$	$\epsilon = -\frac{A}{C [(At+B)^2 + 1] \arctan^2(At+B)}$	$N(t) = \left(Ct + \frac{CB}{A} \right) \arctan(At+B) - \frac{C}{2A} \ln[(At+B)^2 + 1]$

$a(t) = a_0 \frac{\exp\left[\frac{(Ct + BC/A) \arctan(At + B) + C_1}{1 + (At + B)^2}\right]}{[1 + (At + B)^2]^{C/2A}}$	$\delta = \frac{A(At + B)}{C[(At + B)^2 + 1] \arctan(At + B)}$	
--	--	--

Таблица 3.3. В таблице приведены параметры моделей без явной зависимости $t = t(N)$.

Теперь получим новые точные решения уравнений динамики для следующего параметра Хаббла

$$H(t) = \frac{A \exp(2B(t - \alpha))}{(2\beta \exp(B(t - \alpha)) - C)^2}, \quad (3.35)$$

для которого получим точные решения уравнений (3.33)-(3.34)

$$\phi(t) = \frac{2}{\beta} \sqrt{\frac{AC}{B}} (2\beta e^{B(t-\alpha)} - C)^{-1/2}, \quad (3.36)$$

$$V(\phi) = \frac{1}{(8A)^4} (B\phi^2 + 4A)^2 [3B\phi^4 + B(24A - 32B)\phi^2 + 48A^2], \quad (3.37)$$

$$a(t) = C_1 \exp\left(-\frac{AC}{4B\beta^2(2\beta e^{B(t-\alpha)} - C)}\right) (2\beta e^{B(t-\alpha)} - C)^{\frac{A}{4B\beta^2}}, \quad (3.38)$$

$$\epsilon = \frac{2BC}{A} (2\beta e^{B(t-\alpha)} - C) e^{-2B(t-\alpha)}, \quad (3.39)$$

где A, B, C, β, α - постоянные свободные параметры модели и C_1 - константа интегрирования, константу интегрирования при расчете зависимости скалярного поля от времени мы приравняли к нулю.

Для случая $B = 0$ получим постоянный (плоский) потенциал $V = 3/16$ и расширение де Ситтера $H = const$. Если записать параметры $A = 1$ и $B = (n/3)A$, то для $0 < n < 4$ получим потенциал класса I, для $n = 4$ потенциал класса VI, для $n > 4$ получим нефизические потенциалы (не соответствующие механизму

инфляции и появлению элементарных частиц) в области $-1 \leq \phi \leq 1$, то есть, порядка массы Планка, в которой мы рассматриваем стадию инфляции.

Теперь рассмотрим параметр Хаббла как функцию скалярного поля

$$H(\phi) = A \ln[\cosh(C\phi)] + B.$$

Из уравнений (3.1)-(3.2) получим потенциал скалярного поля

$$V(\phi) = 3[A \ln(\cosh(C\phi)) + B]^2 - 2A^2C^2 \tanh^2(C\phi), \quad (3.40)$$

также остальные параметры модели

$$\phi(t) = \frac{1}{C} \arcsin\left\{\exp\left(-2AC^2(t+c_1)\right)\right\},$$

$$H(t) = \frac{A}{2} \ln\left\{1 + \exp\left[-4AC^2(t+c_1)\right]\right\} + B,$$

$$a(t) = c_2 \exp\left(\frac{1}{8C^2} \left\{8BC^2t + f\left[1 + \exp\left(-4AC^2(t+c_1)\right)\right]\right\}\right),$$

$$\epsilon = \frac{2A^2C^2 e^{-4AC^2(t+c_1)}}{\left(1 + e^{-4AC^2(t+c_1)}\right) \left(\frac{1}{2} A \ln\left(1 + e^{-4AC^2(t+c_1)}\right) + B\right)^2},$$

где функция f определяется из условия (3.29), c_1 и c_2 - постоянные интегрирования.

Для малого поля $\phi \ll 1$ получим

$$V(\phi) = \left(-\frac{1}{2}ABC^4 + \frac{3}{4}A^2C^4 + \frac{4}{3}A^2C^6\right)\phi^4 + (-2A^2C^4 + 3ABC^2)\phi^2 + 3B^2 + \mathcal{O}(\phi^6),$$

таким образом, в зависимости от выбора постоянных, потенциал (3.40) принадлежит классу I, II или является плоским, то есть $V = const$.

Генерирование новых точных решений из известных

Для генерирования новых точных решений из известных рассмотрим преобразования $(H, V, \phi) \rightarrow (\bar{H}, \bar{V}, \bar{\phi})$, то есть преобразования, определяющие переход от исходных точных решений к новым.

Теперь рассмотрим следующее преобразование параметра Хаббла [191,192]

$$\bar{H} = f(t)H, \quad (3.41)$$

где $f = f(t)$ - произвольная функция.

Отсюда получим выражения для нового потенциала \bar{V} и нового скалярного поля $\bar{\phi}$

$$\bar{V}(t) = 3f^2H^2 + \frac{d}{dt}(fH), \quad (3.42)$$

$$\frac{1}{2}\dot{\bar{\phi}}^2 = -\frac{d}{dt}(fH) = -f\dot{H} - \dot{f}H. \quad (3.43)$$

Используя уравнение (3.34), запишем уравнение (3.43) в следующем виде

$$\frac{1}{2}\dot{\bar{\phi}}^2 = -f\dot{H} - \dot{f}H = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2H + \frac{1}{2}\dot{\phi}^2\dot{f}\frac{H}{\dot{H}} = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2\left(f + \dot{f}\frac{H}{\dot{H}}\right). \quad (3.44)$$

Таким образом, получим

$$\dot{\bar{\phi}}^2 = \dot{\phi}^2\left(f + \dot{f}\frac{H}{\dot{H}}\right). \quad (3.45)$$

Процедура генерации новых решений на основе известных $H = H(t)$ и $\phi = \phi(t)$ выглядит следующим образом: после задания функции $f = f(t)$ и, из уравнения (3.43), определяем $\bar{\phi} = \bar{\phi}(t)$. Далее, подставляем $H = H(t)$ и $f = f(t)$ в уравнение (3.42). Финальным шагом является замена $t = t(\bar{\phi})$ в уравнении (3.42).

Простое преобразование поля ϕ в φ можно определить следующим образом

$$\dot{\varphi}^2 = n\dot{\phi}^2, \quad n = \text{const}. \quad (3.46)$$

Теперь определим вид функции $f = f(t)$, исходя из условия (3.46),

$$f(t) + \dot{f}(t) \frac{H}{\dot{H}} = f(H) + f'_H H = n.$$

Решая это уравнение, получим функцию, определяющую преобразование (3.41), в следующей форме

$$f(t) = f(H(t)) = n + \frac{\lambda}{H(t)}, \quad (3.47)$$

где λ - постоянная интегрирования.

Из уравнений (3.41), (3.42) и (3.46) получим

$$\bar{H} = nH + \lambda, \quad (3.48)$$

$$\bar{a}(t) = Ca^n(t)e^{\lambda t}, \quad C = \bar{a}_0 / a_0^n, \quad (3.49)$$

$$\bar{V}(t) = 3n^2 H^2 + 6\lambda n H + n\dot{H} + 3\lambda^2, \quad (3.50)$$

$$\varphi = \sqrt{n}\phi. \quad (3.51)$$

Также, преобразование (3.51) соответствует переходу между каноническим и фантомным полями. В случае если исходное скалярное поле ϕ каноническое, для канонического скалярного поля φ константа $n > 0$, для фантомного поля $n < 0$, если мы рассматриваем исходные решения для фантомного поля ϕ , то каноническому полю φ соответствует случай $n < 0$, а фантомному $n > 0$.

Теперь рассмотрим степенную инфляцию с параметром Хаббла $H(t) = (At + B)^{-1}$ как исходную модель.

Из уравнений (3.33) - (3.34) получим

$$V(t) = (3 - A) \exp(At + B)^{-2}, \quad (3.52)$$

$$\phi(t) = \pm \sqrt{\frac{2}{A}} \ln(At + B) + \phi_0, \quad (3.53)$$

$$V(\phi) = (3 - A) \exp(\pm \sqrt{2A}\phi), \quad (3.54)$$

$$a(t) = a_0 (At + B)^{1/A}. \quad (3.55)$$

Используя преобразование, заданное функцией (3.47), из уравнений (3.48) - (3.51) получим

$$\varphi(t) = \pm \sqrt{\frac{2n}{A}} \ln(At + B) + \varphi_0,$$

$$\bar{V}(\varphi) = n(3n - A) \exp \left[\mp \sqrt{\frac{2A}{n}} (\varphi - \varphi_0) \right] + 6n\lambda \exp \left[\mp \sqrt{\frac{A}{2n}} (\varphi - \varphi_0) \right] + 3\lambda^2,$$

$$\bar{a}(t) = \bar{a}_0 \exp(\lambda t) (At + B)^{n/A},$$

что соответствует экспоненциально-степенной инфляции.

Для метода Иванова-Салопека-Бонда с уравнениями динамики (3.1)- (3.2) запишем преобразования (3.48)-(3.51) в следующем виде

$$\varphi = \sqrt{n}\phi, \quad (3.56)$$

$$\bar{V}(\phi) = 3n^2 H^2 + 6\lambda n H - n H_\phi'^2 + 3\lambda^2, \quad (3.57)$$

$$\bar{V}(\varphi) = \bar{V}(\phi(\varphi)). \quad (3.58)$$

Рассмотрим следующий параметр Хаббла для канонических скалярных полей

$$H(\phi) = (A\phi + B)^m, \quad m \neq 2, \quad (3.59)$$

где A и B - произвольные константы, m - целое число.

Из уравнений (3.1)-(3.2) получим точные решения

$$V(\phi) = 3(A\phi + B)^{2m} - 2m^2 A^2 (A\phi + B)^{2m-2}, \quad (3.60)$$

$$\phi(t) = Am \left[K(C_1 + t)\Theta(t) - \frac{B}{A^2 m} \right], \quad (3.61)$$

$$a(t) = a_0 \exp \left\{ -\frac{1}{2} (C_1 + t)(m-2) [Km\Theta(t)(C_1 + t)]^m \right\}, \quad (3.62)$$

где

$$\Theta(t) = A^2 \left[A^2 m(m-2)(C_1 + t) \right]^{\frac{m-1}{2-m}},$$

$$K = m 2^{\frac{1}{2-m}} - 2^{\frac{m-3}{2-m}}, C_1 = -t_0, \phi_0 = -B/A.$$

Исходя из вида масштабного фактора $a(t)$, можно заключить, что для моделей инфляции, которые задаются параметром Хаббла (3.59), ускоренное расширение Вселенной происходит для следующих значений: $m < 0$, $m = 0$ и $m = 1$.

Для случая $m = 2$ или $H(\phi) = (A\phi + B)^2$ получим

$$V(\phi) = 3(A\phi + B)^4 - 8A^2 (A\phi + B)^2,$$

$$\phi(t) = -\frac{B}{A} + C_2 e^{-4A^2 t},$$

$$H(t) = C_2^2 A^2 e^{-8A^2 t},$$

$$a(t) = a_0 \exp \left(-\frac{C_2^2}{8} e^{-8A^2 t} \right).$$

Для ускоренного расширения необходимо выполнение условий $C_2^2 < 0$ и $A^2 < 0$, то есть поле ϕ , в данном случае, фантомное.

Для получения точных решений для моделей с фантомными полями ϕ на основе параметра Хаббла (3.59), функцию f задаем в виде $f = -n$, $\lambda = 0$ и используем преобразования (3.56)-(3.58). В этом случае, ускоренное расширение происходит для произвольного значения m .

Другим методом точных решений уравнений (3.33) - (3.34) является использование генерирующей функции - суперпотенциала $W = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V = 3H^2$, который имеет смысл плотности полной энергии ρ скалярного поля.

Уравнения (3.33) - (3.34), в таком случае, принимают вид аналогичный приближению медленного скатывания (3.15)-(3.16)

$$3H^2 = W, \quad (3.63)$$

$$3H\dot{\phi}^2 = -\dot{W}. \quad (3.64)$$

откуда мы получим

$$\dot{\phi}^2 = -\frac{\dot{W}}{\sqrt{3W}}, \quad \dot{\phi} = -\frac{W'_\phi}{\sqrt{3W}}, \quad (3.65)$$

$$V(t) = W + \frac{\dot{W}}{2\sqrt{3W}}, \quad V(\phi) = W - \frac{W'^2_\phi}{6W}, \quad (3.66)$$

Уравнения (3.42)-(3.45) в терминах суперпотенциала записываются следующим образом

$$\bar{W} = f^2 W, \quad (3.67)$$

$$\bar{V}(t) = f^2 W + \frac{\sqrt{3}}{6} \left(2\sqrt{W} \dot{f} + f \frac{\dot{W}}{\sqrt{W}} \right) = \bar{W} + \frac{\dot{\bar{W}}}{2\sqrt{3\bar{W}}}, \quad (3.68)$$

$$\dot{\phi}^2 = \dot{\phi}^2 \left(f + 2f \frac{W}{\dot{W}} \right). \quad (3.69)$$

На основе (3.63)-(3.69) запишем следующие преобразования

$$H = \bar{H} \sqrt{\frac{\dot{W}}{W}}, \quad (3.70)$$

$$\dot{\phi}^2 = \bar{\phi}^2 \sqrt{\frac{\dot{W}}{W}} \left(\frac{\dot{W}}{W} \right). \quad (3.71)$$

Применяя преобразования (3.70)-(3.71) к уравнениям (3.63)-(3.64), получим

$$3\bar{H}^2 = \bar{W},$$

$$3\bar{H}\dot{\bar{\phi}}^2 = -\dot{\bar{W}},$$

Таким образом, выражения (3.70)-(3.71), полученные из (3.41), являются форм-инвариантными преобразованиями, которые рассматривались в работах [190, 193] в терминах плотности полной энергии скалярного поля.

Теперь рассмотрим преобразование на основе функции, отличной от (3.47), для степенной инфляции с суперпотенциалом

$$W(t) = 3(At + B)^{-2}, \quad (3.72)$$

Рассматривая функцию $f(t) = -C \ln(At + B)(At + B)$, из уравнений (34)-(36), получим точные решения для новой модели инфляции

$$\bar{W}(t) = 3C^2 \ln^2(At + B), \quad (3.73)$$

$$H(t) = C \ln(At + B), \quad (3.74)$$

$$\phi(t) = \pm \sqrt{\frac{8C(At + B)}{A}} - C_1, \quad (3.75)$$

$$\bar{V}(\phi) = 3C^2 \ln^2 \left(\frac{A}{8C} (\phi + C_1)^2 \right) - \frac{8C^2}{(\phi + C_1)^2}, \quad (3.76)$$

$$\bar{a}(t) = \bar{a}_0 \exp \left(Ct + \frac{BC}{A} \right) (At + B)^{(-Ct - BC/A)}, \quad (3.77)$$

где C_1 - постоянная интегрирования, потенциал (3.76) соответствует классу V.

Таким образом, преобразование (3.41) можно использовать для классификации точных решений уравнений динамики по виду функции f .

Сопоставление точных и приближенных решений

Точные и приближенные решения (в приближении медленного скатывания) будем сопоставлять для двух различных случаев:

- Случай одинаковой динамики и различных потенциалов для точных и приближенных решений;
- Случай одинаковых потенциалов и различной динамики для точных и приближенных решений.

Одинаковая динамика и различные потенциалы

Сопоставление точных и приближенных решений для одинаковой фоновой динамики (одинакового параметра Хаббла) будем по разности числа е-фолдов на основе метода суперпотенциала.

Запишем уравнения динамики скалярного поля для точных и приближенных решений

$$3H^2 = W, \quad 3H_{sr}^2 = V_{sr}, \quad (3.78)$$

$$\dot{\phi} = -\frac{W'_\phi}{\sqrt{3W}}, \quad \dot{\phi}_{sr} = -\frac{(V'_{\phi})_{sr}}{\sqrt{3V_{sr}}}, \quad (3.79)$$

где H - точное выражение параметра Хаббла, H_{sr} - приближенное выражение параметра Хаббла и V_{sr} - потенциал, в приближении медленного скатывания.

Для случая одинаковой фоновой динамики $H=H_{sr}$ из соотношений (3.78)-(3.79) получим $W = V_{sr}$ и $\phi = \phi_{sr}$, также, из уравнений (3.66) $V \neq V_{sr}$, таким образом, запишем

$$W = V_{sr}, \quad \phi = \phi_{sr}, \quad (3.80)$$

$$V = 3H_{sr}^2 - 2\left(H'_{\phi}\right)_{sr} = V_{sr} - \frac{\left(V'_{\phi}\right)_{sr}}{6V_{sr}}, \quad (3.81)$$

Отметим, что на основе уравнений (3.80) и (3.81) можно получать точные решения из приближенных.

Теперь запишем число е-фолдов, которое определяется следующим образом

$$N = \int_{t_0}^{t_e} H dt = \int_{\phi_0}^{\phi} \frac{d\phi}{\sqrt{2\epsilon_H}} \approx \int_{\phi_0}^{\phi} \frac{d\phi}{\sqrt{2\epsilon_V}} \approx 60, \quad (3.82)$$

где t_0 и t_e - время начала и завершения инфляционной стадии, ϕ_0 и ϕ_e - поле вначале и в конце инфляции.

Посредством параметра медленного скатывания, определенного через параметр Хаббла или суперпотенциал

$$\epsilon = 2\left(\frac{H'_{\phi}}{H}\right)^2 = \epsilon_W = \frac{1}{2}\left(\frac{W'_{\phi}}{W}\right)^2,$$

рассчитывается точное число е-фолдов на завершении стадии инфляции.

В случае параметра медленного скатывания, определенного через потенциал, из приближения медленного скатывания

$$\epsilon_V = \frac{1}{2}\left(\frac{V'_{\phi}}{V}\right)^2$$

рассчитывается приближенное число е-фолдов на завершении стадии инфляции.

Запишем параметр медленного скатывания для случая $H = H_{sr}$, $\phi = \phi_{sr}$,

$$V \neq V_{sr}$$

$$\epsilon_W = \frac{1}{2} \left(\frac{W'_\phi}{W} \right)^2 = \epsilon_{V_{sr}} = \frac{1}{2} \left(\frac{(V'_\phi)_{sr}}{V_{sr}} \right)^2.$$

Теперь определим различие по числу е-фолдов в случае точных и приближенных решений

$$\Delta_V = N(V_{sr}) - N(V) = \int_{\phi_0}^{\phi} \left(\frac{1}{\sqrt{2\epsilon_{V_{sr}}}} - \frac{1}{\sqrt{2\epsilon_V}} \right) d\phi = - \int_{\phi_0}^{\phi} \left(\frac{W}{W'_\phi} - \frac{V}{V'_\phi} \right) d\phi.$$

Нижний индекс V означает, что расхождение мы определяем по потенциалу.

Учитывая выражение для потенциала (3.66) и записывая $\Delta_N = \Delta_N(\phi)$ как функцию поля, получим

$$\Delta_V(\phi) = - \int_{\phi_0}^{\phi} \frac{2W(W'^2 - W''W)}{W'(W'^2 - 2W''W + 6W^2)} d\phi. \quad (3.83)$$

Для модели инфляции, соответствующей потенциалу (3.57), для произвольного n , получим

$$\Delta_V(\phi) = \frac{A(A\phi + B)}{2A^2(n^2 - n) - 3A^2\phi^2 - 6AB\phi - 3B^2}. \quad (3.84)$$

Также, можно записать расхождение как функцию времени, подставляя зависимость $\phi = \phi(t)$ в выражение (3.84), получим

$$\Delta_V(t) = - \frac{AK(C_1 + t)\Theta(t)}{3A^2K^2n(C_1^2 + t^2) + 6A^2K^2C_1n\Theta^2(t)t - 2n + 2}. \quad (3.85)$$

Из условия $\Delta_V = 0$ в начале инфляции и выражений (3.84)-(3.85) определим начальные значения $\phi_0 = -B/A$ и $t_0 = -C_1$.

Поскольку фоновая динамика в случае точных и приближенных решений одинакова, то есть $H = H_{sr}$, при вычислении N по параметру Хаббла, расхождение $\Delta_V = 0$.

Для нахождения модели инфляции, соответствующего этому условию, рассмотрим уравнение

$$W_\phi'^2 - W_\phi''W = 0. \quad (3.86)$$

Решением этого уравнения будет суперпотенциал $W(\phi) = C_1 \exp(C_2\phi)$, где C_1 и C_2 - константы интегрирования. Подставляя этот суперпотенциал в уравнения (3.63)-(3.64), получим, что условию $\Delta_V = 0$ соответствует степенная инфляция (3.52)-(3.55).

Одинаковые потенциалы и различная динамика

Запишем точные уравнения фоновой динамики и уравнения в приближении медленного скатывания в следующем виде

$$V_{sr}(t) = 3H_{sr}^2, \quad V(t) = 3H^2 + \dot{H}, \quad (3.87)$$

$$\dot{\phi}_{sr}^2 = -2\dot{H}_{sr}, \quad \dot{\phi}^2 = -2\dot{H}, \quad (3.88)$$

Рассмотрим случай $V = V_{sr}$, для которого $\phi \neq \phi_{sr}$ и $H \neq H_{sr}$.

Выразим приближенный параметр Хаббла через точный

$$3H_{sr}^2 = 3H^2 + \dot{H}, \quad H_{sr} = \sqrt{H^2 + \frac{\dot{H}}{3}}, \quad (3.89)$$

оставляем положительный знак, поскольку в период инфляции $H > 0$.

Таким образом, различие между точными и приближенными решениями по числу e-фолдов

$$N - N_{sr} = \Delta_H = \int_{t_0}^{t_\epsilon} \left(H(t) - \sqrt{H^2(t) + \frac{\dot{H}(t)}{3}} \right) dt.$$

Нижний индекс H означает, что расхождение мы определяем по параметру Хаббла.

Анализировать различия между точными и приближенными решениями будем с помощью функции $\Delta_H = \Delta_H(t)$, то есть по разности числа е-фолдов как функции времени

$$\frac{d\Delta_H(t)}{dt} = H(t) - \sqrt{H^2(t) + \frac{\dot{H}(t)}{3}}. \quad (3.90)$$

Для степенной инфляции, в отличие от случая с одинаковой фоновой динамикой, получим ненулевое расхождение

$$\Delta_H(t) = \frac{1-\alpha}{A} \ln(At+B), \quad (3.91)$$

$$H_{sr} = \alpha(At+B)^{-1}, \quad (3.92)$$

где постоянная α определяет различие между точными и приближенными решениями.

Генерирование точных решений из расхождения $\Delta_H(t)$

Расхождение между точными и приближенными решениями $\Delta_H(t)$ можно рассматривать как генерирующую функцию.

Рассматривая линейную функцию $\Delta_H(t)$ следующего вида

$$\Delta_H(t) = A(t-t_0), \quad (3.93)$$

где A - положительная постоянная, и решая уравнение (3.90), получим

$$H(t) = -\frac{1}{2} \exp[-6A(t-t_0)] + \frac{A}{2}$$

$$\phi(t) = \phi_0 \exp[-3A(t-t_0)], \quad \phi_0 = \sqrt{-\frac{2}{3A}}$$

$$V(\phi) = \frac{27A^2}{4} \left(\phi^2 - \frac{2}{3} \right)^2$$

$$a(t) = a_0 \exp\left[\frac{A}{2}(t-t_0) + \frac{A}{12}e^{-6A(t-t_0)}\right],$$

что соответствует модели инфляции, с потенциалом класса II.

Вселенная Фридмана с ненулевой кривизной или материей

В контексте современных космологических теорий динамика Вселенной на различных стадиях определяется эволюцией скалярного поля на ранней стадии, скалярным полем и излучением на последующей стадии, динамическим полем квинтэссенции (или же космологической постоянной, связанной с энергией вакуума для Λ CDM модели) и материальными полями на стадии повторного ускоренного расширения [17-18].

Поскольку излучение не оказывает заметного влияния на динамику Вселенной на современной стадии [19], материальными компонентами, входящими в уравнения динамики являются темная и барионная материя, которые эффективно описываются посредством идеальной жидкости с баротропным уравнением состояния $\rho_m = w p_m$, где w - параметр состояния и плотность меняется по закону $\rho_m = K a^{-m}$, где K и m - некоторые постоянные [180,194,195]. Поле квинтэссенции рассматривается с аналогичным уравнением состояния, где ρ представляет собой плотность энергии, p - давление.

При анализе динамики Вселенной на разных стадиях эволюции рассматриваются различные значения параметра m , что приводит к необходимости развития методов точных решений уравнений динамики для этого случая. В работах [180,194] такая задача решалась посредством приведения уравнений космологической динамики к уравнениям Ермакова-Пиннея и Шрёдингера, однако, на основе данного подхода, не всегда можно найти явную зависимость полученных решений от космического времени и поля, также, новые переменные в этих уравнениях не имеют наглядного физического смысла. В работах [165,175] рассматривались точные решения для моделей ранней Вселенной, которым соответствуют значения $m = 2$ и $K = -1, 0, 1$; в данном случае K имеет смысл кривизны пространства.

Отметим, что допустимое отклонение от плоской Вселенной, согласно наблюдениям спутника PLANCK, очень мало и составляет $|\Omega_k| < 0.005$ [19], тем не менее, отклонение не равно нулю, что, на данный момент, позволяет рассматривать модели с ненулевой кривизной как возможные актуальные модели Вселенной.

В данном разделе мы рассмотрим метод точных решений уравнений динамики с произвольным параметром m , который основан на представлении характеристик основных компонент, оказывающих влияние на динамику Вселенной в терминах числа e -возрастаний масштабного фактора или, иначе, числа e -фолдов, также рассмотрим точные решения, полученные методом подстановки масштабного фактора в уравнения динамики.

Уравнения динамики в терминах числа e -фолдов

Рассмотрим уравнения Эйнштейна-Фридмана и динамики скалярного поля в случае пространственно-плоской Вселенной ФРУ ($k=0$) в системе единиц $c = 8\pi G = 1$

$$3H^2 = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi) - \frac{3K}{a^m}, \quad (3.94)$$

$$\dot{H} = -\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + \frac{K}{a^m}, \quad (3.95)$$

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + V'_\phi(\phi) = 0, \quad (3.96)$$

где учитывается вклад темной энергии, которая определяется скалярным полем ϕ (полем квинтэссенции) с потенциалом $V(\phi)$, также темной и барионной материей, которые моделируются баротропной идеальной жидкостью с уравнением состояния $p_m = [(m-3)/3]\rho_m$, плотность меняется по закону $\rho_m = Ka^{-m}$, $K = \rho_{m0}$, для барионной и темной материи $m=3$, для излучения $m=4$. На стадии космологической инфляции для Вселенной

Фридмана с ненулевой (в общем случае) кривизной рассматривается только скалярное поле ϕ , также $K = -1, 0, 1$ и $m = 2$.

Поскольку независимых уравнений в системе (3.94)-(3.96) только два, запишем уравнения динамики в следующем виде

$$V(\phi) = 3H^2 + \dot{H} + \frac{2K_0}{\bar{a}^m}, \quad (3.97)$$

$$\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 = -\dot{H} + \frac{K_0}{\bar{a}^m}, \quad (3.98)$$

где $\bar{a}(t) = a(t)/a_0$ - масштабный фактор, нормированный на начальное значение, и постоянная $K_0 = Ka_0^{-m}$.

Таким образом, число е-фолдов $N = N(t)$, то есть число возрастаний масштабного фактора в е-раз, можно записать как

$$N = \int H dt, \quad \dot{N} = H, \quad N = \ln \bar{a}, \quad \bar{a} = e^N. \quad (3.99)$$

Теперь запишем уравнения (3.97)- (3.98) в терминах числа е-фолдов и параметра медленного скатывания $\epsilon = \epsilon(t)$, с учетом следующих соотношений

$$\epsilon = -\frac{\dot{H}}{H^2} = -\frac{1}{H^2} \left(\frac{dH}{dN} \dot{N} \right) = -\frac{1}{H} \left(\frac{dH}{dN} \right) = -\frac{d \ln H}{dN}, \quad \frac{1}{2}\phi_N^2 = \frac{1}{2}(\dot{\phi}\dot{N})^2 = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 H^2, \quad (3.100)$$

где $\phi_N = d\phi/dN$.

В результате, получим

$$H(N) = C \exp(-\int \epsilon(N) dN), \quad (3.101)$$

$$\frac{1}{2}\phi_N^2 = \epsilon(N) + \frac{K_0}{C^2} \exp[-mN + 2\int \epsilon(N) dN], \quad (3.102)$$

$$V(N) = C^2 (3 - \epsilon(N)) \exp(-2\int \epsilon(N) dN) + 2K_0 \exp(-mN), \quad (3.103)$$

где C - постоянная интегрирования.

Также, уравнения (3.101)-(3.103) можно записать в терминах генерирующей функции $F(N) = \int \epsilon(N) dN$ в следующем виде

$$H(N) = C \exp(-F), \quad (3.104)$$

$$\frac{1}{2} \phi_N^2 = F_N + \frac{K_0}{C^2} \exp[-mN + 2F], \quad (3.105)$$

$$V(N) = C^2(3 - F_N) \exp(-2F) + 2K_0 \exp(-mN), \quad (3.106)$$

К решениям в терминах космического времени t можно перейти, используя уравнение

$$\epsilon = -\frac{\dot{H}}{H^2} = -\frac{\ddot{N}}{\dot{N}^2}, \quad (3.107)$$

также, уравнение (3.107) является условием интегрируемости космологических моделей в терминах космического времени.

Таким образом, задавая параметр медленного скатывания $\epsilon = \epsilon(N)$ или генерирующую функцию $F = F(N)$, из уравнений (3.101)-(3.103) или (3.104)-(3.106) можно получать точные решения уравнений динамики.

Также отметим, что уравнения (3.104)-(3.106) для частного случая $m = 2$ рассматривались ранее в работе [195] в терминах переменной $\omega = 6N$ и генерирующей функции $F'_\omega = F_N/6$ и были получены из других соображений.

Точные решения для степенного масштабного фактора

Модели со степенным масштабным фактором $a(t) = a_0 t^\alpha$ являются хорошей альтернативой Λ CDM модели при описании повторного ускоренного расширения, также такие модели позволяют описывать динамику каждой из стадий эволюции Вселенной посредством выбора постоянной α . Из определения параметра медленного скатывания (3.107) получим, что для степенного масштабного фактора $\epsilon = const$.

Космологические модели со степенным масштабным фактором, $m=2$ и ненулевой кривизной ($k \neq 0$) рассматривались ранее в работах [165,175,176].

Определим параметр медленного скатывания как $\epsilon = m/2$ и, из уравнений (3.101)-(3.103) получим

$$H(N) = C \exp\left(-\frac{m}{2}N\right),$$

$$\bar{a}(N) = \exp(N),$$

$$\phi(N) = \pm \frac{1}{C} \sqrt{C^2 m + 2K_0} N,$$

$$V(N) = C^2 \left(3 - \frac{m}{2} + \frac{2K_0}{C^2}\right) \exp(-mN).$$

Число е-фолдов как функцию времени определим из уравнения (3.107)

$$N(t) = \frac{2}{m} \ln\left(\frac{C_1}{2}mt + \frac{C_2}{2}m\right),$$

где c_1 и c_2 - постоянные интегрирования, которые мы определим из уравнений (3.98) и (3.107), предварительно записав параметр Хаббла из выражения $\epsilon = -\dot{H}/H^2$. Из уравнения (3.107) получим $C_2 = 2C_1^2/m$, из уравнения (3.98) следует $C_1 = C$.

Таким образом, точные решения в терминах космического времени и скалярного поля

$$H(t) = \frac{2}{mt + 2C},$$

$$\bar{a}(t) = \left(\frac{C}{2}mt + C^2\right)^{2/m}, \quad a(t) = a_0 \left(\frac{C}{2}mt + C^2\right)^{2/m},$$

$$\phi(t) = \pm \frac{2\sqrt{C^2 m + 2K_0}}{mC} \ln\left(\frac{C}{2}mt + C^2\right),$$

$$V(\phi) = C^2 \left(3 - \frac{m}{2} + \frac{2K_0}{C^2} \right) \exp \left(\mp \frac{mC\phi}{\sqrt{C^2 m + 2K_0}} \right).$$

Исходя из масштабного фактора и параметра медленного скатывания $\epsilon = m/2$ получим условие ускоренного расширения $m < 2$. Таким образом, ускоренное расширение происходит только для плоской Вселенной ($k=0$), в этом случае $K_0=0$ и, следовательно, m может принимать произвольные положительные значения.

Обобщение точных решений для моделей с $m=2$

Теперь рассмотрим космологическую модель с параметром медленного скатывания $\epsilon = 0$.

Из уравнений (3.101)-(3.103) получим

$$H(N) = C,$$

$$\bar{a}(N) = \exp(N),$$

$$\phi(N) = \pm \frac{2\sqrt{2K_0}}{mC} \exp\left(-\frac{m}{2}N\right),$$

$$V(N) = 3C^2 + 2K_0 \exp(-mN).$$

Поскольку, в данном случае, число е-фолдов $N = Ct$, решения в терминах космического времени запишем в следующем виде

$$\bar{a}(t) = \exp(Ct), \quad a(t) = a_0 \exp(Ct),$$

$$\phi(t) = \pm \frac{2\sqrt{2K_0}}{mC} \exp\left(-\frac{m}{2}Ct\right),$$

$$V(\phi) = 3C^2 + \frac{1}{4}m^2 C^2 \phi^2,$$

которые являются обобщением решений, полученных в работе [165] для случая $m = 2$.

Модель с постоянными скалярным полем и потенциалом

Рассмотрим модель с постоянным скалярным полем $\phi = A$ (в частном случае $A = 0$). Из уравнений (3.105)-(3.106) получим

$$F(N) = \frac{1}{2} \ln \left[\frac{C^2 m}{2K_0 (C_1 m - e^{-mN})} \right], \quad (3.108)$$

$$\epsilon(N) = \frac{me^{-mN}}{2(e^{-mN} - C_1 m)}, \quad (3.109)$$

$$V(\phi) = \frac{3K_0}{m} (me^{-mN} - 2e^{-mN} + 2C_1 m), \quad (3.110)$$

где C_1 - постоянная интегрирования.

Из выражения (3.110) видно, что $V = 6C_1 K_0 = const$ только для случая $m = 2$, который мы и будем рассматривать.

Из уравнения (3.110) для параметра медленного скатывания (34) с $m = 2$ получим

$$N(t) = \frac{1}{2} \ln \left[2C_1 \cos^2 (C_2 t + C_3) \right].$$

Из определения параметра медленного скатывания как функции времени $\epsilon = -\dot{H}/H^2$ получим

$$H(t) = C_2 \tan(C_2 t + C_3).$$

Из уравнений (3.104) и (3.97)-(3.98) получим точные решения для рассматриваемой модели в терминах космического времени

$$H(t) = -\sqrt{K_0} \tanh \left(\sqrt{K_0} t - \frac{1}{2} \right),$$

$$a(t) = a_0 \cosh\left(\sqrt{K_0}t - \frac{1}{2}\right), \quad V = \Lambda_{\phi\phi} = 3K_0.$$

Таким образом, на стадии инфляции, ненулевая кривизна, в данной модели, определяет эффективную космологическую постоянную $\Lambda_{\phi\phi} = 3K_0$.

Неинтегрируемые в терминах космического времени модели

Теперь рассмотрим точные решения для модели со скалярным полем

$$\phi(N) = A \exp\left(-\frac{m}{2}N\right), \quad (3.111)$$

где A - произвольная постоянная.

Из уравнений (3.104)-(3.106) получим

$$F(N) = \frac{A^2 m}{8} (C_1 m - e^{-mN}) + \frac{1}{2} \ln \left[\frac{A^2 m^2 C^2}{1 + 8K_0 \exp\left(\frac{A^2 m}{4} (C_1 m - e^{-mN})\right)} \right], \quad (3.112)$$

$$\epsilon(N) = \frac{1}{8} \frac{A^2 m^2 e^{-mN}}{1 + 8K_0 \exp\left(\frac{A^2 m}{4} (C_1 m - e^{-mN})\right)}, \quad (3.113)$$

$$H(N) = \frac{1}{mA} \left[\exp\left(-\frac{mA^2}{4} (C_1 m - e^{-mN})\right) + 8K_0 \right]^{1/2}, \quad (3.114)$$

$$V(\phi) = K_0 \left(\frac{\phi}{A}\right)^2 - \frac{1}{8} \left(\frac{\phi}{A}\right)^2 e^{\frac{m}{4}(\phi^2 - C_1 mA^2)} + \frac{3}{m^2 A^2} e^{\frac{m}{4}(\phi^2 - C_1 mA^2)} + \frac{24K_0}{A^2}, \quad (3.115)$$

где C_1 - постоянная интегрирования.

Из уравнения (3.107) мы не можем найти $N = N(t)$ в явном виде (для $K_0 \neq 0$ и для $K_0 = 0$), по этой причине, рассматриваемая модель является неинтегрируемой в терминах космического времени. Тем не менее, можно провести анализ такой модели исходя из зависимости $\epsilon = \epsilon(N)$.

Точные решения из подстановки масштабного фактора

Получим точные решения уравнений динамики для моделей, которые рассматривались в работах [165,175], обобщенных на случай произвольного значения m , за исключением $m = 0$:

1. Модель с масштабным фактором

$$a(t) = A(mA^{2-m})^{1/m} \cos^{2/m} \left(\frac{\sqrt{K+B}}{A}(t+C) \right), \quad (3.116)$$

где A , B и C – некоторые постоянные.

Из уравнений (3)-(4) получим

$$\phi(t) = \pm \sqrt{\frac{2(3K+2B)}{m(K+B)}} \ln \left[\frac{1 + \sin \left(\frac{\sqrt{K+B}}{A}(t+C) \right)}{\cos \left(\frac{\sqrt{K+B}}{A}(t+C) \right)} \right], \quad (3.117)$$

$$V(t) = \frac{12(K+B) \sin^2 \left(\frac{\sqrt{K+B}}{A}(t+C) \right) - 2mB}{m^2 A^2 \cos^2 \left(\frac{\sqrt{K+B}}{A}(t+C) \right)}. \quad (3.118)$$

Далее, подставляя зависимость $t = t(\phi)$ в выражение (40), запишем

$$V(\phi) = \frac{1}{m^2 A^2} \left[(6K + 6B - mB) \cosh \left(\sqrt{\frac{2m(K+B)}{3K+2B}} \phi \right) - (6K + 6B + mB) \right]. \quad (3.119)$$

2. Модель с масштабным фактором

$$a(t) = A(mA^{2-m})^{1/m} \sin^{2/m} \left(\frac{\sqrt{K+B}}{A}(t+C) \right), \quad (3.120)$$

$$\phi(t) = \pm \sqrt{\frac{2(3K+2B)}{m(K+B)}} \ln \left[\frac{\sin\left(\frac{\sqrt{K+B}}{A}(t+C)\right)}{1 + \cos\left(\frac{\sqrt{K+B}}{A}(t+C)\right)} \right], \quad (3.121)$$

$$V(t) = \frac{12(K+B)\cos^2\left(\frac{\sqrt{K+B}}{A}(t+C)\right) - 2mB}{m^2 A^2 \sin^2\left(\frac{\sqrt{K+B}}{A}(t+C)\right)} \quad (3.122)$$

с тем же потенциалом (3.119), что и в предыдущей модели.

Полученные решения соответствуют осциллирующей динамике Вселенной, в рамках которой стадии ускоренного расширения сменяются сжатием.

3. Модель с масштабным фактором

$$a(t) = A(mA^{2-m})^{1/m} \sinh^{2/m}\left(\frac{\sqrt{K+B}}{A}(t+C)\right), \quad (3.123)$$

$$\phi(t) = \sqrt{\frac{2(3K+2B)}{m(K+B)}} \left[\pm \ln\left(e^{\frac{\sqrt{K+B}}{A}(t+C)} + 1\right) \mp \ln\left(e^{\frac{\sqrt{K+B}}{A}(t+C)} - 1\right) \right], \quad (3.124)$$

$$V(t) = \frac{12(K+B)\cosh^2\left(\frac{\sqrt{K+B}}{A}(t+C)\right) - 2mB}{m^2 A^2 \sinh^2\left(\frac{\sqrt{K+B}}{A}(t+C)\right)}, \quad (3.125)$$

$$V(\phi) = \frac{1}{m^2 A^2} \left[(6K+6B-mB) \cosh\left(\sqrt{\frac{2m(K+B)}{3K+2B}} \phi\right) + (6K+6B+mB) \right].$$

4. Модель с масштабным фактором

$$a(t) = A(mA^{2-m})^{1/m} \cosh^{2/m}\left(\frac{\sqrt{K+B}}{A}(t+C)\right), \quad (3.126)$$

$$\phi(t) = \pm 2 \sqrt{-\frac{2(3K+2B)}{m(K+B)}} \operatorname{arctg} \left(e^{\frac{\sqrt{K+B}}{A}(t+C)} \right), \quad (3.127)$$

$$V(t) = \frac{12(K+B) \sinh^2 \left(\frac{\sqrt{K+B}}{A}(t+C) \right) - 2m(K-B)}{m^2 A^2 \cosh^2 \left(\frac{\sqrt{K+B}}{A}(t+C) \right)}, \quad (3.128)$$

после подстановки $t = t(\phi)$ в выражение (3.128) и тригонометрических преобразований получим

$$V(\phi) = \frac{1}{m^2 A^2} \left[(6K + 6B - mB + mK) \cosh \left(\sqrt{\frac{m(K+B)}{2(K+2B)}} \phi \right) + (6K + 6B + mB - mK) \right].$$

Заметим, что при условии $6K + 6B - mB = 0$ для моделей (1), (2), (3) и $6K + 6B - mB + mK = 0$ для модели (4) получим плоский потенциал $V = \text{const}$, который можно рассматривать в качестве эффективной космологической постоянной, определяемой скалярным полем и материальными полями.

Таким образом, на основе полученных решений можно рассматривать эволюцию Вселенной на любой из стадий эволюции, которым соответствуют различные параметры K и m .

ЧАСТЬ 4. КОСМОЛОГИЧЕСКИЕ ВОЗМУЩЕНИЯ

Космологические возмущения являются источником эволюции крупномасштабной структуры Вселенной. Объяснение распределения галактик и скоплений галактик на больших расстояниях в наблюдаемой части Вселенной на основе космологических возмущений было изначально предложено в работах Харрисона [196] и Зельдовича [197].

В контексте инфляционной парадигмы, источником космологических возмущений являются квантовые флуктуации скалярного поля и соответствующие флуктуации метрики, которым, в линейном порядке, соответствуют три моды, развивающиеся независимо [26-28].

Теория скалярных и тензорных мод возмущений во Вселенной ФРУ сводится к квантово-механической задаче о независимых осцилляторах, находящихся во внешнем параметрическом поле. Действие и лагранжиан элементарных осцилляторов зависят от их пространственной частоты k .

Первоначальные неоднородности появляются из квантовых флуктуаций вакуума на очень малых масштабах (длина волны меньше, чем радиус Хаббла). Длина волны, впоследствии, увеличивается относительно радиуса Хаббла, который определяется условием $k = aH$, и становится больше этого радиуса в некоторое время и затем распространяется в больших масштабах.

Поскольку гравитационное взаимодействие имеет характер притяжения, в контексте космологии постоянно расширяющегося фона, в ранней Вселенной мало неоднородностей. Таким образом, линеаризованный анализ возмущений (на классическом космологическом фоне) является достаточно непротиворечивым.

Из классической теории космологических возмущений известно, что анализ метрических неоднородностей может быть упрощен до изучения

одной возмущенной величины [26-28]. Таким образом, квантовую теорию космологических возмущений можно редуцировать в квантовое описание флуктуаций некоторого скалярного поля.

Поскольку фон, в котором развивается скалярное поле, зависит от времени, масса поля также будет зависеть от времени. Эта зависимость массы поля от времени будет приводить к появлению частиц, если эволюция начинается с некоторого вакуумного состояния. Квантовое рождение частиц соответствует развитию и росту космологических возмущений [26-28].

Первый шаг в анализе метрических возмущений заключается в их классификации в соответствии с изменениями свойств в результате плоских вращений [26]. В контексте теории космологических возмущений присутствуют скалярные, векторные и тензорные возмущения [26-28]. В линейном порядке, взаимодействие между различными модами возмущений отсутствует, и, следовательно, они развиваются независимо.

Рассмотрим возмущения метрики в ФРУ на фоне $g_{\mu\nu}^{(0)}$

$$g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}^{(0)} + \delta g_{\mu\nu}.$$

Фоновая метрика зависит только от времени, тогда как возмущения метрики $\delta g_{\mu\nu}$ зависят от пространства и времени. Так как метрический тензор является симметричным, существует 10 степеней свободы возмущений в $\delta g_{\mu\nu}$. Четыре степени свободы соответствуют скалярным возмущениям метрики (только четыре пути конструирования метрики скалярными функциями)

$$\delta g_{\mu\nu} = a^2(\eta) \begin{pmatrix} 2\phi & -B_i \\ -B_i & 2(\psi\delta_{ij} - E_{ij}) \end{pmatrix},$$

где четыре степени свободы возмущений обозначены ϕ, B, E и ψ , а запятая обозначает ковариантную производную по отношению к метрике пространства, и δ_{ij} – символ Кронекера.

Также учитываются четыре векторные степени свободы возмущений метрики, состоящие из четырех путей конструирования возмущений метрики из трех векторов

$$\delta g_{\mu\nu} = a^2(\eta) \begin{pmatrix} 0 & -S_i \\ -S_i & F_{i,j} + F_{j,i} \end{pmatrix},$$

где S_i и F_i – векторы, дивергенция которых равна нулю (в случае векторов с неисчезающей дивергенцией, дивергенция переходит в скалярные моды возмущений).

Две тензорные моды соответствуют двум состояниям поляризации гравитационных волн, возмущения метрики, в данном случае, запишем как

$$\delta g_{\mu\nu} = a^2(\eta) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & h_{ij} \end{pmatrix},$$

где тензор h_{ij} не содержит ни скалярных, ни векторных составляющих. Отметим, что гравитационные волны не связаны линейно с возмущениями материи.

В квантовой теории космологических возмущений большое значение имеет определение начальных условий. Поскольку на стадии инфляции все возмущения подвергаются смещению ввиду ускоренного расширения пространства, можно принять, что поле ϕ начинает изменяться в начале инфляции с момента времени t_i . Обычно допускают, что выбор начального времени t_i не важен до тех пор, пока возмущения не пересекут радиуса Хаббла. Вакуумное состояние, как правило, выбирается в виде вакуума Банча-Дэвиса, так как в этом состоянии при $t = t_i$ отсутствуют частицы [30].

Гравитационные волны существуют в качестве квантовых флуктуаций вакуума в начальное время во всех масштабах. Они осциллируют до пересечения радиуса Хаббла. На пересечении радиуса Хаббла тензорные возмущения «замерзают» и квантовое состояние гравитационных волн

начинает меняться таким образом, чтобы выполнялось условие постоянства их амплитуды. Замерзание вакуумного состояния приводит к появлению классических свойств.

Таким образом, квантовая теория возмущений обеспечивает последовательную систему взглядов при рассмотрении генерации и эволюции космологических возмущений.

Возмущения поля и метрики

Рассмотрим невозмущенную метрику пространства ФРУ в следующем виде

$$ds^2 = a^2(\eta) \left[-d\eta^2 + \gamma_{ij} dx^i dx^j \right], \quad \phi = \phi(\eta), \quad (4.1)$$

где γ_{ij} - пространственная часть метрики, $\{i, j\}$ - пространственные координаты, $\eta = \int dt/a(t)$ - конформное время, в терминах которого уравнения динамики записываются следующим образом

$$3\mathcal{H}^2 = \frac{1}{2}\phi'^2 + a^2 V(\phi), \quad (4.2)$$

$$\mathcal{H}' - \mathcal{H}^2 = -\frac{1}{2}\phi'^2, \quad (4.3)$$

$$\phi'' + 2\mathcal{H}\phi' + a^2 V'(\phi) = 0, \quad (4.4)$$

где $\mathcal{H} = \mathcal{H}(\eta) = aH$, $\phi' = a\dot{\phi}$ и штрих означает производную по конформному времени η .

Теперь запишем возмущенные метрику и скалярное поле

$$ds^2 = a^2(\eta) \left[-(1+2A)d\eta^2 + 2B_i dx^i d\eta + \left((1+2\mathcal{R})\gamma_{ij} + 2E_{ij} + 2h_{ij} \right) dx^i dx^j \right], \quad (4.5)$$

$$\phi = \phi(\eta) + \delta\phi(\eta, x^i), \quad (4.6)$$

где $|_i$ - ковариантная производная.

Четыре параметра (A, B, \mathcal{R}, E) определяют первый тип возмущений, именно, *скалярные возмущения*, h_{ij} соответствует *тензорным возмущениям* (гравитационным волнам), третий тип возмущений – *векторные возмущения* отсутствуют (быстро затухают) в первом порядке теории космологических возмущений [26-28].

Поскольку космологические возмущения рассматриваются в пространстве-времени, им соответствуют некоторые координаты. Но координаты являются просто метками для обозначения точек в пространственно-временном многообразии и не несут независимого физического смысла. Выполняя преобразования пространственно-временных координат, впоследствии называемых «калибровочными преобразованиями», мы можем ввести «фиктивные» возмущения в однородную и изотропную Вселенную. Эти моды называются «калибровочными артефактами».

Рассмотрим два пространственно-временных многообразия, одно из них однородная и изотропная Вселенная M_0 , другое - Вселенная M с неоднородностями. Выбор координат представим как отображение D между многообразиями M_0 и M . Теперь рассмотрим второе отображение \tilde{D} некоторой точки из многообразия M_0 в различные точки многообразия M . Используя инверсию этих отображений, можно определить два различных набора координат в точках M . Рассмотрим теперь физическую величину Q на многообразии M , и, соответственно, физическую величину Q_0 на многообразии M_0 . В первой системе координат, заданной отображением D , возмущение δQ в точке $p \in M$ будет определяться как

$$\delta Q(p) = Q(p) - Q^{(0)}(D^{-1}(p)).$$

Аналогично, во второй системе координат, заданной \tilde{D} , возмущение будет

$$\delta\tilde{Q}(p) = Q(p) - Q^{(0)}(\tilde{D}^{-1}(p)).$$

Различие $\Delta Q(p) = \delta\tilde{Q}(p) - \delta Q(p)$ определяет «калибровочные артефакты», которые имеют место только для скалярных возмущений, поскольку тензорные возмущения калибровочно инвариантны [26-28].

На основе следующего преобразования координат

$$\tilde{\eta} = \eta + \xi^0(\eta, x^i),$$

$$\tilde{x}^i = x^i + \gamma^{ij}\xi_{j_i}(\eta, x^i),$$

которые определяются произвольными функциями (ξ^0, ξ) , получим новые «фиктивные» возмущения

$$\tilde{A} = A - \xi^{0'} - \mathcal{H}\xi^0, \quad \tilde{B} = B + \xi^0 - \xi',$$

$$\tilde{\mathcal{R}} = \mathcal{R} - \mathcal{H}\xi^0, \quad \tilde{E} = E - \xi.$$

Для устранения «фиктивных» возмущений обычно рассматриваются калибровочно-инвариантные потенциалы Бардина [198]

$$\Phi = A + (B - E') + \mathcal{H}(B - E'), \quad (4.7)$$

$$\Psi = \mathcal{R} + \mathcal{H}(B - E'). \quad (4.8)$$

Теперь, на основе потенциалов Бардина (4.7)-(4.8), запишем калибровочно-инвариантные уравнения для возмущений

$$\Phi'' + 3\mathcal{H}\Phi' + (\mathcal{H}' + 2\mathcal{H}^2)\Phi = \frac{1}{2}[\phi'\delta\phi' - a^2V'(\phi)\delta\phi], \quad (4.9)$$

$$-\nabla^2\Phi + 3\mathcal{H}\Phi' + (\mathcal{H}' + 2\mathcal{H}^2)\Phi = -\frac{1}{2}[\phi'\delta\phi' + a^2V'(\phi)\delta\phi], \quad (4.10)$$

$$\Phi' + \mathcal{H}\Phi = \frac{1}{2}\phi'\delta\phi, \quad (4.11)$$

$$\delta\phi'' + 2\mathcal{H}\delta\phi' - \nabla^2\delta\phi = 4\phi'\Phi' - 2a^2V'(\phi)\Phi - a^2V''(\phi)\delta\phi. \quad (4.12)$$

Для упрощения системы уравнений (4.9)-(4.12) используют переменные Муханова-Сасаки [26-28]

$$u \equiv a\delta\phi + z\Phi, \quad (4.13)$$

$$z \equiv a\frac{\phi'}{\mathcal{H}}, \quad (4.14)$$

в терминах которых уравнения на возмущения записываются следующим образом

$$u'' - \nabla^2 u - \frac{z''}{z}u = 0, \quad (4.15)$$

$$\nabla^2\Phi = \frac{\mathcal{H}}{2a^2}(zu' - z'u), \quad (4.16)$$

$$\left(\frac{a^2\Phi}{\mathcal{H}}\right)' = \frac{1}{2}zu. \quad (4.17)$$

Процедура решения этих уравнений выглядит следующим образом: из уравнения (4.15) находим $u(z)$, далее, из уравнений (4.16)-(4.17) находим $\Phi(z)$ и определяем возмущения поля $\delta\phi$ из соотношения (4.13).

Квантование возмущений

Теперь рассмотрим возмущения Φ и $\delta\phi$ как некоторые квантовые поля. Уравнения динамики для скалярных возмущений рассмотрим как уравнения Эйлера-Лагранжа для действия [26-29]

$$S = \frac{1}{2} \int d^3x d\eta \left[(u')^2 - (\nabla u)^2 + \frac{z''}{z}u^2 \right], \quad \mathcal{L} = (u')^2 - (\nabla u)^2 + \frac{z''}{z}u^2, \quad (4.18)$$

Чтобы перейти к квантовому описанию космологических возмущений в пространстве-времени (4.1) определим оператор $\hat{u}(\eta, x)$, соответствующий классической переменной u , в следующем виде

$$\hat{u}(\eta, x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}} \left[u_k(\eta) \hat{a}_k e^{ikx} + u_k^*(\eta) \hat{a}_k^+ e^{-ikx} \right], \quad (4.19)$$

где k - волновое число и операторы рождения и уничтожения соответствуют условиям, определяющим вакуумное состояние

$$[\hat{a}_k, \hat{a}_{k'}^+] = \delta^3(k - k'), \quad (4.20)$$

$$\hat{a}_k |0\rangle = 0. \quad (4.21)$$

Записывая уравнения Эйлера-Лагранжа для лагранжиана (4.18) с оператором (4.19) и условиями (4.20)-(4.21) получим уравнение типа одномерного уравнения Шрёдингера

$$u_k'' + \left(k^2 - \frac{z''}{z} \right) u_k = 0, \quad (4.22)$$

в котором отношение z''/z является эффективным потенциалом.

Для решения этого уравнения запишем параметры медленного скатывания в следующем виде

$$\epsilon = 1 - \frac{\mathcal{H}'}{\mathcal{H}^2} = \frac{z'}{2a^2}, \quad (4.23)$$

$$\delta = 1 - \frac{\phi''}{\mathcal{H}\phi'} = 1 + \epsilon - \frac{z'}{\mathcal{H}z}, \quad (4.24)$$

$$\xi = - \left(2 - \epsilon - 3\delta + \delta^2 - \frac{\phi'''}{\mathcal{H}^2\phi'} \right). \quad (4.25)$$

В терминах параметров медленного скатывания конформное время η и эффективный потенциал z''/z для каждой моды u_k записываются следующим образом

$$\eta = -\frac{1}{\mathcal{H}} + \int \frac{\epsilon da}{a\mathcal{H}}, \quad (4.26)$$

$$\frac{z''}{z} = \mathcal{H}^2 \left[(1+\epsilon-\delta)(2-\delta) + \mathcal{H}^{-1}(\epsilon' - \delta') \right]. \quad (4.27)$$

Считая параметры (4.23)-(4.25) постоянными в порядке ϵ^2 , запишем

$$\epsilon' = 2\mathcal{H}(\epsilon^2 - \epsilon\delta) = \mathcal{O}(\epsilon^2), \quad (4.28)$$

$$\delta' = \mathcal{H}(\epsilon\delta - \xi) = \mathcal{O}(\epsilon^2), \quad (4.29)$$

$$\dot{\epsilon} = 2H(\epsilon^2 - \epsilon\delta) = \mathcal{O}(\epsilon^2), \quad (4.30)$$

$$\dot{\delta} = H(\epsilon\delta - \xi) = \mathcal{O}(\epsilon^2). \quad (4.31)$$

С учетом соотношений (4.28)-(4.31) получаем

$$\eta = -\frac{1}{\mathcal{H}} \left(\frac{1}{1-\epsilon} \right),$$

$$\frac{z''}{z} = \frac{1}{\eta^2} \left(\nu^2 - \frac{1}{4} \right), \quad \nu = \frac{1+\epsilon-\delta}{1-\epsilon} + \frac{1}{2}. \quad (4.32)$$

При рассмотрении космологических возмущений характерным масштабом является размер горизонта событий H^{-1} , таким образом, можно записать решения уравнения (4.22) для двух режимов $k/a \gg H$, то есть для возмущений с длиной волны гораздо меньшей этого масштаба и $k/a \ll H$ для длинноволновых возмущений

$$u_k = \frac{1}{\sqrt{2k}} e^{-ik\eta}, \quad k \gg aH, \quad (4.33)$$

$$u_k = Cz, \quad k \ll aH. \quad (4.34)$$

Точное решение уравнения (4.22) записывается следующим образом

$$u_k(\eta) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{i\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2}} (-\eta)^{1/2} H_\nu^{(1)}(-k\eta), \quad (4.35)$$

где $H_\nu^{(1)}$ - функции Ханкеля первого рода и ν определяется из уравнения (4.32).

В пределе $k\eta \rightarrow 0$ решение (4.35) можно записать как

$$|u_k| = \frac{2^{\nu-\frac{3}{2}} \Gamma(\nu)}{\sqrt{2k} \Gamma\left(\frac{3}{2}\right)} (-k\eta)^{\frac{1}{2}-\nu} = \frac{C(\nu)}{\sqrt{2k}} \left(\frac{k}{aH}\right)^{\frac{1}{2}-\nu}, \quad (4.36)$$

$$C(\nu) = 2^{\nu-\frac{3}{2}} \frac{\Gamma(\nu)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)} (1-\epsilon)^{\nu-\frac{1}{2}}, \quad (4.37)$$

где $\Gamma(\nu)$ - гамма-функция.

Теперь рассмотрим тензорные возмущения с уравнениями динамики, следующими из действия [23-26]

$$S = \frac{1}{2} \int d^3x d\eta \frac{a^2}{2} \left[(h'_{ij})^2 - (\nabla h_{ij})^2 \right], \quad \mathcal{L} = \frac{a^2}{2} \left[(h'_{ij})^2 - (\nabla h_{ij})^2 \right], \quad (4.38)$$

с тензорным полем h_{ij} , которое мы будем рассматривать как квантовое поле

$$\hat{h}_{ij}(\eta, x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}} \sum_{\lambda=1,2} \left[h_k(\eta) e_{ij}(k, \lambda) \hat{a}_{k,\lambda} e^{ikx} + h_k^*(\eta) e_{ij}^*(k, \lambda) \hat{a}_{k,\lambda}^+ e^{-ikx} \right], \quad (4.39)$$

где $e_{ij}(k, \lambda)$ - два тензора поляризации, удовлетворяющие следующим условиям

$$e_{ij} = e_{ji}, \quad e_{ii} = 0, \quad e_{ij}(-k, \lambda) = e_{ij}^*(k, \lambda), \quad k^i e_{ij} = 0. \quad (4.40)$$

Нормировочное условие для тензоров поляризации как правило определяется следующим образом [15, 27]

$$\sum_{\lambda} e_{ij}^*(k, \lambda) e^{ij}(k, \lambda) = 4. \quad (4.41)$$

Тем не менее, результаты, полученные в работах [28,199], соответствуют другой нормировке

$$\sum_{\lambda} e_{ij}^*(k, \lambda) e^{ij}(k, \lambda) = 1. \quad (4.42)$$

Определим новую переменную

$$v_k(\eta) = \frac{a}{\sqrt{2}} h_k(\eta), \quad (4.43)$$

в терминах которой уравнения, соответствующие лагранжиану (4.38), записываются следующим образом

$$v_k'' + \left(k^2 - \frac{a''}{a} \right) v_k = 0. \quad (4.44)$$

С учетом условий (4.28)-(4.31), получим

$$\frac{a''}{a} = 2H^2 \left(1 - \frac{\epsilon}{2} \right) = \frac{1}{\eta^2} \left(\mu^2 - \frac{1}{4} \right), \quad (4.45)$$

$$\mu = \frac{1}{1-\epsilon} + \frac{1}{2}. \quad (4.46)$$

Два асимптотических решения для случаев $k/a \gg H$ и $k/a \ll H$ записываются следующим образом

$$v_k = \frac{1}{\sqrt{2k}} e^{-ik\eta}, \quad k \gg aH, \quad (4.47)$$

$$v_k = Ca, \quad k \ll aH. \quad (4.48)$$

Решение уравнения (4.44) записывается аналогично (4.35) и в пределе $k\eta \rightarrow 0$ получим

$$|v_k| = \frac{C(\mu)}{\sqrt{2k}} \left(\frac{k}{aH} \right)^{\frac{1}{2}-\mu}, \quad (4.49)$$

$$C(\mu) = 2^{\mu-\frac{3}{2}} \frac{\Gamma(\mu)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)} (1-\epsilon)^{\mu-\frac{1}{2}}. \quad (4.50)$$

Переменные (4.36) и (4.49) непосредственно связаны с измеряемыми параметрами космологических возмущений.

Параметры космологических возмущений

Параметры космологических возмущений, которые оценивают по влиянию возмущений скалярного поля и метрики на стадии инфляции на анизотропию реликтового излучения, именно, спектры мощности, рассчитывают как двухточечную корреляцию в пространстве Фурье [26-28].

Вначале рассмотрим скалярные возмущения, определяемые величиной $\mathcal{R}_k = u_k / z$,

$$\langle 0 | \mathcal{R}_k^* \mathcal{R}_{k'} | 0 \rangle = \frac{2\pi^2}{k^3} P_{\mathcal{R}}(k) \delta^3(k - k') = \frac{|u_k|^2}{z^2} \delta^3(k - k'). \quad (4.51)$$

Из определения переменной z (4.14) получим

$$z \equiv a \frac{\phi'}{\mathcal{H}} = \frac{a\dot{\phi}}{H}, \quad \left(\phi' = \frac{d\phi}{d\eta} = \frac{d\phi}{dt} \frac{dt}{d\eta} = a\dot{\phi}, \quad \dot{\phi}^2 = -2\dot{H} \right), \quad z^2 = \frac{a^2 \dot{\phi}^2}{H^2} = -2a^2 \frac{\dot{H}}{H^2} = 2a^2 \epsilon.$$

Таким образом, из уравнения (4.36), определим *спектр мощности скалярных возмущений*

$$P_{\mathcal{R}}(k) = \frac{k^3 |u_k|^2}{2\pi^2 z^2} = \frac{C^2(\nu)}{2\epsilon} \left(\frac{H}{2\pi} \right)^2 \left(\frac{k}{aH} \right)^{3-2\nu}. \quad (4.52)$$

На пересечении радиуса Хаббла $k = aH$ получим

$$P_S(k) = \frac{C^2(\nu)}{2\epsilon} \left(\frac{H}{2\pi} \right)_{k=aH}^2, \quad (4.53)$$

где индекс \mathcal{R} мы заменили индексом S , соответствующий скалярным возмущениям.

Далее, из условия $k = aH$ запишем

$$d \ln k = H dt + \frac{\dot{H}}{H} dt = H(1 - \epsilon) dt = \frac{H}{\dot{\phi}} (1 - \epsilon) dt = \frac{H}{2H'_\phi} (\epsilon - 1) d\phi = \left(\frac{H'_\phi}{H} - \frac{H}{2H'_\phi} \right) d\phi. \quad (4.54)$$

Спектральный индекс (или наклон спектра) скалярных возмущений определяется следующим образом

$$n_s - 1 \equiv \frac{d \ln P_s(k)}{d \ln k} = \frac{1}{H(1-\epsilon)} \left[\frac{d \ln P_s(t)}{dt} \right]. \quad (4.55)$$

Спектральный индекс записывается в виде $n_s - 1$, поскольку спектральный индекс плоского спектра Харрисона-Зельдовича $n_s = 1$ и выражение (4.55) определяет отклонение от этого спектра.

Из определения (4.55) получим точное выражение для спектрального индекса скалярных возмущений на пересечении радиуса Хаббла

$$n_s - 1 = -\frac{1}{H^2 \epsilon (1-\epsilon)^3} \{ 2\Psi(\nu) H \epsilon (\dot{\epsilon} \delta - \delta \dot{\epsilon} - 2\dot{\epsilon} + \dot{\delta}) + \dot{\epsilon} \epsilon H [2 \ln(1-\epsilon)(\delta - 2\epsilon) + 2 \ln 2(\delta - 2) + 3\epsilon - 2\delta] + \\ + 2H \epsilon \dot{\delta} (1-\epsilon) \ln[2(1-\epsilon)] - 2\dot{H} \epsilon (1-\epsilon)^2 + H \dot{\epsilon} \}, \quad (4.56)$$

где $\Psi(\nu)$ - дигамма функция, которая, при постоянном значении параметра $\nu = n$, определяется как $\Psi(n) = H_{n-1} - \gamma$, где H_{n-1} - гармоническое число, $\gamma \approx 0.57722$ - постоянная Эйлера. Таким образом, $\Psi\left(\frac{3}{2}\right) = 2 - \gamma - 2 \ln 2$.

Также, для анализа космологических возмущений вводят дополнительный параметр – «убегание» возмущений, который рассчитывается по формуле

$$\frac{dn_s}{d \ln k} \equiv \frac{1}{H(1-\epsilon)} \left(\frac{dn_s}{dt} \right) = \frac{1}{H(1-\epsilon)} \left(\frac{d(n_s - 1)}{dt} \right). \quad (4.57)$$

Теперь рассмотрим тензорные возмущения

$$\sum_{\lambda} \langle 0 | h_{k,\lambda}^* h_{k',\lambda} | 0 \rangle = \frac{s}{a^2} v_k \ell^2 \delta^3(k - k') \equiv \frac{2\pi^2}{k^3} P_g(k) \delta^3(k - k'), \quad (4.58)$$

где нормировке (4.41) соответствует значение $s = 8$, а нормировке (4.42) $s = 2$.

Для нормировки (4.42) $s=2$, на пересечении радиуса Хаббла, получим *спектр мощности тензорных возмущений*

$$\mathcal{P}_T(k) = 2 \times C^2(\mu) \left(\frac{H}{2\pi} \right)_{k=aH}^2 = 2C^2(\mu) \left(\frac{H}{2\pi} \right)_{k=aH}^2, \quad (4.59)$$

где, при умножении на 2, мы учитываем две возможных поляризации («+» и «×») гравитационных волн.

Спектральный индекс (или наклон спектра) тензорных возмущений

$$n_T \equiv \frac{d \ln P_g(k)}{d \ln k} = \frac{1}{H(1-\epsilon)} \left[\frac{d \ln P_g(t)}{dt} \right], \quad (4.60)$$

$$n_T = \frac{2}{H^2 \epsilon (1-\epsilon)^3} \left\{ H \dot{\epsilon} (\Psi(\mu) + \ln[2(1-\epsilon)] - 1) + \dot{H} \epsilon (1-\epsilon)^2 \right\}. \quad (4.61)$$

Также запишем «убегание» тензорных возмущений

$$\frac{dn_T}{d \ln k} \equiv \frac{1}{H(1-\epsilon)} \left(\frac{dn_g}{dt} \right). \quad (4.62)$$

Отметим, что выражения (4.49) и (4.54) спектральных индексов скалярных и тензорных возмущений отличается от представленных в работах [26-28] и совпадают с ними только в приближении медленного скатывания, которое мы не используем при анализе космологических возмущений.

Важным параметром космологических возмущений является *тензорно-скалярное отношение*, которое, на пересечении радиуса Хаббла, определяется как отношение спектров мощности тензорных и скалярных возмущений

$$r \equiv \frac{P_T}{P_S} = 4\epsilon \frac{C^2(\mu)}{C^2(\nu)} = 4 \frac{1-2\epsilon+\delta}{1-\epsilon} \epsilon (1-\epsilon)^{\frac{2(\delta-\epsilon)}{1-\epsilon}} \frac{\Gamma^2(\mu)}{\Gamma^2(\nu)}. \quad (4.63)$$

Запишем условия для параметров $C(\nu)$, $C(\mu)$, ν и μ на пересечении радиуса Хаббла

$$C(\nu) \approx 1, \quad \nu \approx 3/2, \quad (4.64)$$

$$C(\mu) \approx 1, \quad \mu \approx 3/2. \quad (4.65)$$

Условия (4.64)-(4.65) удовлетворяются в случае $\epsilon, \delta \ll 1$, что соответствует приближению медленного скатывания, также параметры $C(\nu)$, $C(\mu)$, ν и μ постоянные для степенной инфляции с параметром Хаббла $H = (At + B)^{-1}$

$$\epsilon = \delta = A, \quad \nu = \mu = \frac{1}{1-\epsilon} + \frac{1}{2},$$

$$C(\nu) = C(\mu) = \left(2^{\frac{1}{1-\epsilon}-1} \right) \frac{\Gamma\left(\frac{1}{1-\epsilon} + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)} (1-\epsilon)^{1/(1-\epsilon)} = const.$$

Таким образом, при выполнении условий (4.64)-(4.65) на пересечении радиуса Хаббла, мы получим следующие выражения для параметров космологических возмущений

$$r = 4\epsilon, \quad \mathcal{P}_S(k) = \frac{1}{2\epsilon} \left(\frac{H}{2\pi} \right)^2, \quad \mathcal{P}_T(k) = 2 \left(\frac{H}{2\pi} \right)^2, \quad (4.66)$$

$$n_s - 1 = 2 \left(\frac{\delta - 2\epsilon}{1-\epsilon} \right), \quad n_T = -\frac{2\epsilon}{1-\epsilon}, \quad (4.67)$$

$$\frac{dn_s}{d \ln k} = -\frac{2(2\delta^2\epsilon - \delta\epsilon^2 - 5\delta\epsilon + 4\epsilon^2 - \epsilon\xi + \xi)}{(1-\epsilon)^3}, \quad \frac{dn_T}{d \ln k} = -\frac{4(\epsilon^2 - \epsilon\delta)}{(1-\epsilon)^3}, \quad (4.68)$$

$$\frac{n_s - 1}{n_T} = 2 - \frac{\delta}{\epsilon}. \quad (4.69)$$

Отметим, что в случае другой нормировки тензоров поляризации гравитационных волн (4.41) мы получим $r = 16\epsilon$ и $\mathcal{P}_T(k) = (H^2/8\pi^2\epsilon)$, остальные соотношения не изменятся. Также, для вычисления параметров космологических возмущений, в случае приближения медленного скатывания, можно использовать формулы (4.66)-(4.69) с учетом $1-\epsilon \approx 1$.

Теперь запишем отношения основных параметров космологических возмущений на основе точных и приближенных решений, которые не зависят от нормировки тензоров поляризации гравитационных волн

$$\frac{r_{ex}}{r_{sr}} = \frac{\epsilon}{\epsilon_V} = 2\epsilon \left(\frac{V}{V'_\phi} \right)^2 = \left(\frac{3-\epsilon}{3-\delta} \right)^2 \equiv \gamma^2, \quad (4.70)$$

$$\mathcal{P}_T(k)_{ex} = \mathcal{P}_T(k)_{sr}, \quad \frac{\mathcal{P}_S(k)_{ex}}{\mathcal{P}_S(k)_{sr}} = \left(\frac{3-\delta}{3-\epsilon} \right)^2 = \frac{1}{\gamma^2}, \quad (4.71)$$

$$\frac{(n_s - 1)_{ex}}{(n_s - 1)_{sr}} = \frac{1}{1-\epsilon} \equiv \frac{1}{\psi}, \quad \frac{(n_g)_{ex}}{(n_g)_{sr}} = \frac{1}{1-\epsilon} = \frac{1}{\psi}, \quad 0 < \psi \leq 1, \quad (4.72)$$

где мы определяем *параметры расхождения* γ и ψ . Очевидно, что в случае приближения медленного скатывания $\epsilon \ll 1$, $\delta \ll 1$ получим $\gamma = 1$, $\psi = 1$ и параметры космологических возмущений для точных и приближенных решений совпадают.

В таблице 4.1 приведены параметры расхождения γ и ψ для представленных ранее в таблице 3.1 моделей.

Параметр Хаббла	Параметр $\gamma = \frac{3-\epsilon}{3-\delta} = 1 + \frac{\delta-\epsilon}{3-\delta}$	Параметр $\psi = 1 - \epsilon$
$H(t) = -\frac{2}{3}Bt$	$1 - \frac{1}{2Bt^2}$	$1 - \frac{3}{2Bt^2}$
$H(t) = B \exp(-At)$	$1 + \frac{Ae^{At}}{Ae^{At} - 6B}$	$1 - \frac{A}{B} \exp(At)$
$H(t) = -\frac{AB}{3} \tan(At)$	$1 + \frac{\cot^2(At)}{(1-B)}$	$1 - \frac{3}{B \sin^2(At)}$
$H(t) = \frac{AB}{3} \tanh(At)$	$1 + \frac{2 - \cosh^2(At)}{(1-B) \sinh^2(At)}$	$1 - \frac{3}{B \sinh^2(At)}$

$H(t) = \frac{B}{3t} - \frac{A}{3B}$	$1 - \frac{AB(At + 3B^2)t}{(At - B^2 + B)(At + B^2)^2}$	$1 - \frac{3B^3}{(At + B^2)^2}$
$H(t) = A \left[\frac{(B+4)}{6AB} t \right]^{\frac{B}{B+4}}$	$1 + \frac{2 \left[\frac{(B+4)}{6AB} t \right]^{\frac{B}{B+4}}}{3A(B+4)t - (B+2) \left[\frac{(B+4)}{6AB} t \right]^{\frac{B}{B+4}}}$	$1 - \frac{B \left[\frac{(B+4)}{6AB} t \right]^{\frac{B}{B+4}}}{A(B+4)t}$
$H(t) = A^2 B \coth(2Bt)$	$1 - \frac{2(A - \cosh^2(At))}{(3A^2 - 2)\cosh^2(At)}$	$1 - \frac{2}{A \cosh^2(At)}$
$H(t) = \frac{A^2 B}{6} \coth^3(Bt)$	$1 + \frac{2(\cosh^4(At) - 3\cosh^2(At) + 2)}{A^2 \cosh^4(At) - 2\cosh^2(At) + 2}$	$1 + \frac{18(1 - \cosh^2(Bt))}{A^2 \cosh^4(Bt)}$
$H(t) = C \ln(At + B)$	$1 + \frac{1 + \ln(At)}{\ln(At)(6Ct \ln(At) - 1)}$	$1 - \frac{1}{2Ct \ln^2(At)}$

Таблица 4.1. В таблице приведены параметры расхождения для различных космологических моделей на основе точных решений. Значения параметров расхождения γ и ψ зависят от времени пересечения возмущениями радиуса Хаббла $t = t_H$ и значений постоянных A, B .

Из соотношений (4.70)-(4.72) можно оценить значения параметров γ, ψ и по приближенным решениям, исходя только из зависимости параметра Хаббла от времени для случая $H_{ex} = H_{sr}$.

Параметры космологических возмущений должны соответствовать наблюдательным ограничениям. Приведем данные спутника PLANCK [19]

$$10^9 \mathcal{P}_S = 2.142 \pm 0.049, \quad \mathcal{P}_T = r \mathcal{P}_S, \quad (4.73)$$

$$n_S = 0.9667 \pm 0.0040, \quad r < 0.112. \quad (4.74)$$

Таким образом, исходя из соотношений (4.70)-(4.72), можно оценить погрешность приближения медленного скатывания и соответствие наблюдениям моделей, основанных на этом приближении.

Метод определения параметров космологических возмущений на основе точных решений впервые рассматривался в работе [200] для степенной инфляции и получил дальнейшее развитие в работах [201-204].

Теперь рассмотрим параметры космологических возмущений в терминах числа e -фолдов.

Согласно определению параметра медленного скатывания $\epsilon = -\dot{H}/H^2$ и числа e -фолдов $\dot{N} = H$ запишем

$$\epsilon = -\frac{d \ln H(N)}{dN}. \quad (4.75)$$

Из определений остальных параметров медленного скатывания (3.13)-(3.14) получим

$$\delta = \epsilon - \frac{1}{2} \frac{d \ln \epsilon}{dN}, \quad (4.76)$$

$$\xi = \epsilon \delta - \frac{d\delta}{dN}. \quad (4.77)$$

Таким образом, спектры мощности и спектральный индекс скалярных возмущений в терминах числа e -фолдов, с учетом (4.66)-(4.67), запишем как

$$\mathcal{P}_S(N) = \frac{C^2}{2\pi^2 \epsilon(N)} \exp(-2 \int \epsilon(N) dN), \quad (4.78)$$

$$\mathcal{P}_T(N) = \frac{2C^2}{\pi^2} \exp(-2 \int \epsilon(N) dN), \quad (4.79)$$

$$n_s(N) - 1 = \frac{\left[-2\epsilon(N) - \frac{d}{dN} \ln \epsilon(N) \right]}{1 - \epsilon(N)}. \quad (4.80)$$

Остальные параметры космологических возмущений в терминах числа e -фолдов можно определить из выражений (4.67)-(4.69).

Таким образом, оценка параметров космологических возмущений, в данном случае, производится по значению $N \approx 60$.

Диаграмма тензорно-скалярное отношение - спектральный индекс скалярных возмущений

При анализе космологических моделей на уровне возмущений поля и метрики необходимо учитывать соответствие параметров (4.66)-(4.69) наблюдательным ограничениям (4.73)-(4.74). Этой цели можно достигнуть за счет выбора свободных параметров моделей, значение которых необходимо согласовать как для оценки числа e -фолдов, так и при вычислении параметров космологических возмущений.

Простым методом верификации моделей космологической инфляции, который позволяет определить соответствие наблюдениям независимо от выбора свободных параметров является использование зависимости $r = r(n_s)$.

В качестве примера рассмотрим модели с потенциалами (3.37) и (3.40), точные решения для которых мы рассматривали ранее в 3 части. Выбирая, в первом случае, постоянную $\alpha = -t_H$ и для второго случая $c_1 = -t_H$, где t_H - время пересечения радиуса Хаббла, получим

$$\epsilon_1 = \delta_1 = \frac{2BC}{A}(2\beta - C) = const. \quad (4.81)$$

для модели инфляции с потенциалом (3.37) и

$$\epsilon_2 = \delta_2 = \frac{A^2 C^2}{\left(\frac{1}{2} A \ln 2 + B\right)^2} = const. \quad (4.82)$$

для инфляции потенциалом (3.40). Индекс «1» соответствует модели с потенциалом (3.37), индекс «2» – модели с потенциалом (3.40).

Исходя из того, что параметры медленного скатывания постоянные, вычислим параметры космологических возмущений непосредственно из соотношений (4.53)-(4.63), в результате, получим:

для нормировки (4.38)

$$r = \frac{16(n_s - 1)}{(n_s - 3)}. \quad (4.83)$$

и для нормировки (4.39)

$$r = \frac{4(n_s - 1)}{(n_s - 3)}. \quad (4.84)$$

Для некоторых моделей космологической инфляции нормировка тензоров поляризации реликтовых гравитационных волн имеет критическое значение при их верифицировании по параметрам космологических возмущений, например, степенная инфляция соответствует наблюдательным данным для нормировочного условия (4.42) [202] и не соответствует при нормировке (4.41) [205].

На Рис 4.1. приведены зависимости $r = r(n_s)$ для двух нормировок тензоров поляризации из которой следует, что зависимость (3.84) удовлетворяет наблюдательным ограничениям (4.73)-(4.74) в большем диапазоне значений спектрального индекса n_s , чем в случае зависимости (4.83).

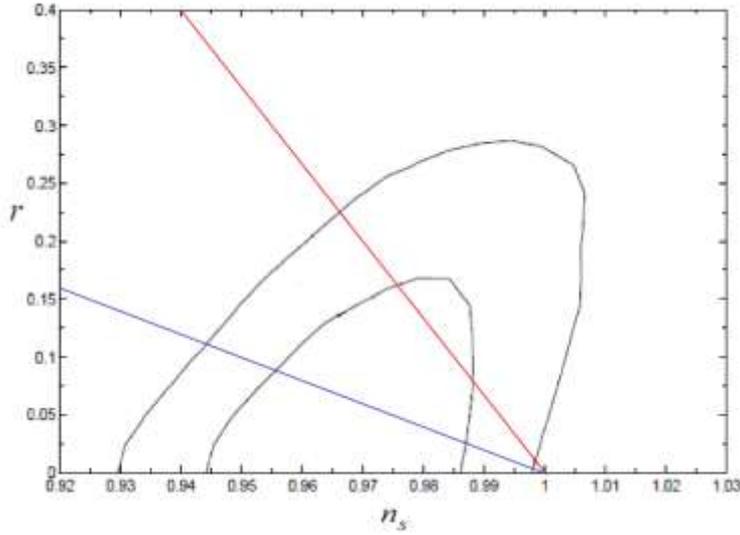


Рис 4.1. Зависимости $r=r(n_s)$ для случаев (4.83) (красная линия) и (4.84) (синяя линия), наложенные на данные наблюдений $WMAP9+BAO+H_0$ [20], то есть на наблюдения анизотропии реликтового излучения, барионных акустических осцилляций и измерения значения параметра Хаббла в современную эпоху для доверительных вероятностей 68% и 95%.

Спектры мощностей, на пересечении радиуса Хаббла, для данных моделей являются плоскими, то есть не зависят от времени (исходя из условия $k = aH = \dot{a}$, спектры мощности не зависят от волнового числа или частоты возмущений)

$$\mathcal{P}_{S1,2} = \frac{C_{1,2}^2(\nu)}{2\epsilon_{1,2}} \left(\frac{H_{1,2}}{2\pi} \right)^2, \quad (4.85)$$

$$\mathcal{P}_{T1,2} = \frac{C_{1,2}^2(\mu)}{2} \left(\frac{H_{1,2}}{2\pi} \right)^2. \quad (4.86)$$

Спектральные индексы

$$n_{S1} - 1 = n_{g1} = -\frac{2\epsilon_1}{1-\epsilon_1}, \quad (4.87)$$

$$n_{S2} - 1 = n_{g2} = -\frac{2\epsilon_2}{1-\epsilon_2}, \quad (4.88)$$

где

$$C_{1,2}(v) = C_{1,2}(\mu) = \left(2^{\frac{1}{1-\epsilon_{1,2}}-1} \right) \frac{\Gamma\left(\frac{1}{1-\epsilon_{1,2}} + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)} (1-\epsilon_{1,2})^{1/(1-\epsilon_{1,2})} = const. \quad (4.89)$$

Также, рассчитаем число е-фолдов как функцию времени

$$N_1(t) = \frac{A}{4B\beta^2} \ln\left(2\beta e^{B(t-\alpha)} - C\right) - \frac{AC}{4B\beta^2\left(2\beta e^{B(t-\alpha)} - C\right)} \approx 60, \quad (4.90)$$

$$N_2(t) = \frac{1}{8C^2} \left\{ 8BC^2t + f\left[1 + \exp\left(-4AC^2(t+c_1)\right)\right] \right\} \approx 60. \quad (4.91)$$

В общем случае, параметры космологических возмущений зависят от времени пересечения радиуса Хаббла, то есть от волнового числа или частоты.

Постинфляционная эволюция космологических возмущений

Рассмотрим последовательность событий при переходе от инфляционной стадии к стадии преобладания излучения и вещества.

Инфляционная стадия завершается распадом скалярного поля и образованием частиц с последующим нуклеосинтезом и дальнейшей эволюцией согласно стандартному сценарию. При этом космологические возмущения различных длин волн (с различным волновым числом k) в течение нескольких е-фолдов после выхода за горизонт становятся классическими величинами. Это время принято отмечать как время t_* [202].

При уходе за горизонт космологические возмущения остаются "вмороженными" в гравитационный фон и не меняют своей амплитуды в сопутствующей системе координат. При вхождении под горизонт (в эпоху преобладания излучения), обозначим это время t_{pr} , амплитуда возмущений эволюционирует известным образом. Считается, что теория космологических

возмущений применима в начальную эпоху, которая начинается до вхождения, интересующих нас космологических масштабов, под горизонт. Начальная эпоха начинается гораздо позже нуклеосинтеза, поэтому материальные составляющие вселенной, за исключением небарионной темной материи, известны. Теоретически установлено каким образом эволюционируют возмущения всех составляющих вселенной после начальной эпохи, если известна плотность энергии каждой из составляющих в это время. Начальный спектр возмущений можно получить посредством функции переноса из вакуумных флуктуаций в момент времени t_* [202,206].

Возмущение любой из составляющих вычисляется через возмущение кривизны R_k при помощи функции переноса

$$g_k(t) = T_g(t, g) R_k \quad (4.92)$$

где R_k определяется в момент времени t_*

$$R_k = \left[-\frac{H}{\dot{\phi}} \delta\phi_k \right]_{t=t_*} \quad (4.93)$$

Уточнение связано именно с вычислением возмущения кривизны на основе точных решений уравнений Эйнштейна (в нулевом приближении), без использования режима медленного скатывания. Так как точные выражения получены для космологических параметров при выходе за горизонт, для сопоставления с наблюдательными данными требуется выполнить перерасчет космологических параметров на современную эпоху. Для этого рассмотрим пост-инфляционную эволюцию космологических возмущений и найдем поправки на космологические параметры.

Воспользуемся стандартным методом пересчета космологических возмущений на фридмановские эпохи. Известно, что в течение стадии преобладания излучения $a \sim t^n$ при $n=1/2$ и стадии преобладания вещества

$a \sim t^n$ при $n = 2/3$ гравитационные возмущения (гравитационный потенциал Φ_k) преобразуются следующим образом:

В случае преобладания излучения

$$\Phi_k = \frac{2}{3} R_k \quad (4.94)$$

Для преобладания вещества

$$\Phi_k = \frac{3}{5} R_k \quad (4.95)$$

Из этих соотношений заключаем, что эволюция возмущений после вхождения под горизонт сводится просто к изменению их амплитуды.

Таким образом, спектр мощности гравитационных возмущений на стадии преобладания материи определяется через спектр возмущений кривизны

$$P_\Phi(MD) = \frac{9}{25} P_R \quad (4.96)$$

Это, в свою очередь, позволяет определить контраст плотности и спектр мощности скалярных возмущений

$$\delta_k = \frac{2}{3} \left(\frac{k}{aH} \right)^2 T_g(t, k) \Phi_k, \quad (4.97)$$

$$P_\delta(k, t) = \frac{4}{25} \left(\frac{k}{aH} \right)^4 T_g(t, k) P_R, \quad (4.98)$$

которые можно сопоставить с наблюдательными данными.

В случае произвольных длин волн (или частот) возмущений, функция переноса может быть найдена численно. Значение функции переноса определяется из соотношения между темной материей, барионным веществом и излучением в эпоху наблюдения [207-209].

Плотность энергии реликтовых гравитационных волн

Плотность энергии гравитационных волн обычно характеризуется безразмерной величиной [210]

$$\Omega_{GW}(f) = \frac{1}{\rho_c} \frac{d\rho_{GW}}{d \ln f}, \quad (4.99)$$

где f - линейная частота $\rho_c = 3H_0^2$ - критическая плотность, H_0 - значение параметра Хаббла в современную эпоху, $\rho_{GW} = \frac{1}{4} \langle \dot{h}_{ab} \dot{h}^{ab} \rangle_\lambda$ - плотность энергии гравитационных волн, полученная из усреднения производных по времени от амплитуд h_{ab} по всем длинам волн λ . В дальнейшем, под плотностью энергии мы будем подразумевать параметр Ω_{GW} .

Также плотность энергии реликтовых гравитационных волн можно представить в терминах спектра мощности [210]

$$\Omega_{GW}(k) = \frac{k^2}{12H_0^2} P_T(k). \quad (4.100)$$

Далее, определим амплитуду реликтовых гравитационных волн [211] в выбранной системе единиц

$$h_{GW}^2 = \frac{1}{4\pi^2} H_{in}, \quad (4.101)$$

где H_{in} - значение параметра Хаббла на завершении стадии инфляции, и запишем выражение спектра мощности для моделей инфляции с учетом кинетической энергии скалярного поля, которые подразумевают дополнительную стадию преобладания кинетической энергии поля и в литературе называются «моделями с кинтэссенцией» [211]

$$\Omega_{GW}^{MD}(f) = \frac{3}{8\pi^2} h_{GW}^2 \Omega_{0m} \left(\frac{f_0}{f} \right), \quad f_0 \leq f < f_{MD}, \quad (4.102)$$

$$\Omega_{GW}^{RD}(f) = \frac{1}{6\pi} h_{GW}^2 \Omega_{0r}, \quad f_{MD} \leq f < f_{RD}, \quad (4.103)$$

$$\Omega_{GW}^{kin}(f) = \frac{3}{8\pi^2} h_{GW}^2 \Omega_{0m} \left(\frac{f}{f_{RD}} \right), \quad f_{RD} \leq f < f_{kin}, \quad (4.104)$$

где частоты определяются как

$$f_0 = \frac{H_0}{2}, \quad (4.105)$$

$$f_{MD} = \frac{3}{2\pi} f_0 \left(\frac{\Omega_{0m}}{\Omega_{0r}} \right)^{1/2}, \quad (4.106)$$

$$f_{RD} = \frac{1}{4} f_0 \left(\frac{\Omega_{0m}}{\Omega_{0r}} \right)^{1/2} \frac{T_{rh}}{T_{MD}}, \quad (4.107)$$

$$f_{kin} = H_{kin} \left(\frac{T_0}{T_{rh}} \right) \left(\frac{H_{rh}}{H_{kin}} \right)^{1/3}, \quad (4.108)$$

где индекс «kin» означает стадию преобладания кинетической энергии скалярного поля, «RD» - стадию преобладания излучения и «MD» - стадию преобладания вещества. Также, $H_0 = 66.93 \pm 0.62 (\text{км/с})/\text{Мпк}$, $\Omega_{0m} = 0.308 \pm 0.012$, $\Omega_{0r} = (9.230 \pm 0.022) \times 10^{-5}$ - значения параметра Хаббла, плотности материи и излучения в настоящее время. Значение температуры повторного разогрева оценивается как $T_{rh} \sim 10^{14}$ ГэВ [211].

На Рис 4.1. представлена зависимость плотности энергии реликтовых гравитационных волн Ω_{GW} от частоты f в случае приближения медленного скатывания и с дополнительной стадией преобладания кинетической энергии, также представлена плотность энергии для других источников гравитационных волн во Вселенной и чувствительность некоторых экспериментов по их обнаружению.

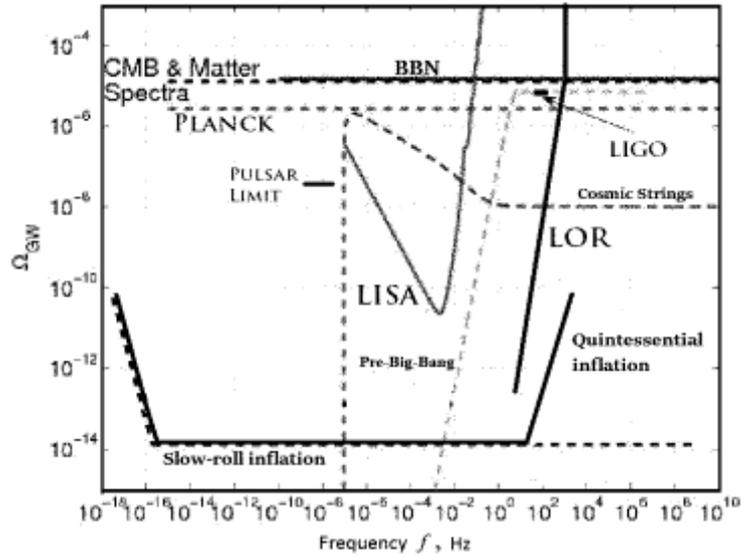


Рис 4.1. (из работы [238]). Зависимость $\Omega_{GW} = \Omega_{GW}(f)$ и чувствительность некоторых гравитационно-волновых экспериментов.

Частота и плотность энергии реликтовых гравитационных волн ограничивается следующими условиями [210]:

- Значение плотности энергии реликтовых гравитационных волн $\Omega_{GW} = k^2 P_g(k) / 12H_0^2$, которые могут повлиять на темп первичного нуклеосинтеза, не должно превышать

$$\int_{f_0}^{\infty} \Omega_{GW} d \ln f < 1.1 \times 10^{-5}, \quad (4.99)$$

где H_0 - параметр Хаббла в эпоху наблюдения, $f_0 \approx 10^{-9}$ Гц.

- Значение температуры скалярного поля T_* и частоты гравитационных волн f на пересечении горизонта событий:

$$T_* = 5.85 \times 10^6 \left(\frac{f}{\Gamma_{\mathcal{U}}} \right) \left(\frac{g_*}{106.75} \right)^{1/6} \Gamma_{\mathcal{B}}, \quad (4.100)$$

$$f = 1.71 \times 10^{-7} \left(\frac{T_*}{\Gamma_{\mathcal{B}}} \right) \left(\frac{g_*}{106.75} \right)^{-1/6} \Gamma_{\mathcal{U}}, \quad (4.101)$$

где g_* - эффективное число степеней свободы (в Стандартной модели элементарных частиц $g_* = 106.75$).

Из Рис 4.1. видно, что эксперимент «LOR», то есть регистрация высокочастотных гравитационных волн на основе низкочастотного оптического резонанса в интерферометрах Фабри-Перо [233,236,238], позволяет исследовать часть спектра, которая связана со стадией преобладания кинематической энергии скалярного поля.

В последующих разделах рассматриваются проблемы детектирования гравитационных волн высоких частот, и приводится подробное описание этого эксперимента.

ЧАСТЬ 5. ДЕТЕКТИРОВАНИЕ ВЫСОКОЧАСТОТНЫХ ГРАВИТАЦИОННЫХ ВОЛН

Проблема регистрации гравитационных волн является на сегодня одной из фундаментальных задач экспериментальной физики. Реализуемые в целом ряде стран проекты создания гравитационных антенн основываются на предположении о наличии гравитационных волн, возникающих из-за различных астрофизических событий, таких как взрывы сверхновых, столкновения звезд и т.д. При этом считается, что указанные астрофизические события вызывают гравитационные волны с частотами 10...1000 Гц [212]. На этот спектральный диапазон и настраиваются строящиеся гравитационные антенны [213].

В данном разделе проведено обоснование возможности существования более высокочастотных гравитационных волн, вызванных флуктуациями плотности темной материи в нашей галактике. Указанные флуктуации метрики пространства-времени могут быть зарегистрированы с помощью интерферометра Фабри-Перо, настроенного на регистрацию в частотном диапазоне $10^4 \dots 10^7$ Гц.

Высокочастотные флуктуации метрики пространства-времени

По современным представлениям темная материя заполняет пространство нашей галактики, имеет свойство гравитационного взаимодействия и массу, превышающую в несколько раз массу звезд нашей галактики [214]. Если предположить, что темная материя представляет собой систему гравитационно взаимодействующих частиц с флуктуирующей с течением времени плотностью $\rho(t)$, то флуктуации метрики пространства-времени в месте наблюдения (на Земле) можно в самом первом приближении оценить по формуле [215, 216]

$$h_{\alpha\beta}(\vec{r}, t) = -\frac{2G}{c^4} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_{V'} \rho \left(t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c}, x'_\alpha \right) \frac{x'_\alpha x'_\beta}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV', \quad \alpha, \beta = 1, 2, 3, \quad (5.1)$$

где G - гравитационная постоянная, c - скорость света в пустоте, \vec{r} - радиус-вектор, определяющий точку наблюдения, \vec{r}' - радиус-вектор, определяющий точку излучения гравитационных волн, x'_α - координаты точки излучения x' , y' и z' соответственно, а числа α и β задают поляризацию гравитационной волны. Интегрирование в выражении (5.1) производится по объему нашей галактики.

Считая плотность темной материи случайным образом изменяющейся величиной на основании формулы (5.1) можно записать выражение для корреляционной функции флуктуаций метрики пространства-времени в точке наблюдения

$$\begin{aligned} \langle h_{\alpha\beta}(\vec{r}, t_2) h_{\alpha\beta}(\vec{r}, t_1) \rangle &= \\ &= \frac{4G^2}{c^8} \frac{\partial^2}{\partial t_2^2} \frac{\partial^2}{\partial t_1^2} \int \int_{V', V''} \left\langle \rho \left(t_2 - \frac{|\vec{r} - \vec{r}''|}{c}, x''_\alpha \right) \rho \left(t_1 - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c}, x'_\alpha \right) \right\rangle \frac{x''_\alpha x''_\beta}{|\vec{r} - \vec{r}''|} \frac{x'_\alpha x'_\beta}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV'' dV', \end{aligned} \quad (5.2)$$

где корреляционную функцию флуктуаций плотности темной материи считаем имеющим вид, аналогичный корреляционной функции равновесных флуктуаций плотности газа

$$\begin{aligned} \left\langle \rho \left(t_2 - \frac{|\vec{r} - \vec{r}''|}{c}, x''_\alpha \right) \rho \left(t_1 - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c}, x'_\alpha \right) \right\rangle &= \\ &= \frac{1}{2} \rho_0 m_0 \tau_0 \delta \left(t_2 - \frac{|\vec{r} - \vec{r}''|}{c} - t_1 + \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c} \right) \delta(x'' - x') \delta(y'' - y') \delta(z'' - z'), \end{aligned} \quad (5.3)$$

где ρ_0 - средняя плотность темной материи, m_0 и τ_0 - масса и постоянная времени хаотизации частиц темной материи соответственно.

Подстановка формулы (5.3) в выражение (5.2) и проведение интегрирования по объему V'' дает

$$\langle h_{\alpha\beta}(\vec{r}, t_2) h_{\alpha\beta}(\vec{r}, t_1) \rangle = \frac{2G^2 \rho_0 m_0 \tau_0}{c^8} \int_{V'} \frac{x''_\alpha x''_\beta}{(\vec{r} - \vec{r}'')^2} dV' \frac{\partial^2}{\partial t_2^2} \frac{\partial^2}{\partial t_1^2} \delta(t_2 - t_1). \quad (5.4)$$

Интеграл по объему галактики можно представить в виде следующего оценочного выражения

$$\int_{V'} \frac{x'_\alpha{}^2 x'_\beta{}^2}{(\vec{r} - \vec{r}')^2} dV' = L_{\alpha\beta}^5, \quad (5.5)$$

где $L_{\alpha\beta}$ - характерные размеры галактики в различных направлениях. Тогда имеем

$$\langle h_{\alpha\beta}(\vec{r}, t_2) h_{\alpha\beta}(\vec{r}, t_1) \rangle = \frac{2G^2 \rho_0 m_0 \tau_0 L_{\alpha\beta}^5}{c^8} \frac{\partial^2}{\partial t_2^2} \frac{\partial^2}{\partial t_1^2} \delta(t_2 - t_1). \quad (5.6)$$

Далее будем считать, что величины $L_{\alpha\beta} = L_0$, где L_0 - характерный размер галактики, а массу темной материи в галактике

$$M_0 = \rho_0 L_0, \quad (5.7)$$

получим оценку для корреляционной функции флуктуаций метрики пространства времени

$$\langle h(t_2) h(t_1) \rangle = \frac{2G^2 M_0 m_0 \tau_0 L_0^2}{c^8} \frac{\partial^2}{\partial t_2^2} \frac{\partial^2}{\partial t_1^2} \delta(t_2 - t_1). \quad (5.8)$$

Для проведения дальнейших оценок предположим, что произведение массы частицы темной материи m_0 на постоянную времени её хаотизации τ_0 может быть представлено в виде

$$m_0 \tau_0 = \frac{\hbar}{c^2}, \quad (5.9)$$

где \hbar - постоянная Планка. Очевидно, что такое представление имеет достаточно мало обоснований, но, тем не менее, позволяет получить оценку, носящую характер некоторой верхней границы.

Выражение (5.8) с учетом формулы (5.9) позволяет определить спектральную плотность флуктуаций метрики пространства-времени в точке наблюдения (на Земле)

$$G_h(\omega) = \frac{2G^2 M_0 \hbar L_0^2}{c^{10}} \omega^4. \quad (5.10)$$

Подстановка в это выражение значений гравитационной постоянной G , постоянной Планка \hbar , скорости света в пустоте c , а также массу темной материи в нашей галактике $M_0 = 10^{42}$ кг и характерного размера галактики $L_0 = 10^{21}$ м, получим выражение для оценки спектральной плотности флуктуаций метрики $h(t)$:

$$G_h(\omega) = 10^{-56} \omega^4 \text{ Гц}^{-1}. \quad (5.11)$$

Как следует из этого выражения, спектральная мощность флуктуаций метрики $h(t)$ сильно возрастает (как функция четвертой степени) при увеличении частоты. Следовательно, наиболее эффективно указанные флуктуации метрики должны регистрироваться в высокочастотной части спектра.

Описание интерферометра Фабри-Перо

Принцип использования пары свободных масс-зеркал и лазерного интерферометра для регистрации их малых колебаний, вызванных гравитационной волной, был впервые предложен в работе [217]. В настоящее время указанный принцип широко используется в современных лазерных интерференционных гравитационных антеннах (проекты LIGO, VIRGO, ТАМА, GEO-600 и др.), основным элементом которых является интерферометр Фабри-Перо.

Для нахождения отклика интерферометра Фабри-Перо на флуктуации метрики пространства-времени $h(t)$ используем математическую модель,

разработанную в [218, 219]. В рамках этой модели предполагается, что используемый лазер стабилизирован по частоте ω_e и мощности W_0 и создает на входе в интерферометр Фабри-Перо гармоническую световую волну с волновым числом k_e и амплитудой E_0 . Указанные величины связаны между собой следующими соотношениями:

$$\omega_e = ck_e, \quad (5.12)$$

$$W_0 = \frac{1}{2} \varepsilon_0 S c E_0^2, \quad (5.13)$$

где ε_0 - диэлектрическая проницаемость вакуума, S - площадь зеркал интерферометра Фабри-Перо.

Регистрация флуктуаций метрики $h(t)$ с помощью интерферометра Фабри-Перо заключается в измерении текущего расстояния между зеркалами интерферометра по изменению мощности прошедшего интерферометр излучения $W_A(t)$. При этом зеркала интерферометра считаются установленными на слабо связанных с основанием массах. Для выполнения этого условия при регистрации низкочастотных гравитационных волн (с частотой 10...1000 Гц) необходима специальная развязка с фундаментом [220]. При регистрации высокочастотных флуктуаций метрики (с частотой 10...1000 кГц) зеркала резонатора могут быть достаточно жестко связаны между собой и с основанием интерферометра, так как для этого случая выполняется условие малости механической частоты колебаний зеркал ω_3 по сравнению с частотой флуктуаций метрики пространства-времени ω_h : $\omega_3 \ll \omega_h$ [216]. Для интерферометра Фабри-Перо с расстоянием между зеркалами $L=10$ м указанное условие выполняется для частот флуктуаций метрики в диапазоне от 10 кГц до 100 МГц.

Далее для простоты будем считать зеркала интерферометра Фабри-Перо одинаковыми, имеющими амплитудный коэффициент отражения R и

амплитудный коэффициент пропускания η . В современных интерферометрах Фабри-Перо коэффициент отражения R достигает значения 0,99999.

Следуя работе [219] будем считать, что в попадающее в интерферометр лазерное излучение описывается монохроматической волной

$$E(t, x) = E_0 \exp[i(\omega_e t - k_e x)], \quad (5.14)$$

где i - мнимая единица. Тогда после многократных переотражений из интерферометра Фабри-Перо выйдет излучение, описываемое выражением

$$E_a(t, x) = \eta^2 E_0 \sum_{n=1}^{\infty} R^{2(n-1)} \exp\left[i\left(\omega_e t - \left(n - \frac{3}{2}\right)\kappa - k_e \left(x + 2 \sum_{l=0}^{n-1} (x_2(t - (2l+1)t_0) - x_1(t - 2lt_0))\right)\right)\right], \quad (5.15)$$

где $\kappa = 2k_e L - 2\pi N$ - параметр фазовой настройки интерферометра Фабри-Перо, L - расстояние между зеркалами интерферометра, N - целое число длин волн, укладывающееся на длине интерферометра, x_1 и x_2 - смещение первого и второго зеркал интерферометра соответственно при флуктуациях метрики $h(t)$, $t_0 = L/c$ - время однократного прохождения светом расстояния между зеркалами. Смещение зеркал при флуктуациях метрики $h(t)$ определяется выражениями

$$x_2(t) = -x_1(t) = \frac{1}{2} L h(t). \quad (5.16)$$

Для простоты будем считать, что фотоприемник, регистрирующий прошедшее интерферометр Фабри-Перо излучение, расположен сразу после второго зеркала и имеет координату $x = L$. Тогда мощность регистрируемого фотоприемником прошедшего интерферометр излучения будет определяться выражением

$$W_A(t) = \frac{1}{2} \varepsilon_0 S c E(t, L) E^*(t, L), \quad (5.17)$$

где $E^*(t, L)$ - комплексно сопряженная с напряженностью поля $E(t, L)$ величина.

Подстановка в формулу (5.17) выражения (5.15) с учетом (5.13) дает

$$W_A(t) = \eta^4 W_0 \left\{ \left[\sum_{n=1}^{\infty} R^{2(n-1)} \cos \Phi_n(t) \right]^2 + \left[\sum_{n=1}^{\infty} R^{2(n-1)} \sin \Phi_n(t) \right]^2 \right\}, \quad (5.18)$$

где

$$\Phi_n(t) = -(n-1)\kappa - 2k_e \sum_{l=0}^{n-1} (x_2(t - (2l+1)t_0) - x_1(t - 2lt_0)). \quad (5.19)$$

Здесь $k_e = 2\pi/\lambda_e$, λ_e - длина волны лазерного излучения.

Как было показано в работах [219, 221-223] особенностью интерферометра Фабри-Перо является наличие низкочастотного оптического резонанса. Это явление заключается в возникновении резонансного отклика на возмущение, имеющее частоту близкую к собственной частоте низкочастотного оптического резонанса

$$\omega_0 = \frac{\kappa}{2t_0}. \quad (5.20)$$

При этом добротность указанного резонанса

$$Q = \frac{\kappa}{2\Delta} \quad (5.21)$$

зависит от параметра фазовой настройки κ и величины потерь Δ за один цикл переотражений в интерферометре, которая для случая использования идеальных зеркал без поглощения определяется выражением

$$\Delta = \eta^2 = 1 - R^2. \quad (5.22)$$

Наличие низкочастотного оптического резонанса необходимо учитывать при определении фазовой настройки κ интерферометра Фабри-Перо для целей регистрации флуктуаций метрики $h(t)$.

Математическое моделирование отклика интерферометра Фабри-Перо

Проведем математическое моделирование отклика интерферометра Фабри-Перо на высокочастотные флуктуации метрики $h(t)$, спектральная плотность которых задается выражением (5.11). На рис. 5.1 приведен график спектральной плотности $G_h(f)$, полученный при моделировании его случайным шумом со спектром (5.11).

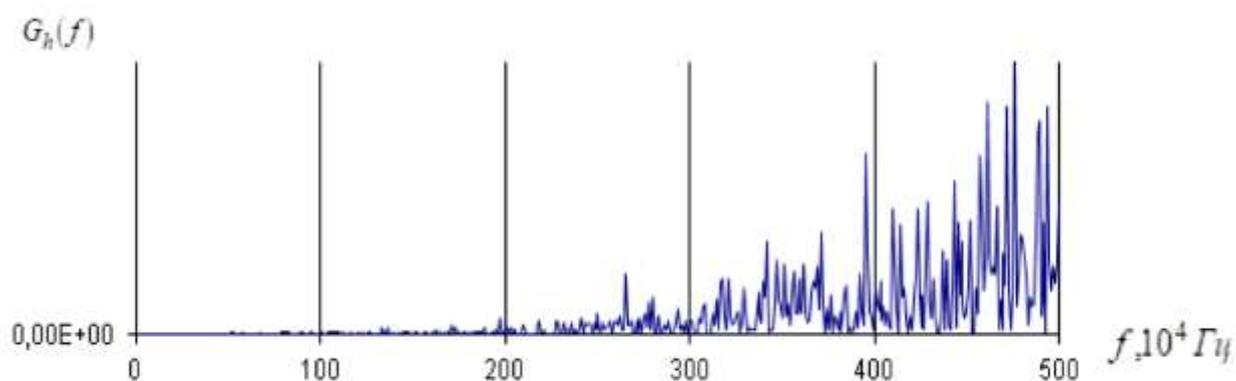


Рис. 5.1. Спектральная плотность флуктуаций метрики h .

При расчетах будем считать, что мощность лазерного излучения на входе в интерферометр Фабри-Перо $W_0 = 0,3$ Вт, его длина волны $\lambda_e = 1,064$ мкм (лазер непрерывный одночастотный YAG:Nd); длина интерферометра Фабри-Перо $L = 1,5$ м, а потери при однократном переотражении в нем равны $\Delta = 0,01$. Очевидно, что указанное значение потерь Δ не является на сегодняшний день предельным, так как для лучших интерферометров оно может достигать величины $\Delta = 10^{-4} \dots 10^{-5}$, но в рамках модельного расчета, призванного качественно продемонстрировать возможность регистрации флуктуаций метрики $h(t)$, принятое значение оправдано.

На рис. 5.2 показана зависимость спектральной плотности относительных флуктуаций мощности излучения

$$\delta W_A(t) = \frac{W_A(t)}{W_0} \quad (5.23)$$

прошедшего интерферометр Фабри-Перо, находящегося в поле флуктуаций метрики $h(t)$, от параметра фазовой настройки интерферометра κ .

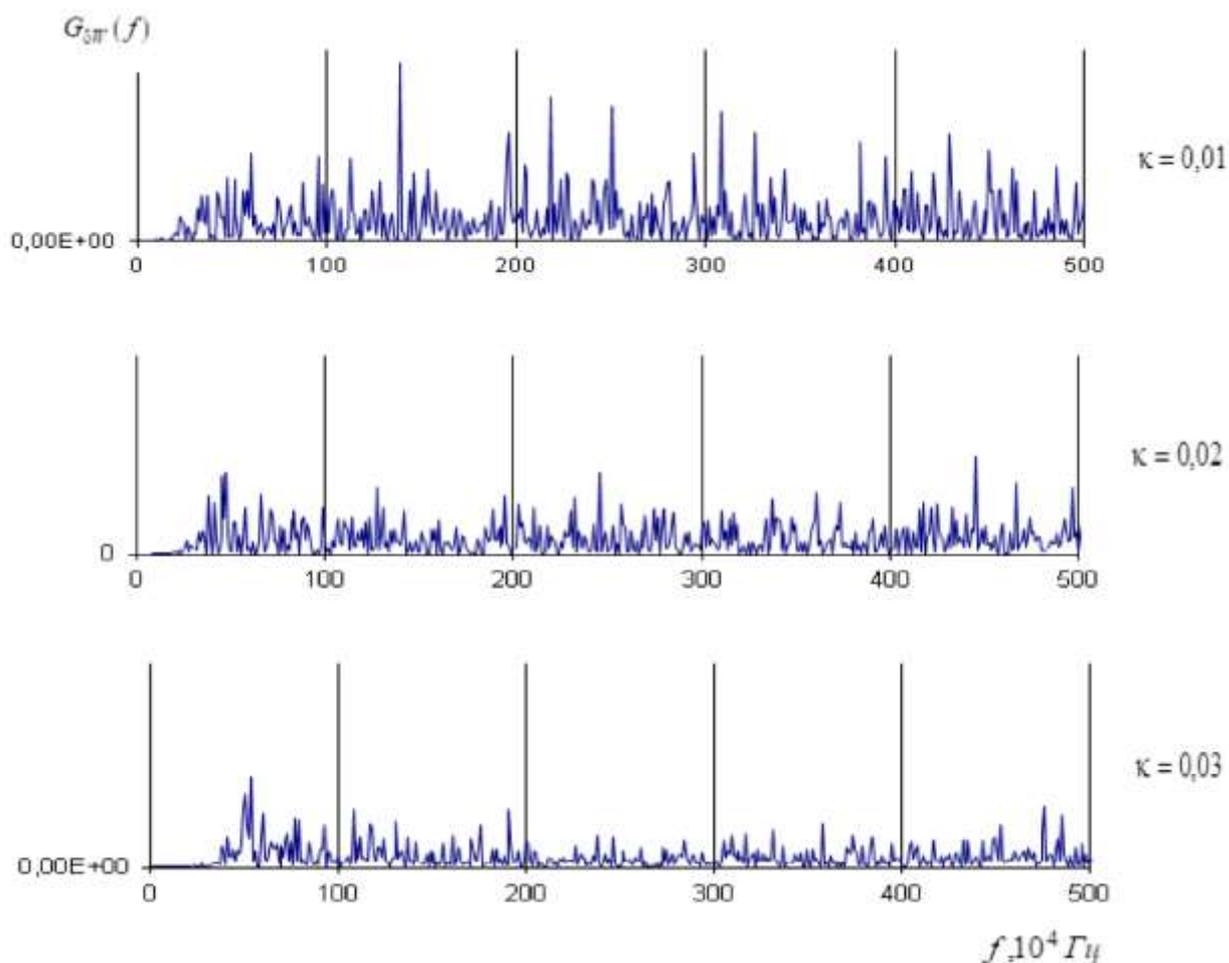


Рис. 5.2. Спектральные плотности флуктуаций относительной мощности излучения, прошедшего интерферометр Фабри-Перо, в зависимости от параметра фазовой настройки κ .

Как видно из этих графиков, начиная с частоты порядка 10^5 Гц, наблюдается равномерная спектральная плотность флуктуаций относительной мощности излучения с интенсивностью $G_{\delta W} = 10^{-22}$ Гц⁻¹. По

мере увеличения параметра фазовой настройки κ происходит постепенное уменьшение чувствительности интерферометра в области высоких частот, но при этом начинает прорисовываться в низкочастотной области резонансная кривая, указывающая на явление низкочастотного оптического резонанса. При этом спектральная плотность флуктуаций относительной мощности $\delta W(t)$ в пике резонанса сохраняется неизменной. Наиболее отчетливо это видно на рис. 5.3, рассчитанным при $\kappa = 0,10$. Кроме этого указанный рисунок показывает сдвиг резонансной частоты в область высоких частот в полном соответствии с формулой (5.20).

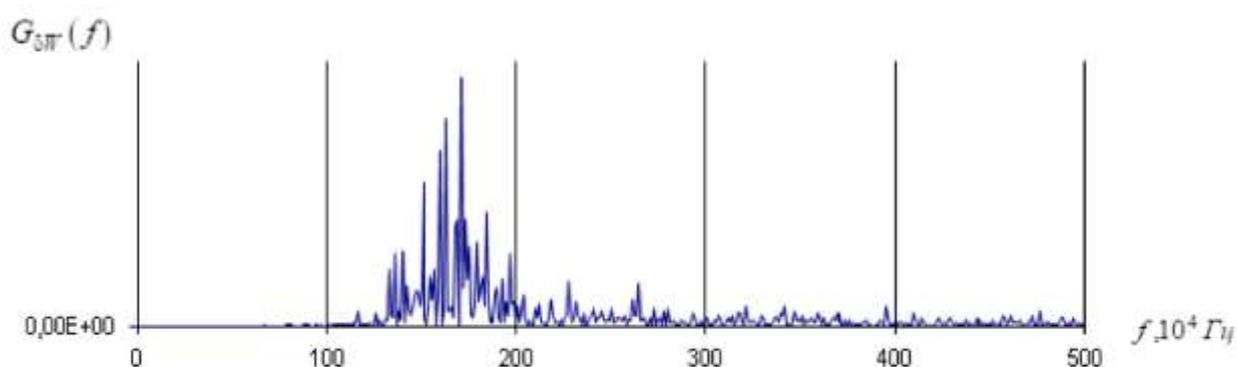


Рис. 5.3. Иллюстрация явления низкочастотного оптического резонанса при

$$\Delta = 0,01 \text{ и } \kappa = 0,10$$

На рис. 5.4 приведены значения дисперсии флуктуаций относительной мощности вышедшего из интерферометра излучения в диапазоне частот $10^4 \dots 5 \cdot 10^6$ Гц. Как следует из этого графика дисперсия флуктуаций принимает максимальное значение при условии $\kappa = \Delta$ медленно снижается при увеличении параметра κ .

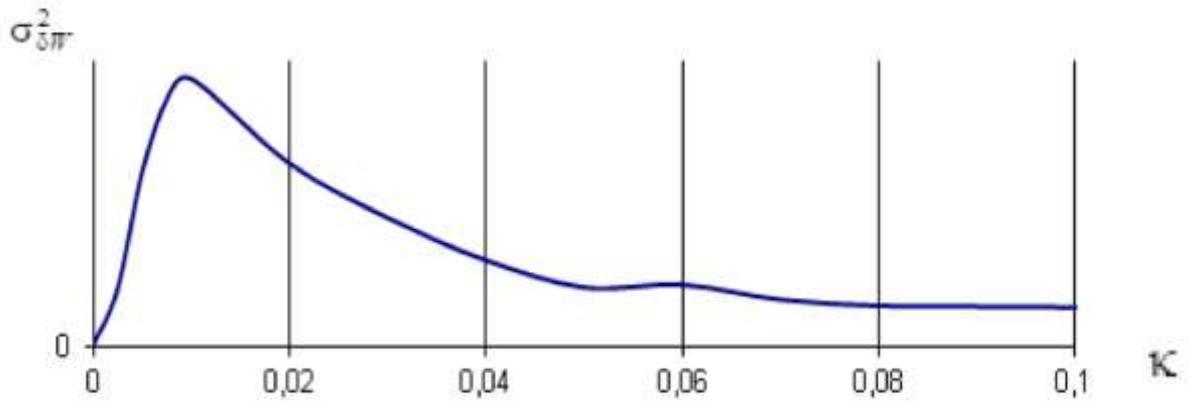


Рис. 5.4. Зависимость дисперсии флуктуаций относительной мощности излучения, прошедшего интерферометр Фабри-Перо, от параметра фазовой настройки κ .

В качестве основного мешающего фактора при измерениях флуктуаций метрики $h(t)$ с помощью интерферометра Фабри-Перо выступает фотонный шум. Его величина может быть оценена по формуле

$$G_{\delta W_e} = \frac{2\pi c \hbar}{\lambda_e W_0}, \quad (5.24)$$

где \hbar - постоянная Планка. Оценка по этой формуле для указанных выше значений параметров лазерного излучения дает $G_{\delta W_e} = 10^{-18} \text{ Гц}^{-1}$.

Несмотря на то, что величина спектральной плотности флуктуаций $G_{\delta W}$, вызванных изменениями метрики пространства-времени $h(t)$, на четыре порядка меньше спектральной плотности фотонных флуктуаций $G_{\delta W_e}$, при усреднении на достаточно больших промежутках времени

$$\tau > \frac{G_{\delta W_e}^2}{G_{\delta W}^2} \frac{1}{\Delta f}, \quad (5.25)$$

где Δf - полоса частот усреднения флуктуаций, флуктуации метрики пространства-времени могут быть зарегистрированы. Так как для рассматриваемого случая полоса частот Δf достигает нескольких мегагерц,

то при усреднении на промежутках времени порядка минуты возникает возможность выделения сигнала, связанного с флуктуациями метрики пространства-времени $h(t)$.

Выполненное моделирование интерферометра Фабри-Перо показало, что с его помощью могут быть зарегистрированы высокочастотные флуктуации метрики пространства-времени $h(t)$, вызванные флуктуациями плотности темной материи в нашей галактике. При этом регистрация указанных флуктуаций метрики может быть осуществлена путем долговременных измерений дисперсии флуктуаций мощности оптического излучения, прошедшего интерферометр Фабри-Перо. Величина дисперсии флуктуаций должна изменяться при изменении пространственной ориентации интерферометра относительно плоскости галактики. Изменение пространственной ориентации интерферометра происходит при естественном вращении Земли и, следовательно, при измерениях дисперсии флуктуаций мощности должны наблюдаться суточные вариации указанной дисперсии с периодом, равным звездным суткам.

ЧАСТЬ 6. РЕГИСТРАЦИЯ ВЫСОКОЧАСТОТНЫХ ГРАВИТАЦИОННЫХ ВОЛН С ПОМОЩЬЮ НИЗКОЧАСТОТНОГО ОПТИЧЕСКОГО РЕЗОНАНСА

Проблема исследования Вселенной требует разработки новых методов регистрации происходящих в ней астрофизических явлений. Одним из перспективных способов наблюдательной космологии является регистрация гравитационных волн астрофизического происхождения. Для решения задачи создания гравитационно-волновых детекторов необходимо проведение исследований, направленных на разработку высокочувствительных лазерных интерферометров.

На сегодняшний день реализуется несколько проектов поиска гравитационных волн, такие как проекты LIGO (США), VIRGO (Италия, Франция), ТАМА-300 (Япония), GEO 600 (Германия) и др. [220, 224-227]. Основной их особенностью является попытка регистрации коротких всплесков гравитационных волн астрофизического происхождения от достаточно редких событий, таких как коллапс звезд с образованием черной дыры или слияние нейтронных звезд [212, 216]. Для регистрации указанных событий разрабатываются детекторы, имеющие максимальную чувствительность в диапазоне частот от 100 до 1000 Гц.

Другим возможным источником гравитационно-волнового возмущения являются реликтовые гравитационные волны, возникшие на первоначальной стадии формирования Вселенной. Согласно последним теоретическим расчетам широкого класса космологических моделей для таких волн должно наблюдаться достаточно резкое возрастание (достигающее 3...4 порядков) спектральной плотности энергии гравитационных волн для частот от 10^5 до 10^{10} Гц [228-230]. С предсказанием существования высокочастотных гравитационно-волновых возмущений связаны попытки создания

гравитационных детекторов, настроенных на регистрацию возмущений в указанном диапазоне волн [231, 232].

В данном разделе проведен анализ возможности использования явления низкочастотного оптического резонанса в интерферометре Фабри-Перо для регистрации высокочастотных гравитационно-волновых возмущений [233, 234].

Расчет чувствительности интерферометра Фабри-Перо при регистрации высокочастотных гравитационных волн

Впервые идея применения интерферометра Майкельсона для регистрации гравитационных волн была высказана в 1962 году работе [217]. Сейчас она широко используется во всех лазерных интерференционных гравитационных антеннах, в которых в плечах интерферометра Майкельсона располагаются интерферометры Фабри-Перо [213, 235].

Одним из перспективных методов повышения чувствительности гравитационных антенн в высокочастотной области спектра является использование явления низкочастотного оптического резонанса, наличие которого в интерферометрах Фабри-Перо установлено в работе [221]. Предварительный анализ чувствительности интерферометра Фабри-Перо в высокочастотной области спектра выполнен в работе [236].

Проведем расчет чувствительности гравитационно-волнового датчика в высокочастотной области спектра, основанного на явлении низкочастотного оптического резонанса. Согласно работам [219, 221-225, 236] запишем выражения для мощности W_0 падающего на интерферометр Фабри-Перо монохроматического лазерного излучения и мощности W_A прошедшего этот интерферометр излучения

$$W_0 = \frac{1}{2} \varepsilon_0 c S E_0^2, \quad (6.1)$$

$$W_A(t) = \varepsilon_0 c S \eta^4 Y(t), \quad (6.2)$$

где: ε_0 - электрическая постоянная, c - скорость света в вакууме, S - площадь зеркал интерферометра, E_0 - напряженность электрического поля лазерного излучения на входе в интерферометр, которую считаем постоянной величиной, η - амплитудный коэффициент пропускания зеркал интерферометра, который для обоих зеркал считается одинаковым, $Y(t) = |E(t)|^2$ - квадрат модуля напряженности электрического поля $E(t)$ на поверхности зеркал интерферометра.

Считая далее, что количество переотражений в интерферометре Фабри-Перо велико (оно может достигать значений $10^4 \dots 10^5$), величину $Y(t)$ в соответствии с результатами работы [219] можно представить как решение системы дифференциальных уравнений

$$\dot{Y} + 2\beta Y = \frac{E_0}{4t_0^2} Z + \frac{E_0^2}{4t_0}, \quad (6.3)$$

$$\ddot{Z} + 2\beta\dot{Z} + \omega_0^2 Z = E_0 F(t). \quad (6.4)$$

Здесь введены обозначения

$$\beta = -\frac{\ln R^2}{2t_0} = \frac{\Delta}{2t_0}, \quad (6.5)$$

$$\omega_0^2 = \frac{\kappa^2 + \Delta^2}{4t_0^2}, \quad (6.6)$$

$$F(t) = \frac{\Delta}{2t_0} - \frac{2k_e}{\kappa} \dot{x}(t), \quad (6.7)$$

где: t_0 - время однократного прохождения света от одного зеркала интерферометра до другого, которое определяется через длину интерферометра L по формуле:

$$t_0 = \frac{L}{c}, \quad (6.8)$$

R - амплитудный коэффициент отражения зеркал интерферометра, Δ - потери за один цикл переотражений:

$$\Delta = 1 - R^2, \quad (6.9)$$

κ - фазовый сдвиг, характеризующий настройку интерферометра, k_e - волновое число, $x(t)$ - смещение зеркал интерферометра друг относительно друга:

$$x(t) = Lh(t), \quad (6.10)$$

$h(t)$ - метрика пространства-времени, описывающая гравитационно-волновое возмущение. При записи формул (6.3) и (6.4) предполагалось, что $|k_e x(t)| \ll \Delta$ и $\Delta \ll 1$, а фаза монохроматической волны на входе интерферометра считается постоянной величиной.

Далее будем считать, что потери на поглощение в зеркалах интерферометра малы, и величина

$$\Delta = \eta^2. \quad (6.11)$$

Тогда при отсутствии гравитационной волны мощность вышедшего из интерферометра излучения определяется формулой

$$W_{A0} = \frac{\varepsilon_0 c S \Delta^2 E_0^2}{2(\kappa^2 + \Delta^2)} = \frac{\Delta^2}{\kappa^2 + \Delta^2} W_0, \quad (6.12)$$

где предполагается, что $\kappa \ll 1$.

Пусть спектральная плотность флуктуаций метрики пространства-времени $h(t)$, вызванных гравитационно-волновыми возмущениями, является функцией циклической частоты: $G_h(\omega)$. Тогда записав систему

уравнений (6.3) и (6.4) в виде фурье-образов переменных частей функций $Y(t)$ и $Z(t)$

$$p\delta\tilde{Y} + 2\beta_0\delta\tilde{Y} = \frac{c^2 E_0}{4L^2} \delta\tilde{Z}, \quad (6.13)$$

$$p^2\delta\tilde{Z} + 2p\beta\delta\tilde{Z} + \omega_0^2\delta\tilde{Z} = -\frac{2k_e L E_0}{\kappa} p\tilde{h}. \quad (6.14)$$

и учтя формулы (6.1) и (6.2) получим выражение, связывающее фурье-образ флуктуаций мощности $\delta\tilde{W}_A$ лазерного излучения, вышедшего из интерферометра Фабри-Перо, и флуктуации метрики пространства-времени \tilde{h} :

$$\delta\tilde{W}_A = -\frac{k_e c^2}{\kappa L} \frac{\Delta^2 p}{(p^2 + 2\beta p + \omega_0^2)(p + 2\beta)} W_0 \tilde{h}. \quad (6.15)$$

Из выражения (6.15) следует, что спектральную плотность флуктуаций мощности лазерного излучения, прошедшего интерферометр Фабри-Перо, можно записать в форме:

$$\delta\tilde{W}_A = -\frac{k_e c^2}{\kappa L} \frac{\Delta^2 p}{(p^2 + 2\beta p + \omega_0^2)(p + 2\beta)} W_0 \tilde{h}. \quad (6.16)$$

Неустранимые квантовые флуктуации прошедшего интерферометр Фабри-Перо лазерного излучения проанализированы в работе [203]. Согласно этой работе оценка спектральной плотности этих флуктуаций имеет вид:

$$G_{W_e} = k_e c \hbar W_{A0} = k_e c \hbar \frac{\Delta^2}{\kappa^2 + \Delta^2} W_0, \quad (6.17)$$

где \hbar - постоянная Планка. Тогда отношение спектральных плотностей, задаваемых выражениями (6.16) и (6.17) принимает вид

$$\delta G_W = \frac{G_{\delta W_A}}{G_{W_e}} = \frac{k_e c^3}{\kappa^2 L^2 \hbar} \frac{(\kappa^2 + \Delta^2) \Delta^2 \omega^2}{\left((\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2 \right) (\omega^2 + 4\beta^2)} W_0 G_h(\omega). \quad (6.18)$$

Если осуществлять настройку интерферометра Фабри-Перо на максимальный наклон кривой чувствительности, описываемой формулой (6.12), как это делается обычно при поиске гравитационных волн, то $\kappa = \Delta/\sqrt{3}$ и выражение (6.18) приобретает вид

$$\delta G_W^* = \frac{36k_e c^3}{L^2 \hbar} \frac{\Delta^2 \omega^2}{(9\omega^4 + 4\beta^2 \omega^2 + 16\beta^4) (\omega^2 + 4\beta^2)} W_0 G_h(\omega), \quad (6.19)$$

где учтено соотношение

$$\omega_0^2 = \frac{4}{3} \beta^2. \quad (6.20)$$

Регистрация высокочастотных гравитационных волн

Рассмотрим случай регистрации высокочастотных гравитационно-волновых возмущений. При использовании явления низкочастотного оптического резонанса и настройки интерферометра Фабри-Перо на максимум резонансной кривой, описываемой формулой (6.18), из этой формулы имеем

$$\delta G_W = \frac{k_e c^3}{4\kappa^2 L^2 \hbar} \frac{(\kappa^2 + \Delta^2) \Delta^2 (\omega_0^2 - 2\beta^2)}{(\omega_0^2 - \beta^2) (\omega_0^2 + 2\beta^2) \beta^2} W_0 G_h(\omega), \quad (6.21)$$

где учтено приближенное выражение для резонансного значения частоты гравитационно-волнового возмущения

$$\omega^2 = \omega_0^2 - 2\beta^2. \quad (6.22)$$

Считая, что $\beta \ll \omega_0$ ($\Delta \ll \kappa$) и с учетом формул (6.5), (6.6) и (6.8) имеем

$$\delta G_W = \frac{4k_e L^2}{\kappa^2 c \hbar} W_0 G_h(\omega) \quad (6.23)$$

или, с учетом приближенного равенства циклической частоты ω величине ω_0 , на основании формул (6.6) и (6.8) получим

$$\delta G_W = \frac{k_e c}{\hbar \omega^2} W_0 G_h(\omega), \quad (6.24)$$

где регистрируемая циклическая частота ω гравитационно-волнового возмущения должна быть связана с параметрами антенны следующим соотношением

$$\omega = \frac{\kappa c}{2L}. \quad (6.25)$$

Аналогичное выражение для случая настройки резонатора Фабри-Перо на максимальный наклон кривой чувствительности, который описывается формулой (6.19), при $\omega \gg \beta$ имеет вид

$$\delta G_W^* = \frac{36k_e c^3}{9L^2 \hbar} \frac{\Delta^2}{\omega^4} W_0 G_h(\omega) \quad (6.26)$$

или

$$\delta G_W^* = \frac{8k_e c L^2}{9\hbar} \frac{\beta^2}{\omega^4} W_0 G_h(\omega). \quad (6.27)$$

Из сравнения формул (6.24) и (6.27) следует, что использование низкочастотного оптического резонанса при регистрации высокочастотных гравитационно-волновых возмущений позволяет существенно повысить чувствительность лазерных гравитационных антенн.

Условием наблюдения гравитационного волнового сигнала при усреднении спектральной плотности за период времени T является неравенство

$$\delta G_W > \frac{1}{\sqrt{\beta T}} \quad (6.28)$$

или с учетом формул (6.5) и (6.8)

$$\delta G_W > \sqrt{\frac{2L}{cT\Delta}}. \quad (6.29)$$

Подстановка формул (6.23) и (6.24) в неравенство (6.29) дает выражение для оценки минимальной спектральной плотности флуктуаций метрики пространства-времени, которая может быть зарегистрирована с помощью предлагаемого интерферометра Фабри-Перо, использующего явление низкочастотного оптического резонанса

$$G_h(\omega) > \sqrt{\frac{2c}{TL^3\Delta}} \frac{\hbar\kappa^2}{4k_e W_0} \quad (6.30)$$

или

$$G_h(\omega) > \sqrt{\frac{2L}{c^3T\Delta}} \frac{\hbar\omega^2}{k_e W_0}. \quad (6.31)$$

Для случая фазовой настройки интерферометра Фабри-Перо $\kappa = 0,1$ и следующих параметрах лазерной гравитационной антенны: $\Delta = 10^{-4}$, $L = 100$ м, $W_0 = 10^3$ Вт, $T = 10^7$ с (116 суток) и $k_e = 5,9 \cdot 10^6$ м⁻¹ ($\lambda_e = 1,064$ мкм), из выражения (6.30) имеем минимально обнаружимую спектральную плотность флуктуаций гравитационно-волнового возмущения $G_h(\omega) > 3,5 \cdot 10^{-49}$ с. При этом циклическая частота этого возмущения в соответствии с формулой (6.25) будет равна: $\omega = 1,5 \cdot 10^5$ с⁻¹.

Отметим, что аналогичную чувствительность можно получить и для случая уменьшения длины интерферометра в 10 раз: $L = 10$ м, но при этом фазовую настройку интерферометра необходимо будет изменить до значения $\kappa = 1,77 \cdot 10^{-2}$, а циклическая частота станет равной $\omega = 2,65 \cdot 10^5$ с⁻¹. Если длину резонатора уменьшить еще в 10 раз: $L = 1$ м, то при сохранении чувствительности указанную выше фазовую настройку необходимо уменьшить до значения $\kappa = 3,16 \cdot 10^{-3}$, а частота возрастет до $\omega = 4,75 \cdot 10^5$ с⁻¹.

Оценка возможности регистрации реликтовых гравитационных волн

Полученные выше формулы (6.30) и (6.31) можно преобразовать к виду:

$$G_h(\omega) > \sqrt{\frac{\kappa}{c^2 T \Delta}} \frac{\hbar \omega^{3/2}}{k_e W_0}. \quad (6.32)$$

Для перехода к величине плотности энергии гравитационных волн $\Omega_{GW}(\omega)$ можно воспользоваться формулой, приведенной в работе [237]:

$$\Omega_{GW}(\omega) = \frac{1}{6\pi H_0^2} \omega^3 G_h(\omega), \quad (6.33)$$

где H_0 - параметр Хаббла. Подстановка формулы (6.32) в выражение (6.33) дает оценку для минимальной плотности энергии гравитационных волн, которые могут быть обнаружены с применением низкочастотного оптического резонанса [238]:

$$\Omega_{GW}(\omega) > \sqrt{\frac{\kappa}{c^2 T \Delta}} \frac{\hbar \omega^{9/2}}{6\pi H_0^2 k_e W_0}. \quad (6.34)$$

На рис. 6.1 приведен график зависимости минимально обнаружимой плотности энергии гравитационных волн $\Omega_{GW}(\omega)$ для следующих параметров: $\kappa = \Delta$, $T = 10^7$ с (116 суток), $k_e = 5,9 \cdot 10^6$ м⁻¹ ($\lambda_e = 1,064$ мкм), $W_0 = 10^4$ Вт.

Таким образом, применение низкочастотного оптического резонанса позволяет с помощью интерферометра Фабри-Перо регистрировать высокочастотные гравитационно-волновые возмущения, в частности, реликтовые гравитационные волны. Преимуществом предложенного датчика является также отсутствие необходимости устанавливать зеркала интерферометра на подвижных массах, что существенно упрощает процедуру их юстировки.

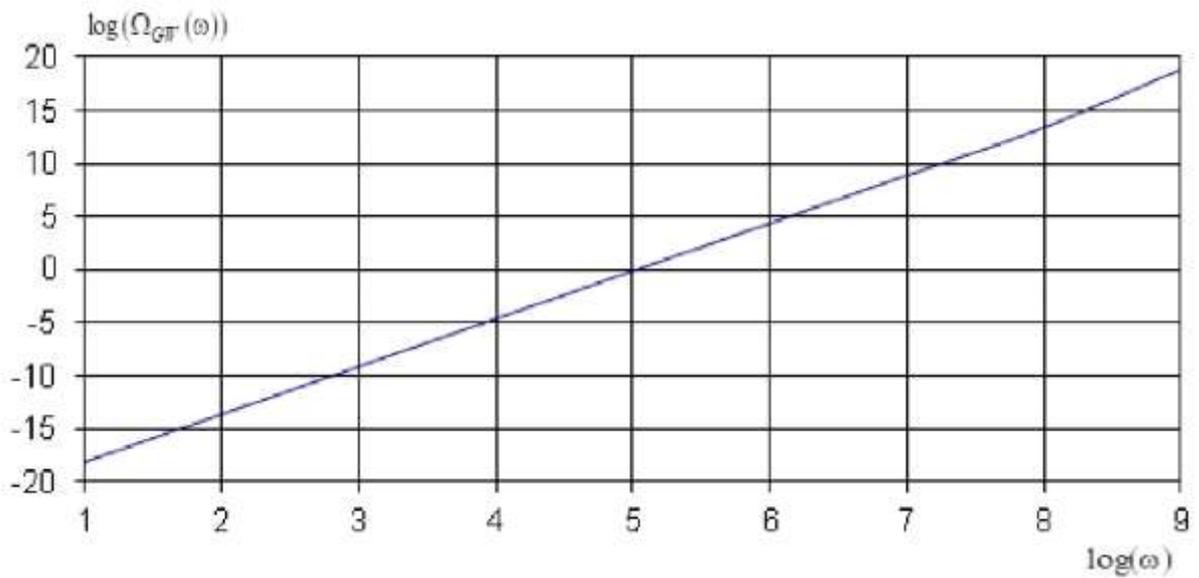


Рис. 6.1. Зависимость зависимости минимально обнаружимой плотности энергии от частоты гравитационной волны

Указанное преимущество возникает вследствие того, что в высокочастотной области спектра механические колебания не успевают распространиться от одного зеркала до другого и интерферометр Фабри-Перо можно рассматривать как жесткую конструкцию [216].

ЧАСТЬ 7. РЕГИСТРАЦИЯ ФЛУКТУАЦИЙ МЕТРИЧЕСКОГО ТЕНЗОРА ПРОСТРАНСТВА-ВРЕМЕНИ

Модель флуктуирующего физического времени впервые была предложена в работе [239] для объяснения особенностей наблюдаемых в эксперименте флуктуаций подвижности ионов в малых объемах электролита [219, 240]. На основе уравнения, связывающего плотность производства энтропии и интенсивность флуктуаций физического времени, в работах [241-243] произведен расчет интенсивности указанных флуктуаций и проведено сопоставление с результатами экспериментов.

Модель флуктуирующего физического времени

Рассмотрим модель флуктуирующего физического времени, основанную на предположении, что наблюдаемое физическое время представляет собой пуассоновский случайный процесс $\tau(t)$ со скачками, равными $\tau_0 = 1/\nu_\tau$, где ν_τ - интенсивность флуктуаций физического времени [239].

Одномерная характеристическая функция рассматриваемого пуассоновского процесса имеет вид [244, 245]

$$g_\tau(\mu_\tau; t) = \exp((\exp(i\tau_0\mu_\tau) - 1)\nu_\tau t), \quad (7.1)$$

а его n -мерная характеристическая функция при $t_n \geq \dots \geq t_2 \geq t_1$ соответственно равна

$$g_{n\tau}(\mu_{1\tau}, \mu_{2\tau}, \dots, \mu_{n\tau}; t_1, t_2, \dots, t_n) = \exp\left(\nu_\tau \sum_{j=1}^n t_j \left(\exp\left(i\tau_0 \sum_{k=j}^n \mu_{k\tau}\right) - 1\right)\right). \quad (7.2)$$

Приведенные характеристические функции (7.1) и (7.2) позволяют записать математическое ожидание $\langle \tau(t) \rangle$ и корреляционную функцию

$\langle \tau(t_1)\tau(t_2) \rangle = t_1 t_2 + \tau_0 \min(t_1, t_2)$ для произвольных моментов времени t_1 и t_2 следующим образом

$$\langle \tau(t) \rangle = t, \quad (7.3)$$

$$\langle \tau(t_1)\tau(t_2) \rangle = t_1 t_2 + \tau_0 \min(t_1, t_2). \quad (7.4)$$

Введем также функцию

$$\xi_T(t) = \frac{d\tau(t)}{dt}, \quad (7.5)$$

математическое ожидание $\langle \xi_T(t) \rangle$ и корреляционная функция $\langle \xi_T(t_1)\xi_T(t_2) \rangle$ которой имеют вид

$$\langle \xi_T(t) \rangle = 1, \quad (7.6)$$

$$\langle \xi_T(t_1)\xi_T(t_2) \rangle = \tau_0 \delta(t_2 - t_1). \quad (7.7)$$

Введение функции $\xi_T(t)$ позволяет представить дифференциал $d\tau(t)$ в форме

$$d\tau(t) = \xi_T(t)dt. \quad (7.8)$$

Отметим, что аналогичное выражение применяется в общей теории относительности для установления соотношения между собственным временем τ и временной координатой $x^0 = ct$ [215]

$$d\tau = \frac{1}{c} \sqrt{g_{00}} dx^0, \quad (7.9)$$

где c - скорость света в пустоте, g_{00} - компонента метрического тензора g_{ik} , $i, k = \overline{0,3}$, описывающая изменение временной координаты пространства-времени. Сравнение формул (7.8) и (7.9) позволяет представить величину g_{00} в виде

$$g_{00} = \xi_T^2, \quad (7.10)$$

что указывает на принципиальную возможность построения более общего описания пространства-времени с флуктуирующей метрикой.

Пространство-время с флуктуирующим метрическим тензором

Постановка задачи описания физических процессов в пространстве-времени с изменяющимся случайным образом метрическим тензором связана не только с изложенной моделью флуктуирующего физического времени, но и с возможностью возникновения флуктуаций кривизны пространства вследствие сложения большого количества разнообразных гравитационных волн [235]. При этом, учитывая то, что гравитационные волны генерируются различными, некоррелированными между собой астрофизическими объектами, такими как нейтронные звезды, черные дыры и т.д., а также возникают при гравитационном коллапсе и вспышках сверхновых, то модель случайно изменяющегося метрического тензора для описания пространства-времени представляется достаточно обоснованной. Тем более, предлагаемая модель применима для описания стохастического фона, вызванного, в частности, реликтовым гравитационным излучением [229, 233].

В самой общей постановке задача описания физических процессов в пространстве-времени с флуктуирующим метрическим тензором может быть сформулирована следующим образом [246, 247]. Пусть в пространстве-времени протекает какой-либо физический процесс, например, происходит распространение электромагнитной волны. Будем считать, что метрический тензор $g_{ik}(x^0, x^1, x^2, x^3)$ представляет собой случайную функцию координат $x^l = \{x^0, x^1, x^2, x^3\}$. Требуется определить характер протекания исследуемого физического процесса в случае, если метрический тензор $g_{ik}(x^l)$ изменяется случайным образом с течением времени и при сдвиге в пространстве.

Для построения уравнений, описывающих протекание физических процессов в пространстве-времени с флуктуирующим метрическим тензором, можно воспользоваться методом, изложенным в работе [237].

Уравнения электромагнитного поля в искривленном пространстве-времени позволяют проанализировать, в частности, особенности распространения электромагнитных волн в пространстве-времени с флуктуирующим метрическим тензором [246, 247].

Распространение света в пространстве-времени с флуктуирующим метрическим тензором

Далее рассмотрим случай описания распространения света в приближении геометрической оптики. Указанный случай может иметь место при выполнении условия малости длины волны света λ_0 , по сравнению с характерным радиусом корреляции δL флуктуаций метрического тензора: $\lambda_0 \ll \delta L$. Уравнение, описывающее распространение света в искривленном пространстве-времени для случая приближения геометрической оптики имеет вид [215]:

$$\frac{dk^i}{d\chi} + \Gamma_{kl}^i k^k k^l = 0, \quad (7.11)$$

где: k^i - четырехмерный волновой вектор, χ - параметр, изменяющийся вдоль луча, Γ_{kl}^i - символы Кристоффеля, которые выражаются через метрический тензор следующим образом:

$$\Gamma_{kl}^i = \frac{1}{2} g^{im} \left(\frac{\partial g_{mk}}{\partial x^l} + \frac{\partial g_{ml}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^m} \right). \quad (7.12)$$

В формулах (7.11) и (7.12) и далее предполагается суммирование по повторяющимся индексам, а метрический тензор g_{ik} является симметричным: $g_{ik} = g_{ki}$.

Далее будем рассматривать случай, когда метрический тензор g_{ik} считается мало отличающимся от галилеевой метрики $g_{ik}^{(0)}$:

$$g_{ik} = g_{ik}^{(0)} + h_{ik}, \quad (7.13)$$

где: $|h_{ik}(x^l)| \ll 1$, $g_{00}^{(0)} = 1$, $g_{11}^{(0)} = g_{22}^{(0)} = g_{33}^{(0)} = -1$; $g_{ik}^{(0)} = 0$ при $i \neq k$. Тогда символы Кристоффеля в первом приближении можно представить в виде

$$\Gamma_{kl}^i = \frac{1}{2} g_{(0)}^{im} \left(\frac{\partial h_{mk}}{\partial x^l} + \frac{\partial h_{ml}}{\partial x^k} - \frac{\partial h_{kl}}{\partial x^m} \right), \quad (7.14)$$

где $g_{(0)}^{im} = g_{im}^{(0)}$.

Следуя работе [216] решение уравнения (7.11) будем искать в виде ряда:

$$k^i = k_{(0)}^i + k_{(1)}^i + \dots \quad (7.15)$$

Тогда в нулевом приближении уравнение (7.11) принимает форму:

$$\frac{dk_{(0)}^i}{d\chi} = 0 \quad (7.16)$$

Следовательно $k_{(0)}^i = const$.

В первом приближении интегрирование уравнения (7.11) дает

$$k^i(\chi) = k_{(0)}^i + k_{(1)}^i(0) - k_{(0)}^k k_{(0)}^l \int_0^\chi \Gamma_{kl}^i d\chi \quad (7.17)$$

Выражение для четырехмерного вектора $k_{(1)}^i(0)$ может быть получено из условия [215]:

$$g_{ik} k^i k^k = 0 \quad (7.18)$$

и в первом приближении имеет вид:

$$k_{(1)}^i = -\frac{1}{2} g_{(0)}^{im} h_{ml}(0) k_{(0)}^l \quad (7.19)$$

Тогда решение (7.17) приобретает окончательную форму:

$$k^i(\chi) = k_{(0)}^i - \frac{1}{2} g_{(0)}^{im} h_{ml}(0) k_{(0)}^i - k_{(0)}^k k_{(0)}^l \int_0^\chi \Gamma_{kl}^i d\chi . \quad (7.20)$$

Так как вектор k^i может быть представлен в виде [202]

$$k^i = \frac{dx^i}{d\chi} , \quad (7.21)$$

то в нулевом приближении имеем:

$$x^i(\chi) = k_{(0)}^i \chi + x^i(0) . \quad (7.22)$$

Рассмотрим распространение луча света в направлении оси x^1 . Тогда можно считать, что компоненты вектора $k_{(0)}^i$ имеют следующие значения: $k_{(0)}^0 = k_{(0)}^1 = k_0$, $k_{(0)}^2 = k_{(0)}^3 = 0$, где k_0 - волновое число. Считая расстояние l , которое прошел свет, равным: $l = x^1(\chi) - x^1(0)$, по формуле (7.22) при $i=1$ получим выражение для параметра χ :

$$\chi = \frac{l}{k_0} . \quad (7.23)$$

Сделанные предположения позволяют по формуле (7.22) получить следующие выражения:

$$\frac{k^\alpha(l)}{k_0} = 1 - \frac{1}{2} (-1)^\alpha (h_{0\alpha}(0) + h_{1\alpha}(0)) - \int_0^l (\Gamma_{00}^\alpha + 2\Gamma_{01}^\alpha + \Gamma_{11}^\alpha) dl , \quad \alpha = 0,1 , \quad (7.24)$$

$$\frac{k^\beta(l)}{k_0} = \frac{1}{2} (h_{0\beta}(0) + h_{1\beta}(0)) - \int_0^l (\Gamma_{00}^\beta + 2\Gamma_{01}^\beta + \Gamma_{11}^\beta) dl , \quad \beta = 2,3 , \quad (7.25)$$

где учтена симметрия символов Кристоффеля $\Gamma_{kl}^i = \Gamma_{lk}^i$.

Формулы (7.24) и (7.25) при подстановке в них выражения для символов Кристоффеля (7.14) позволяют записать выражения для

относительных флуктуаций частоты $\delta\omega$ и волнового вектора δk^α в точке наблюдения:

$$\frac{\delta\omega}{\omega_0} = \frac{\delta k^0}{k_0} = -\frac{1}{2}(h_{00}(0) + h_{01}(0)) + \int_0^l \left(\frac{1}{2} \frac{\partial(h_{11} - h_{00})}{\partial x^0} - \frac{\partial(h_{00} + h_{01})}{\partial x^1} \right) dl, \quad (7.26)$$

$$\begin{aligned} \frac{\delta k^\alpha}{k_0} &= \frac{1}{2}(h_{0\alpha}(0) + h_{1\alpha}(0)) + \\ &+ \int_0^l \left(\frac{\partial(h_{0\alpha} + h_{1\alpha})}{\partial x^0} + \frac{\partial(h_{0\alpha} + h_{1\alpha})}{\partial x^1} - \frac{1}{2} \frac{\partial(h_{00} + 2h_{01} + h_{11})}{\partial x^\alpha} \right) dl, \alpha = \overline{1,3}. \end{aligned} \quad (7.27)$$

Учитывая то, что согласно формуле (7.22) с учетом (7.23) можно записать: $dx^1 = dl$, проинтегрируем второе слагаемое в интеграле выражения (7.26). Тогда имеем:

$$\frac{\delta\omega}{\omega_0} = \frac{1}{2}(h_{00}(0) + h_{01}(0)) - h_{00}(l) - h_{01}(l) + \frac{1}{2} \int_0^l \frac{\partial(h_{11} - h_{00})}{\partial x^0} dl. \quad (7.28)$$

Представим тензор h_{ik} в виде

$$h_{ik} = h \xi_{ik}, \quad i, k = 0, 1, \quad (7.29)$$

где: h - амплитуда флуктуаций тензора h_{ik} , $\xi_{ik} = \xi_{ik}(x^0, x^1)$ - случайное поле с единичной амплитудой и радиусом корреляции $\delta L < \lambda_0$. В этом случае все слагаемые, стоящие перед интегралом в выражении (7.28) будут иметь величину порядка h .

Оценим характерные значения интеграла в выражении (7.28). Так как использование приближения геометрической оптики ограничено предельным значением характерных размеров корреляции $\delta L \approx \lambda_0 = 1/k_0$ и постоянной времени корреляции $\delta\tau \approx 1/\omega_0$, то оценка дисперсии флуктуаций частоты, описываемой интегралом в формуле (7.28), принимает вид:

$$\sigma_\omega^2 \approx h^2 l k_0 \quad (7.30)$$

или

$$h \approx \frac{\sigma_{\omega}}{\sqrt{lk_0}} . \quad (7.31)$$

При условии $l \gg 1/k_0$ вклад интеграла во флуктуации частоты света становится определяющим.

Проведем оценки уширения спектральной линии при прохождении света через пространство с флуктуирующей метрикой. Если считать величину l примерно равной характерному размеру Вселенной: $l \approx 10^{25} \dots 10^{26}$ м (1...10 миллиардов световых лет), $k_0 = 10^7$ 1/м, а минимально регистрируемое уширение спектральной линии $\sigma_{\omega} \approx 10^{-6} \dots 10^{-8}$, то рассчитанная по формуле (7.31) амплитуда флуктуаций h будет иметь значение: $h \approx 10^{-22} \dots 10^{-24}$.

Таким образом, при распространении света на расстояние, сопоставимое с размерами Вселенной, в случае существования флуктуаций метрики с амплитудой $h \approx 10^{-22} \dots 10^{-24}$ и частотой, ограниченной сверху частотой световой волны, должно наблюдаться уширение спектральных линий. Регистрация необратимого процесса уширения спектральных линий при распространении света может являться доказательством существования в природе флуктуаций метрического тензора пространства-времени, а, следовательно, и флуктуаций самого времени.

Расчет уширения спектральных линий света при воздействии гравитационных волн

Если описание осуществляется в синхронной системе отсчета [215], как это обычно делается при расчете воздействия плоских гравитационных волн в рамках линейной теории [216], то из условия лоренцевой калибровки следует:

$$h_{00} = h_{0i} = 0 . \quad (7.32)$$

Тогда выражение (7.28) для относительных флуктуаций частоты света приобретает простой вид:

$$\frac{\delta\omega}{\omega_0} = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{\partial h_{11}}{\partial x^0} dl . \quad (7.33)$$

Считая, что гравитационные волны, заполняющие пространство, имеют граничную частоту ω_g и соответствующее ей волновое число k_g , дисперсию минимально обнаружимых флуктуаций метрики пространства времени при измерении уширения спектральных линий света можно оценить по формуле:

$$\sigma_h \approx \sqrt{\frac{c}{c\omega_g}} \sigma_\omega, \quad (7.34)$$

или с учетом усреднения результатов измерения за период времени T :

$$\sigma_h \approx \frac{1}{\sqrt{T\omega_g}} \sqrt{\frac{c}{c\omega_g}} \sigma_\omega . \quad (7.35)$$

Если $T = 3 \cdot 10^7$ с, то

$$\sigma_h \approx 10^{-31} \dots 10^{-32} . \quad (7.36)$$

Для вычисления плотности энергии гравитационных волн $\Omega_{GW}(\omega)$ в зависимости от их амплитуды h можно воспользоваться формулой, приведенной в работе [237]:

$$\Omega_{GW}(\omega) = \frac{1}{6\pi H_0^2} \omega^3 G_h(\omega), \quad (7.37)$$

где H_0 - параметр Хаббла. Тогда для граничной частоты реликтовых гравитационных волн $\omega_g = 10^9 \dots 10^{10}$ с⁻¹ имеем:

$$G_h(\omega) \approx 2 \cdot (10^{-61} \dots 10^{-64}) \Omega_{GW}(\omega) \quad (7.38)$$

или с учетом оценки величины $\Omega_{GW}(\omega)$ на указанных частотах в рамках инфляционной модели с квинтэссенцией [229]:

$$\sigma_h \approx 10^{-32} \dots 10^{-33}. \quad (7.39)$$

Полученная величина (7.39) близка к минимально наблюдаемому значению (7.36).

Таким образом, предложенная модель пространства-времени с флуктуирующим метрическим тензором позволяет описать возможные флуктуации физического времени. Показано, что измерение уширения спектральных линий света, распространяющегося в пространстве, заполненном высокочастотными гравитационными волнами реликтового происхождения, позволяет оценить верхний предел их амплитуды и, возможно, исследовать их спектральный состав.

Заключение

В настоящей монографии изложен последовательный анализ вопросов, связанных с возникновением и возможностями регистрации реликтовых гравитационных волн.

Основой данного анализа является теория гравитации Эйнштейна и базовые, на данный момент, представления о ранней стадии эволюции Вселенной, обусловленной динамикой скалярного поля.

Отметим, что в настоящее время, для объяснения стадии инфляции и повторного ускоренного расширения Вселенной, активно исследуются модели модифицированной гравитации, включающие как теории с неминимальным взаимодействием скалярного поля и кривизны (теория Бранса-Дикке, индуцированная гравитация и т.д.), так и $f(R)$ теории гравитации, в рамках которых, присутствие членов высших порядков по кривизне приводит к эффектам, полностью идентичным динамике скалярных полей в ОТО. Однако при рассмотрении альтернативных теорий гравитации следует сохранять достижения теории гравитации Эйнштейна, которая с высокой точностью согласуется с наблюдательными данными.

Рассмотренные в монографии модели космологической инфляции приводят к выводу о возможной генерации гравитационных волн с частотами, ограниченными только влиянием на темп первичного нуклеосинтеза, для детектирования которых предложен метод, основанный на эффекте низкочастотного оптического резонанса в интерферометрах Фабри-Перро.

Также, предложены методы точного анализа моделей космологической инфляции, как на уровне динамики, так и на уровне космологических возмущений с оценкой расхождения с результатами, полученными в рамках приближенных методов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] *Червон С.В., Фомин И.В., Кубасов А.С.* Скалярные и киральные поля в космологии. Ульяновск: Изд-во УлГПУ, 2015. 215 с.
- [2] *Starobinsky A.A.* A New Type of Isotropic Cosmological Models Without Singularity // *Phys. Lett. B.* 1980. V. 91. P. 99.
- [3] *Guth A.H.* The Inflationary Universe: A Possible Solution to the Horizon and Flatness Problems // *Phys. Rev. D.* 1981. V. 23. P. 347.
- [4] *Albrecht A. and Steinhardt P.J.* Cosmology for Grand Unified Theories with Radiatively Induced Symmetry Breaking // *Phys. Rev. Lett.* 1982. V. 48. P. 1220.
- [5] *Linde A.D.* Chaotic Inflation // *Phys. Lett. B.* 1983. V. 129. P. 177.
- [6] *Linde A.D.* A New Inflationary Universe Scenario: A Possible Solution Of The Horizon, Flatness, Homogeneity, Isotropy And Primordial Monopole Problems // *Phys. Lett. B.* 1982. V. 108. P. 389.
- [7] *Долгов А.Д., Зельдович Я.Б., Сажин М.В.* Космология ранней Вселенной. М.: Изд-во МГУ, 1988. 199 с.
- [8] *Линде А.Д.* Физика элементарных частиц и инфляционная космология // М.: Наука, 1990. 280 с.
- [9] *Mukhanov V.* Physical Foundations of Cosmology. Cambridge University Press, 2005. 421 p.
- [10] *Горбунов Д.С., Рубаков В.А.* Введение в теорию ранней Вселенной: Теория горячего Большого взрыва. М.: URSS, 2016. 616 с.
- [11] *Горбунов Д.С., Рубаков В.А.* Введение в теорию ранней Вселенной. Космологические возмущения. Инфляционная теория. М.: Красанд, 2010. 568 с.

- [12] *Бронников К.А., Рубин С.Г.* Лекции по гравитации и космологии. М.: Изд-во МИФИ, 2008. 460 с.
- [13] *Bronnikov K. A., Rubin S. G.* Black Holes, Cosmology and Extra Dimensions. World Scientific, 2013. 422 p.
- [14] *Лукаш В.Н., Михеева Е.В.* Физическая космология. М.: Физматлит, 2010. 404 с.
- [15] *Liddle A.R. and Lyth D.H.* Cosmological Inflation and Large-Scale Structure. Cambridge University Press, 2000. 412 p.
- [16] *Weinberg S.* Cosmology. Oxford University Press, 2009. 593 p.
- [17] *Riess A.G. et al.*, Observational Evidence from Supernovae for an Accelerating Universe and a Cosmological Constant // *Astron. J.* 1998. V. 116. P. 1009.
- [18] *Perlmutter S.J. et al.* Measurements of Omega and Lambda from 42 High-Redshift Supernovae // *Astrophys. J.* 1999. V. 517. P. 565.
- [19] *Ade P.A.R. et al. [Planck Collaboration]* Planck 2015 results. XIII. Cosmological parameters // *Astron. Astrophys.* 2016. V. 594. A13.
- [20] *Hinshaw G. et al.* Nine-Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations: Cosmology Results // *Ap. J. S.* 2013. V. 208. 19H.
- [21] *Ehlers, J., Geren P. and Sachs R.K.* Isotropic solutions of the Einstein-Liouville equations // *J. Math. Phys.* 1966. V. 9. P. 1344
- [22] *Clarkson C. A.* Inhomogeneous Cosmologies, the Copernican Principle and the Cosmic Microwave Background: More on the EGS Theorem // *Gen. Rel. Grav.* 2003. V. 35. P. 969.

- [23] *Гладышев В.О., Туунов П.С., Леонтьев А.Д., Гладышева Т.М., Шарандин Е.А.* Исследование анизотропии пространства скоростей электромагнитного излучения в движущейся среде // *ЖТФ*. 2012. №11. С. 54-63.
- [24] *Gurzadyan V.G., et.al* A new limit on the light speed isotropy from the GRAAL experiment at ESRF // *Proc.12th M. Grossmann Meeting on General Relativity*.World Sci., 2012. P. 1495.
- [25] *Фомин И.В.* Скорость света в анизотропном пространстве-времени // *Известия Вузов. Физика*. 2016. № 1. С. 36-40.
- [26] *Mukhanov V. F., Feldman H. A., and Brandenberger R. H.* Theory of cosmological perturbations // *Phys. Rept.* 1992. V. 215. P. 203.
- [27] *Riotto A.* Inflation and the Theory of Cosmological Perturbations // *Lectures delivered at the «ICTP Summer School on Astroparticle Physics and Cosmology»*. Trieste, 2002. P. 77.
- [28] *Straumann N.* From primordial quantum fluctuations to the anisotropies of the cosmic microwave background radiation // *Ann. Phys.* 2006. V. 15. P. 701.
- [29] *Mukhanov V., Winitzki S.* Introduction to Quantum Effects in Gravity. Cambridge University Press, 2000. 284 p.
- [30] *Parker L., Toms D.* Quantum Field Theory in Curved Spacetime. Cambridge University Press, 2009. 472 p.
- [31] *Runyan M.C. et. al.* ACBAR: The Arcminute Cosmology Bolometer Array Receiver // *Astrophys. J. Suppl.* 2003. V. 149. P. 265.
- [32] *de Bernardis P. et.al.* First results from the BOOMERanG experiment // *AIP Conf. Proc.* 2001. V. 555. P. 85.
- [33] *Rajguru N. et. al.* CMB observations from the CBI and VSA: A comparison of coincident maps and parameter estimation methods // *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* 2005. V. 363. P. 1125.

- [34] *Sachs R. K., Wolfe A. M.* Perturbations of a Cosmological Model and Angular Variations of the Microwave Background // *Astrophys. J.* 1967. V. 147. P. 73.
- [35] *Silk J.* Cosmic black body radiation and galaxy formation // *Astrophys. J.* 1968. V. 151. P. 459.
- [36] *Сажин М.В.* Анизотропия и поляризация реликтового излучения. Последние данные // *УФН.* 2004. № 1. С. 197-205.
- [37] *Насельский П.Д., Новиков Д.И., Новиков И.Д.* Реликтовое излучение Вселенной. М.: Наука, 2003. 390 с.
- [38] *Aad G. et.al.* Measurements of the Higgs boson production and decay rates and coupling strengths using pp collision data at $\sqrt{s} = 7$ and 8 TeV in the ATLAS experiment // *Eur. Phys. J. C.* 2016. V. 76. P. 6.
- [39] *Jordan P.* Formation of the Stars and Development of the Universe // *Nature.* 1949. V. 164. P. 637.
- [40] *Fierz M.* On the physical interpretation of P. Jordan's extended theory of gravitation // *Helv. Phys. Acta.* 1956. V. 29. P. 128.
- [41] *Jordan P.* Zum gegenwärtigen Stand der Diracschen kosmologischen Hypothesen // *Z. Physik.* 1959. V. 157. P.112.
- [42] *Brans C. and Dicke R.H.* Mach's Principle and a Relativistic Theory of Gravitation // *Phys. Rev.* 1961. V. 124. P. 925.
- [43] *Bergmann P.G.* Comments on the scalar-tensor theory // *Int. J. Theor. Phys.* 1968. V. 1. P. 25.
- [44] *Nordtvedt J.* PostNewtonian metric for a general class of scalar tensor gravitational theories and observation consequences // *Astrophys. J.* 1970. V. 161. P. 1059.

- [45] *Wagoner R.V.* Scalar tensor theory and gravitational waves // *Phys. Rev. D.* 1970. V. 1. P. 3209.
- [46] *Damour T. and Esposito-Farese G.* Tensor-multi-scalar theories of gravitation // *Class. Quant. Grav.* 1992. V. 9. P. 2093.
- [47] *Станюкович К.П., Мельников В.Н.* Гидродинамика, поля и константы в теории гравитации. М.: Энергоатомиздат, 1983. 256 с.
- [48] *Тейлор Дж.* Калибровочные теории слабых взаимодействий. М.: Мир, 1978. 208 с.
- [49] *Ициксон К., Зюбер Ж.-Б.* Квантовая теория поля. М.: Мир, 1984. 400 с.
- [50] *Раджараман Р.* Солитоны и инстантоны в квантовой теории поля. М.: Мир, 1985. 416 с.
- [51] *Тахтаджян Л.А., Фаддеев Л.Д.* Гамильтонов подход в теории солитонов. М.: Наука, 1986. 528 с.
- [52] *Уизем Дж.* Линейные и нелинейные волны. М.: Мир, 1977. 624 с.
- [53] *Papapetrou A.* A Static solution of the equations of the gravitational field for an arbitrary charge distribution // *Proc. Roy. Irish Acad.* 1947. V. A51. P. 191.
- [54] *Фишер И. З.* Скалярное мезостатическое поле с учетом гравитационных эффектов // *ЖЭТФ.* 1948. № 7. С. 636.
- [55] *Асанов Р.А.* Статические скалярное и электромагнитные поля в теории тяготения Эйнштейна // *ЖЭТФ.* 1967. № 2(8). С. 673.
- [56] *Markov M.A.* Global properties of collapsing matter (Black Holes). Preprint JINR, E2-6831. Dubna, 1972. 49 p.
- [57] *Марков М.А.* Глобальные свойства вещества в коллапсированном состоянии. («Черные дыры») // *УФН.* 1973. № 1. С. 3.

- [58] *Эйнштейн А.* Собрание научных трудов. М.: Наука, 1965. 700 с.
- [59] *И-ши Дуань* Самосогласованная система гравитационного и скалярных полей // ЖЭТФ. 1954. № 27. С. 756.
- [60] *Bergmann O. and Leipnik R.* Space-time structure of a static spherically symmetric scalar field // Phys. Rev. 1957. V. 107. P. 1157.
- [61] *Buchdahl H.A.* Reciprocal Static Solutions of the Equations $G_{\mu\nu} = 0$ // Quart. J. Math. Oxford Ser. 1954. V. 5. P. 116.
- [62] *Buchdahl H.A.* Reciprocal static solutions of the equation of gravitational field // Australian J. Phys. 1956. V. 9. P. 13.
- [63] *Buchdahl H.A.* Reciprocal static metrics and scalar fields in the general theory of relativity // Phys. Rev. 1959. V. 115. P. 1325.
- [64] *Janis A.J., Newman E.T. and Winicour J.* Reality of the Schwarzschild singularity // Phys. Rev. Lett. 1968. V. 20. P. 878.
- [65] *Penney R.* Axially symmetric zero-rest-mass solutions of Einstein's equations // Phys. Rev. 1968. V. 174. P. 1578.
- [66] *Janis A.J., Robinson D.C. and Winicour J.* Comment on Einstein scalar solutions // Phys. Rev. 1969. V. 168. P. 1729.
- [67] *Kuchař K.* On the Rainich geometrization of scalar meson fields // Czechoslovak J. Phys. 1963. V. B13. P. 511.
- [68] *Penney R.* Geometrization of a massive scalar field // J. Math. Phys. 1965. V. 6. P. 1029.
- [69] *Bonnor W.B.* The problem of evolution in general relativity // Z. Phys. 1961. V. 161. P. 439.
- [70] *Пенроуз Р.* Конформная трактовка бесконечности // В книге: Гравитация и топология, (под ред. Д.Иваненко). М.: Мир, 1966. С. 152-181.

- [71] *Тагиров Э.А., Черников Н.А.* Квантовая теория поля в пространстве де Ситтера. Препринт P2-3777, Дубна, ОИЯИ, 1968. 48 с.
- [72] *Singh T.* A plane symmetric solution of Einstein's field equations of general relativity containing zero-rest-mass scalar field // *Gen. Relat. Gravit.* 1974. V. 6. P. 657.
- [73] *Lal K.B. and Singh T.* A note on a non-singular zero-rest-mass scalar field // *Tensor N. S.* 1974. P. 250.
- [74] *Patel L.K.* Plane-symmetric zero mass meson solution of Einstein's equations // *Tensor N. S.* 1975. P. 237.
- [75] *Зайцев Н.А., Шикин Г.Н.* Плоско-симметричные и цилиндрически-симметричные решения уравнений Эйнштейна в присутствии безмассового скалярного поля // В книге: Проблемы теории гравитации и элементарных частиц. (Под ред. К.П. Станюковича). М.: Атомиздат, 1977. С. 77.
- [76] *Lal K.B. and Pradhan A.* On wave solutions of the unified field equations of Finzi in a generalized Peres space-time // *Rev. de la Fac. des. Sci., de l' Univ. d'Istanbul.* 1976. V. 41. P. 29.
- [77] *Зайцев Н.А., Шикин Г.Н.* Конформно-плоские нестационарные решения в ОТО и скалярно-тензорных теориях гравитации // В книге: Проблемы теории гравитации и элементарных частиц. (Под ред. К.П. Станюковича.). М.: Атомиздат, 1975. С. 31.
- [78] *Федосеев И.А., Дородных В.С.* Скалярное поле в конформно-плоских пространствах // Проблемы теории гравитации и элементарных частиц. (Под ред. К.П. Станюковича). М.: Атомиздат, 1976. С. 155.
- [79] *Penney R.V.* Conformally flat zero-mass meson solutions of Einstein equations // *Phys. Rev. D.* 1976. V. 14. P. 910.

- [80] *Ray D.* Scalar meson fields in a conformally flat space // *J. Math. Phys.* 1977. V. 18(10). P. 1899.
- [81] *Зайцев Н.А., Шикин Г.Н.* Плоско-симметричные внутренние решения уравнений общей теории относительности в присутствии скалярного и электромагнитного полей // В книге: Проблемы теории гравитации и элементарных частиц. (Под ред. К.П. Станюковича.). М.: Атомиздат, 1979. С. 50.
- [82] *Шикин Г.Н.* Некоторые нестационарные решения системы уравнений Эйнштейна, безмассового скалярного и электромагнитных полей для случая ортогональной метрики // В книге: Теория относительности и гравитация. М.: Наука, 1976. С. 124.
- [83] *Шикин Г.Н.* Нестационарные решения автомодельного типа системы уравнений Эйнштейна и безмассового скалярного поля в ортогональной метрике // В книге: Проблемы теории гравитации и элементарных частиц. (Под ред. К.П. Станюковича.) М.: Атомиздат, 1975. С. 38.
- [84] *Ludwig G.* Geometrization of a massless complex scalar field // *J. Math. Phys.* 1971. V. 12. P. 1218.
- [85] *Ludwig G.* Geometrization of a massive scalar field // *J. Math. Phys.* 1971. V. 12. P. 1220.
- [86] *Melnikov V.N., Orlov S.V.* Nonlinear cosmology as a quantum vacuum effect // *Phys. Lett.* 1979. V. A70. P. 263.
- [87] *Detweiler S.* Klein Gordon equation and rotating black holes // *Phys. Rev. D.* 1980. V. 22. P. 2323.
- [88] *Wyman M.* Static spherically symmetric scalar fields in general relativity // *Phys. Rev. D.* 1981. V. 24. P. 839.

- [89] *Bergmann O. and Leipnik R.* Space-time structure of a static spherically symmetric scalar field // *Phys. Rev.* 1957 V. 107. P. 1157.
- [90] *Yilmaz H.* New Approach to General Relativity // *Phys. Rev.* 1958. V. 111. P. 1417.
- [90] *Berger B.K.* Scalar Field in the Early Universe: Coherent State Representation and Thermal Density Matrix // *Phys. Rev. D.* 1981. V. 23. P. 1250.
- [91] *Berger B.K.* Comments On the Coherent State Representation Of A Scalar Field In The Early Universe // *Phys. Rev. D.* 1982. V. 25. P. 2208.
- [92] *Lorenz D.* Scalar field generalizations of electromagnetic Bianchi models of types II, VIII and IX // *Lett. Al Nuovo Cimento.* 1980. V. 29. P. 238.
- [93] *Frolov V.P. and Zel'nikov A.I.* The massless scalar field around a static black hole // *J. Phys. A. Math. Gen.* 1980. V. A13. P. L345.
- [94] *Kleber A., Som M.M. and da F.Teixeira A.F.* Anisotropic scalar field with cosmical time // *Gen. Rel. Grav.* 1979. V.10. P. 535.
- [95] *Lohiya L. and Panchapakesan N.* Massless scalar field in a de Sitter universe and its thermal flux // *J. Phys. A. Math. Gen.* 1978. V. A11. P. 1963.
- [96] *Rowan D.J., Stephenson G.A.* The massive scalar meson field in a Schwarzschild background space // *J. Phys. A. Gen. Phys.* 1976. V. 9(8). P. 1261.
- [97] *Papadopoulos A.D.* Un theoreme sur les solutions des equations cVEinstein-Klein-Gordon dans un espace-temps stcitionnaire a symetrie axiale // *C. R. Acad. Sc. Paris.* 1978. V. 287. P. 377.
- [98] *Banerjee A. and Chaudhury S.B.D.* Statonary axially symmetri coupled Einstein-Maxwell-scalar fields // *Phys. Rev. D.* 1977. V. 15. P. 3062.
- [99] *da F. Teixeira A.F., Wolk I. and Som M.M.* On static electrovac with scalar fields // *J. Phys.* 1976. V. A9. P. 53.

- [100] *Gurses M.* Conformally flat solutions of Einstein-massless-scalar field equation // *Phys. Rev. D.* 1977. V. 15. P. 2731.
- [101] *Penney R.* Conformally flat zero-mass meson solutions of Einstein equations // *Phys. Rev. D.* 1976. V. 14. P. 910.
- [102] *Червон С.В.* О волновом нейтральном скалярном поле в ОТО // В книге: *Гравитация и теория относительности.* Казань: Изд-во Казанского университета, 1983. С. 143.
- [103] И.А.Федосеев, В.С.Дородных, Скалярное поле в конформно-плоских пространствах // *Проблемы теории гравитации и элементарных частиц.* (Под ред.К.П. Станюковича.) М.,Атомиздат. 1976. вып.7. С. 155.
- [104] *Shiff L.* Nonlinear meson theory of hadronic force I. // *Phys. Rev.* 1951. V. 84. P. 1.
- [105] *Finkelstein R., Le Levier R. and Ruderman M.* Nonlinear spinor fields // *Phys. Rev.* 1951. V. 83. P. 326.
- [106] *Нелинейная квантовая теория поля.* Под ред. Д.Д. Иваненко. М.: ИЛ, 1959. 467 с.
- [107] *Шифф Л.* Нелинейная мезонная теория ядерных сил. I. Нейтральные скалярные мезоны и точечно-контактное отталкивание // В книге: *Нелинейная квантовая теория поля.* Под ред. Д.Д. Иваненко. М.: ИЛ, 1959. 467 с.
- [108] *Goldstone J.* Field Theories with Superconductor Solutions // *Nuovo Cim.* 1961. V. 19. P. 154.
- [109] *Будагов А.С., Тахтаджян Л.А.* Нелинейная одномерная модель классической теории поля с внутренними степенями свободы // *ДАН СССР.* 1977. № 4. С. 805.

- [110] *Захаров В.Е., Тахтаджян Л.А., Фаддеев Л.Д.* Полное описание решений sin-Gordon уравнения // ДАН СССР. 1974. № 6. С. 1334.
- [111] *Давыдов А.С., Кислуха Н.И.* Пример самолокализующегося нелинейного релятивистского поля // ТМФ. 1973. № 1. С. 100.
- [112] *Burt P.B.* Special solution in nonlinear field theory // Phys. Rev. Lett. 1974. V. 32. P. 1080.
- [113] *Burt P.B.* Self-interacting field theory of neutral pseudoscalar mesons // Lett. Nuovo Cim. 1975. V. 13. P. 26.
- [114] *Burt P.B.* Quantization of a solitary wave in the nonlinear field theory // Acta Phys. Polonica. 1976. V. B7. P. 617.
- [115] *Burt P.B.* Classical, spherically symmetric solutions of nonlinear field equations // Lett. Nuovo Cim. 1977. V. 18. P. 547.
- [116] *Боголюбский И.Л.* Осциллирующее частицеподобное решение нелинейного уравнения Клейна-Гордона // Письма в ЖЭТФ. 1976. Т. 24. С. 54.
- [117] *Гетманов Б.С.* Связанные состояния солитонов в модели теории поля ϕ_2^4 // Письма в ЖЭТФ. 1976. Т. 24. С. 323-327.
- [118] *Гетманов Б.С.* Интегрируемая модель нелинейного комплексного скалярного поля с нетривиальной асимптотикой солитонных решений // ТМФ. 1979. № 2. С. 186.
- [119] *Маханьков В.Г., Катышев Ю.В.* О существовании и устойчивости неодномерных солитоноподобных решений в некоторых моделях теории поля. Препринт ОИЯИ P2-10547. Дубна. ОИЯИ, 1977. 12 с.

- [120] *Маханьков В.Г.* Об устойчивости "заряженных" солитонов в рамках уравнения Клейна-Гордона с насыщающейся нелинейностью. Препринт ОИЯИ Р2-10547. Дубна. ОИЯИ, 1977. 14 с.
- [121] *Кумар А.* Частицеподобное кусочно-аналитическое решение в одной нелинейной модели уравнения Клейна-Гордона // Известия Вузов. Физика. 1977. № 1. С. 59.
- [122] *Kumar A.* Exact Q -stable scalar gaussian solutions in confining models // Physica Scripta. 1980. V. 22. P. 560.
- [123] *Morris T.F.* Classical confinement: field theories with spontaneously bounded domains // Hadronic J. 1980. V. 3. P. 1333.
- [124] *Chowdhury A.R.* Inverse scattering equations for $g\phi^3 + h\phi^4$ theory in two dimensions // J. Phys. 1980. V. A13. P. L387.
- [125] *Jeffery E.A.* New classical solutions to ϕ^4 theory // Aust. J. Phys. 1981. V. 34(2). P. 113.
- [126] *Barut A.O., Bo-Wei Xu* New type of vacuum solutions of nonlinear conformally covariant coupled field equations // Phys. Rev. D. 1981. V. 23. P. 3076.
- [127] *Drohm J.K. et. al.* Collision and rotation of solitons in three space-time dimensions // Phys. Lett. B. 1981. V. 101. P. 204.
- [128] *Белова Т.И., Воронов Н.А., Конюхова Н.Б., Парийский Б.С.* Численные исследования устойчивости частицеподобных решений уравнений скалярного поля // Журнал вычислительной математики и математической физики АН СССР. 1981. № 1. С. 89.
- [129] *Pogrebkov A.K.* Singular solutions: an example of a Sinh-Gordon equation // Lett. Math. Phys. 1981. V. 5. P. 277.

- [130] *Джорджадзе Г.П., Погребков А.К., Поливанов М.К.* Сингулярные решения уравнения $\square\varphi + (m^2/2)\varphi \exp\varphi = 0$ и динамика особенностей // ТМФ. 1979. № 2. С. 221-234.
- [131] *Барбашов Б.М., Нестеренко В.В., Червяков А.М.* Солитоны в некоторых геометрических теориях поля // ТМФ. 1979. № 1. С. 15-27.
- [132] *Колпаков В.П., Шикин Г.Н.* Аксиально-симметричные решения системы уравнений Эйнштейна и нелинейного уравнения безмассового скалярного поля // Вестник МГУ. 1974. № 1. С. 107.
- [133] *Пийр И.Р., Кикас Э.Х.* О гравитационном самодействии сферически-симметричного скалярного поля // В книге: Современные проблемы общей теории относительности. Минск: Институт Физики АН СССР, 1979. С. 144-148.
- [134] *Коркина М.П.* Влияние физических полей на метрику Шварцшильда // В книге: Современные проблемы общей теории относительности. Минск: Институт Физики АН СССР, 1979. С. 149-158.
- [135] *Bekenstein J.D.* Exact solutions of Einstein-conformal scalar equations // Ann. Phys. 1974. V. 82. P. 535.
- [136] *Kodama T., de Oliveira L.C.S., Santos F.S.* Properties of general relativistic kink solution // Phys. Rev. 1979. V. D19. P. 3576.
- [137] *Иванов Г.Г.* Конформно-плоские гравитационные поля, создаваемые идеальной жидкостью // Известия Вузов. Физика. 1980. № 12. С. 22-25.
- [138] *Иванов Г.Г.* О самогравитирующем скалярном поле с кубической нелинейностью // Известия Вузов. Физика, 1980. № 12. С.18-22.
- [139] *Иванов Г.Г.* Космологические модели Фридмана с нелинейным скалярным полем // В книге: Гравитация и теория относительности. Казань: Изд-во Казанского университета, 1981. С. 54-60.

- [140] *Иванов Г.Г.* Точные решения уравнений Эйнштейна для нелинейных скалярных полей типа Син-Гордона, Лиувилля и Хиггса // В книге: Гравитация и теория относительности. Казань: Изд-во Казанского университета, 1983. С. 37-46.
- [141] *Червон С.В., Журавлев В.М.* Точные решения и тонкая настройка потенциала в моделях космологической инфляции // Основания теории гравитации и космологии. Тезисы докладов международной школы-семинара. Одесса, 1995. С. 67.
- [142] *Brandenberger R.H.* Inflationary universe models and cosmic strings// In: «Physics of the Early universe» (ed. by J. A. Peacock, A. F. Heavens, A. T. Davies). Proc. of the 36th Scottish Universities Summer School in Physics, 1989. P. 281.
- [143] *Linde A.* Eternal extended inflation and graceful exit from old inflation without Jordan-Brans-Dicke // Phys. Lett. B. 1990. V. 249. P. 18.
- [144] *Rothman T., Ellis G. F. R.* Can Inflation Occur in Anisotropic Cosmologies? // Phys. Lett. B. 1986. V. 180. P. 19.
- [145] *Burd A., Barrow J.D.* Inflationary Models with Exponential Potentials // Nucl. Phys. B. 1988. V. 308. P. 929.
- [146] *Lidsey J.E.* Multiple and anisotropic inflation with exponential potentials // Class. Quant. Grav. 1992. V. 9. P. 1239.
- [147] *La D., Steinhardt P.J.* Extended Inflationary Cosmology // Phys. Rev. Lett. 1989. V. 62. P. 376.
- [148] *La D., Steinhard P.J. and Bertshinger E.W.* Prescription for successful extended inflation // Phys. Lett. B. 1989. V. 231. P. 231.
- [149] *Kalara S., Kaloper N., Olive K.A.* Theories of Inflation and Conformal Transformations // Nucl. Phys. B. 1990. V. 341. P. 252.

- [150] *Barrow J.D., Maeda K.* Extended inflationary universes // Nucl. Phys. B. 1990. V. 341. P. 294.
- [151] *Kofman L.A., Linde A.D., Starobinsky A.A.* Inflationary Universe Generated by the Combined Action of a Scalar Field and Gravitational Vacuum Polarization // Phys. Lett. B. 1985. V. 157. P. 361.
- [152] *Silk J., Turner M.S.* Double Inflation // Phys. Rev. D. 1987. V. 35. P. 419.
- [153] *Старобинский А.А.* Многокомпонентные де-ситтеровские (инфляционные) стадии и генерация возмущений // Письма в ЖЭТФ. 1985. Т. 42. С. 124-127.
- [154] *Olive K.A.* Inflation // Phys. Rept. 1990. V. 190. P. 307.
- [155] *Червон С.В.* О киральной модели нелинейных скалярных полей// В книге: Гравитация и теория относительности. Казань: Изд-во Казанского университета, 1992. С. 85.
- [156] *Червон С.В.* О киральной модели космологической инфляции // Известия Вузов. Физика. 1995. № 5. С. 114.
- [157] *Chervon S.V.* The massive chiral model on inflation arena // In: International Conference on Astrophysics and Cosmology, Saha Institute of Nuclear Physics, Calcutta. India, 1993. P. 44.
- [158] *Червон С.В., Щиголев В.К., Журавлев В.М.* Нелинейные поля в моделях космологической инфляции // Известия Вузов. Физика. 1996. № 2. С. 41.
- [159] *Widrow L.M.* False vacuum decay in time dependent and two field models // Phys. Rev. D. 1991. V. 44. P. 2306.
- [160] *Adams F.S., Freese K.* Double field inflation // Phys. Rev. D. 1991. V. 43. P. 353.

- [161] *Переломов А.М.* Решения типа инстантонов в киральных моделях // УФН. 1981. № 4. С. 577.
- [162] *Göttlober S., Mücket J.P.* Microwave background temperature fluctuations resulting from nonflat perturbation spectra // *Astron. Astrophys.* 1993. V. 272 P. 1.
- [163] *Peter P., Polarski D., Starobinsky A.A.* Confrontation of double inflationary models with observations // *Phys. Rev. D.* 1994. V. 50. P. 4827.
- [164] *Coleman S.R., Weinberg E.J.* Radiative Corrections as the Origin of Spontaneous Symmetry Breaking // *Phys. Rev. D.* 1973 V. 7. P. 1888.
- [165] *Ellis G.F.R., and Madsen M.S.* Exact scalar field cosmologies // *Class. Quant. Grav.* 1991. V. 8. P. 667.
- [166] *Muslimov A.* On the Scalar Field Dynamics in a Spatially Flat Friedman Universe // *Class. Quant. Grav.* 1990. V. 7. P. 231.
- [167] *Nakayama K., Takahashi F., Yanagida T.T.* Polynomial Chaotic Inflation in the Planck Era // *Phys. Lett. B.* 2013. V. 725. P. 111.
- [168] *Kalosh R., Linde A., Westphal A.* Chaotic Inflation in Supergravity after Planck and BICEP2 // *Phys. Rev. D.* 2014. V. 90. P. 023534.
- [169] *Martin J., Ringeval C., Vennin V.* Encyclopædia Inflationaris // *Phys. Dark Univ.* 2014. V. 5-6. P. 75.
- [170] *Liddle A.R. Parsons P., Barrow J.D.,* Formalising the Slow-Roll Approximation in Inflation // *Phys. Rev. D.* 1994. V. 50. P. 7222.
- [171] *Фомин И.В.* Модели космологической инфляции в кинетическом приближении // *ТМФ.* 2017. Т. 191. С. 354-365.
- [172] *Fomin I.V.* Cosmological inflation models in the kinetic approximation // *Theoretical and Mathematical Physics.* 2017. V. 191. P. 781.

- [173] *Fomin I.V.* The models of cosmological inflation in the context of kinetic approximation // *Journal of Physics: Conference Series*. 2016. V. 731. P. 012004.
- [174] *Barrow J.* Exact inflationary universes with potential minima // *Phys. Rev. D*. 1994. V. 49. P. 3055.
- [175] *Zhuravlev V. M., Chervon S. V., Shchigolev V. K.* New exact solutions in standard inflationary models // *Phys. Lett. B*. 1997. V. 398. P. 269.
- [176] *Zhuravlev V. M., Chervon S. V., Shchigolev V. K.*, New classes of exact solutions in inflationary cosmology // *JETP*. 1998. V. 87. P. 223.
- [177] *Capozziello S., Feoli A., Lambiase G.* Oscillating universes as eigensolutions of cosmological Schrodinger equation // *Int. J. Mod. Phys. D*. 2000. V. 9. P. 143.
- [178] *Harko T., Lobo F. S. N., Mak M. K.* Arbitrary scalar field and quintessence cosmological models // *Eur. Phys. J. C*. 2014. V. 74. P. 2784.
- [179] *Yurov A.V., Yurov V.A.* Friedman versus Abel equations: A Connection unraveled // *J. Math. Phys.* 2010. V. 51. P. 082503.
- [180] *Hawkins R.M. and Lidsey J.E.* The Ermakov-Pinney equation in scalar field cosmologies // *Phys. Rev. D*. 2002. V. 66. P. 023523.
- [181] *Schunck F.E. and Mielke E.W.* A New method of generating exact inflationary solutions // *Phys. Rev. D*. 1994. V. 50. P. 4794.
- [182] *Kruger A.T., Norbury J. W.* Another exact inflationary solution // *Phys. Rev. D*. 2000. V. 61. P. 087303.
- [183] *Charters T. and Mimoso J. P.* Self-interacting scalar field cosmologies: Unified exact solutions and symmetries // *JCAP*. 2010. V. 022. P. 1008.
- [184] *Chervon S.V.* Inflationary cosmological models without restrictions on a scalar field potential // *Gen. Relat. Grav.* 2004. V. 7. P. 1547.

- [185] *Fomin I.V.* High-frequency gravitational waves in exact inflationary models // Proceedings of the XIIth International Conference on Gravitation, Astrophysics and Cosmology ICGAC-12, PFUR, Moscow, Russia. Ed. V.Melnikov, J.-P. Hsu. World Scientific Publishing, 2016. P. 255-256.
- [186] *Salopek D.S., Bond J.R.* Nonlinear evolution of long wavelength metric fluctuations in inflationary models // Phys. Rev. D. 1990. V. 42. P. 3936.
- [187] *de Ritis R. et. al.* New approach to find exact solutions for cosmological models with a scalar field // Phys. Rev. D. 1990. V. 42. P. 1091.
- [188] *Capozziello S. and Roshan M.* Exact cosmological solutions from Hojman conservation quantities // Phys. Lett. B. 2013. V. 726. P. 471.
- [189] *Dimakis N. et. al.* General Analytic Solutions of Scalar Field Cosmology with Arbitrary Potential // Phys. Rev. D. 2016. V. 93. P. 123518.
- [190] *Chimento L.P., Richarte M.G. and Sanchez I.E.* Form invariance symmetry generates a large set of FRW cosmologies // Mod. Phys. Lett. A. 2013. V. 28. P. 1250236.
- [191] *Фомин И.В.* О точных и приближенных решениях в космологии Фрийдмана // Известия Вузов. Физика. 2017. № 3. С. 46-56.
- [192] *Fomin I.V.* Exact and Approximate Solutions in the Friedmann Cosmology // Russ. Phys. J. 2017. V. 60. P. 427.
- [193] *Cataldo M., Chimento L. P.* Form invariant transformations between n- and m- dimensional flat Friedmann-Robertson-Walker cosmologies // Int. J. Mod. Phys. D. 2008. V. 17. P. 1981.
- [194] *Gumjudpai B.* Power-law expansion cosmology in Schrodinger-type formulation // Astropart. Phys. 2008. V. 30. P.186.
- [195] *Barrow J. D. and Paliathanasis A.* Observational Constraints on New Exact Inflationary Scalar-field Solutions // Phys. Rev. D. 2016. V. 94. P. 083518.

- [196] *Harrison E.R.* Fluctuations at the threshold of classical cosmology // *Phys. Rev. D.* 1970. V. 1. P. 2726.
- [197] *Zeldovich Y.B.* Gravitational instability: An approximate theory for large density perturbations // *Astron. Astrophys.* 1970. V. 5. P. 84.
- [198] *Bardeen J.M.* Gauge Invariant Cosmological Perturbations // *Phys. Rev. D.* 1980. V. 22. P. 1882.
- [199] *Лукаш В.Н.* О соотношении тензорной и скалярной мод возмущений в космологии Фридмана // *УФН.* 2006. № 1. С.113.
- [200] *Chervon S. V., Novello M. and Triay R.* Exact cosmology and specification of an inflationary scenario // *Grav. Cosmol.* 2005. V. 11. P. 329.
- [201] *Червон С.В., Фомин И.В.* Квантовое рождение начальных космологических возмущений // *Известия Вузов. Поволжский регион. Физико-математические науки.* 2008. № 4(8). С. 97-107.
- [202] *Chervon S.V., Fomin I.V.* About the calculation of cosmological parameters in exact models of inflation // *Grav. Cosmol.* 2008. V. 14. P. 163.
- [203] *Fomin I.V., Chervon S.V.* Determination of cosmological inflation parameters on the base of difference between precise and approximate solutions of scalar field equations // *Proceedings of XIII International Scientific Meeting «Physical Interpretations of Relativity Theory».* Moscow, 2009. P. 322-330.
- [204] *Фомин И.В.* Модели с нетривиальной кинетической частью в контексте точных решений уравнений динамики скалярного поля // *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана, Сер. Естественные науки.* 2015. № 4. С. 37-44.
- [205] *Unnikrishnan S. and Sahni V.* Resurrecting power law inflation in the light of Planck results // *JCAP.* 2013. V. 1310. P. 063.

- [206] *Фомин И.В.* Гравитационные волны в конформно-плоских пространствах // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана, Н.Э. Баумана, Сер. Естественные науки. 2016. № 4. С. 65-78.
- [207] *Holtzman J.A.* Microwave background anisotropies and large scale structure in universes with cold dark matter, baryons, radiation, and massive and massless neutrinos // *Astrophys. J. Suppl.* 1989. V. 71. P. 1-24.
- [208] *Weinberg S.* Cosmological fluctuations of short wavelength // *Astrophys. J.* 2002. V. 581. P. 810.
- [209] *Fomin I.V.* Gravitational waves perturbations of the early Universe // Proceedings of International Scientific Meeting «Physical Interpretations of Relativity Theory». Moscow, 2015. P. 144-156.
- [210] *Maggiore M.* Gravitational wave experiments and early universe cosmology // *Phys. Rept.* 2000. V. 331. P. 283.
- [211] *Sahni V., Sami M., Souradeep T.* Relic gravity waves from brane world inflation // *Phys. Rev. D.* 2002. V. 65. P. 023518.
- [212] *Амальди Э., Пицелла Г.* Поиск гравитационных волн // *Астрофизика, кванты и теория относительности.* М.: Мир, (1982) С. 241-396.
- [213] *Гладышев В.О., Морозов А.Н.* Классификация гравитационных антенн по методам регистрации гравитационного излучения // *Измерительная техника.* (2000) № 9. С. 21-25.
- [214] *Siparov S.V.* Theory of the zero order effect to study the space-time geometrical structure // Proceedings of XIII International Scientific Meeting «Physical Interpretations of Relativity Theory». Moscow, (2007) P. 282-291.
- [215] *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теория поля. М.: Наука, (1973) 504 с.
- [216] *Бичак И., Руденко В.Н.* Гравитационные волны в ОТО и проблема их обнаружения. М.: Изд-во МГУ, (1987) 264 с.

- [217] *Пустовойт В.И., Герцеништейн М.Е.* К вопросу об обнаружении гравитационных волн малых частот // ЖЭТФ Т. 43, Вып. 8. (1962) С. 605-607.
- [218] *Гладышев В.О., Морозов А.Н.* Особенности отклика лазерной интерференционной гравитационной антенны на низкочастотные воздействия // Измерительная техника. 1990. № 10. С. 26-28.
- [219] *Морозов А.Н.* Необратимые процессы и броуновское движение: Физико-технические проблемы. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э.Баумана, 1997. 332 с.
- [220] *Abramovici A. et al.* LIGO: The laser interferometer gravitational-wave observatory // Science. 1992. V. 256. P. 325-333.
- [221] *Гладышев В.О., Морозов А.Н.* Низкочастотный оптический резонанс в многолучевом интерферометре Фабри-Перо // Письма в ЖТФ. 1993. Т. 19, Вып. 14. С. 39-42.
- [222] *Gladyshev V.O., Morozov A.N.* The theory of a Fabry-Perot interferometer in a gravitational wave experiment // J.Moscow Phys. Soc. 1996. V. 6. P. 209-221.
- [223] *Gladyshev V.O., Morozov A.N.* Low-frequency optical resonance in multi-beams Fabri-Perot resonator and problem of gravitational waves detection // Proceedings of XIII International Scientific Meeting «Physical Interpretations of Relativity Theory». Moscow, 2007. P. 6-10.
- [224] *Abbott B.P. et al.* LIGO: The laser interferometer gravitational-wave observatory // Rep. Prog. Phys. 2009. V. 72. P. 076901.
- [225] *Accadia T. et al.* A state observer for the Virgo invented pendulum // Review of scientific instruments. 2011. V. 82. P. 094502.
- [226] *Ando M. et al.* Observation results by the TAMA300 detector on gravitational wave bursts from stellar-core collapses // Rhys. Rev. D. 2005. V. 71. P. 082002

- [227] *Grote H., Danzmann K., Dooley K.L., Schnabel R., Slutsky J., Vahlbruch H.* First long-term application of squeezed states of light in a gravitational-wave observatory // *Phys. Rev. Lett.* 2013. V. 110. P.181101.
- [228] *Boyle L.A., Steinhardt P.J., Turok N.* The cosmic gravitational-wave background in a cyclic universe // *Phys. Rev. D.* 2004. V. 69. P. 127302.
- [229] *Sa P.M., Henriques A.B.* Gravitational-wave generation in hybrid quintessential inflationary models // *Phys. Rep. D.* 2010. V. 81. P. 124043.
- [230] *Nishizawa A., Motohashi H.* Constraint on reheating after $f(R)$ inflation from gravitational waves // *Phys. Rev. D.* 2014. V. 89. P. 063541.
- [231] *Li F., Tang M., Shi D.* Electromagnetic response of a Gaussian beam to high-frequency relic gravitational waves in quintessential inflationary models // *Phys. Rev. D.* 2003. V. 67. P. 104008.
- [232] *Woods R.C., Baker R.M.L., Li F., Stephenson G.V., Davis E.W., Beckwith A.W.* A new theoretical technique for the measurement of high-frequency relic gravitational waves // *Journal of Modern Physics.* 2011. № 2. P. 498-518.
- [233] *Есаков А.А., Морозов А.Н., Табалин С.Е., Фомин И.В.* Применение низкочастотного оптического резонанса для регистрации высокочастотных гравитационных волн // *Вестник МГТУ им. Н.Э.Баумана, Сер. Естественные науки.* 2015. № 1. С. 25-34.
- [234] *Голяк Ил.С., Дворук С.К., Есаков А.А., Морозов А.Н., Пустовойт В.И., Строков М.А., Табалин С.Е.* Разработка и создание макета для регистрации высокочастотных гравитационных волн // *Физические основы приборостроения.* 2016. Т. 5. № 3. С. 40-47.
- [235] *Пустовойт В.И., Морозов А.Н., Гладышев В.О., Измайлов Г.Н.* Лазерные гравитационно-волновые антенны. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э.Баумана, 2016. 63 с.

- [236] *Морозов А.Н.* Применение интерферометра Фабри-Перо для регистрации высокочастотных флуктуаций метрики пространства-времени // Инженерный журнал: наука и инновации. 2012. № 5. С. 24.
- [237] *Astone P. et al.* Upper limit st 1.8 kHz for a gravitational-wave stochastic background with the *ALTAIR* resonant-mass detector // *Astronomy and Astrophysics*. 1999. V. 343. P. 19-22.
- [238] *Fomin I.V., Morozov A.N.*, The high-frequency gravitational waves in exact inflationary models with Gauss-Bonnet term // *Journal of Physics: Conference Series*. 2017. V. 798. P. 012088.
- [239] *Морозов А.Н., Назолин А.Л.* Динамические системы с флуктуирующим временем. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э.Баумана, 2001. 200 с.
- [240] *Коротаев С.М., Морозов А.Н., Сердюк В.О., Сорокин М.О.* Проявление макроскопической нелокальности в некоторых естественных диссипативных процессах // *Известия Вузов. Физика*. 2002. № 5. С. 3-14.
- [241] *Морозов А.Н.* Теоретические и экспериментальные исследования флуктуаций физического времени // *Радиооптика. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электронный журнал*. 2016 № 01. С. 35-61.
- [242] *Морозов А.Н.* Применение стандартной модели Солнца для расчета интенсивности флуктуаций физического времени // *Нелинейный мир*, 2016. № 4. С. 59-66.
- [243] *Morozov A.N.* Calculation of the Intensity of Physical Time Fluctuations Using the Standard Solar Model and its Comparison with the Results of Experimental Measurements // *Journal of Physics: Conference Series*. 2017. V.918. P. 012008.
- [244] *Пугачев В.С., Синицын И.Н.* Стохастические дифференциальные системы. М.: Наука, 1990. 632 с.

[245] *Бункин Н.Ф., Морозов А.Н.* Стохастические системы в физике и технике. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э.Баумана, 2011. 366 с.

[246] *Морозов А.Н., Гладышев В.О.* Описание распространения электромагнитного излучения в четырехмерном пространстве-времени с флуктуирующим метрическим тензором // Известия Вузов. Физика. 2002. № 2. С. 24-27.

[247] *Morozov A.N.* Space-time with a fluctuating metric tensor model // Journal of Physics: Conference Series. 2016. V. 731. P. 012010.

Оглавление

ПРЕДИСЛОВИЕ	4
ЧАСТЬ 1. ПРЕДПОСЫЛКИ И СЛЕДСТВИЯ ТЕОРИИ КОСМОЛОГИЧЕСКОЙ ИНФЛЯЦИИ	6
Динамика скалярного поля	10
Плотность энергии и давление	11
Число е-фолдов	12
Наблюдательные данные	13
Анизотропия реликтового излучения	14
ЧАСТЬ 2. СКАЛЯРНЫЕ ПОЛЯ В КОСМОЛОГИИ	18
Ранние представления о скалярных полях в космологии	18
Нелинейные скалярные поля	31
Самогравитирующие скалярные поля	39
Скалярные поля в конформно-плоских пространствах	40
Космологические и статические решения	41
Решения солитонного типа	43
Массивное скалярное поле	43
Нелинейные поля в моделях инфляции	46
ЧАСТЬ 3. АНАЛИЗ КОСМОЛОГИЧЕСКОЙ ДИНАМИКИ ВО ВСЕЛЕННОЙ ФРИДМАНА	48
Параметры медленного скатывания	51
Приближение медленного скатывания	54
Кинетическое приближение	55
Точные решения уравнений космологической динамики	60

Точные решения на основе выбора параметра Хаббла	62
Генерирование новых точных решений из известных	68
Сопоставление точных и приближенных решений	74
Одинаковая динамика и различные потенциалы	74
Одинаковые потенциалы и различная динамика	77
Генерирование точных решений из расхождения $\Delta_H(t)$	78
Вселенная Фридмана с ненулевой кривизной или материей	80
Уравнения динамики в терминах числа e-фолдов.	81
Точные решения для степенного масштабного фактора	83
Обобщение точных решений для моделей с $m = 2$	85
Модель с постоянными скалярным полем и потенциалом	86
Неинтегрируемые в терминах космического времени модели	87
Точные решения из подстановки масштабного фактора	87
ЧАСТЬ 4. КОСМОЛОГИЧЕСКИЕ ВОЗМУЩЕНИЯ.	91
Возмущения поля и метрики.	94
Квантование возмущений.	97
Параметры космологических возмущений	102
Диаграмма тензорно-скалярное отношение - спектральный индекс скалярных возмущений.	109
Постинфляционная эволюция космологических возмущений.	112
Плотность энергии реликтовых гравитационных волн.	115

ЧАСТЬ 5. ДЕТЕКТИРОВАНИЕ ВЫСОКОЧАСТОТНЫХ ГРАВИТАЦИОННЫХ ВОЛН.	119
Высокочастотные флуктуации метрики пространства-времени.	119
Описание интерферометра Фабри-Перо.	122
Математическое моделирование отклика интерферометра Фабри-Перо.	126
ЧАСТЬ 6. РЕГИСТРАЦИЯ ВЫСОКОЧАСТОТНЫХ ГРАВИТАЦИОННЫХ ВОЛН С ПОМОЩЬЮ НИЗКОЧАСТОТНОГО ОПТИЧЕСКОГО РЕЗОНАНСА.	131
Расчет чувствительности интерферометра Фабри-Перо при регистрации высокочастотных гравитационных волн.	132
Регистрация высокочастотных гравитационных волн.	136
Оценка возможности регистрации реликтовых гравитационных волн.	139
ЧАСТЬ 7. РЕГИСТРАЦИЯ ФЛУКТУАЦИЙ МЕТРИЧЕСКОГО ТЕНЗОРА ПРОСТРАНСТВА-ВРЕМЕНИ.	141
Модель флуктуирующего физического времени.	141
Пространство-время с флуктуирующим метрическим тензором.	143
Распространение света в пространстве-времени с флуктуирующим метрическим тензором.	144
Расчет уширения спектральных линий света при воздействии гравитационных волн.	148
ЗАКЛЮЧЕНИЕ.	151
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ.	152